بسم الله الرحمن الرحیم

متن سخنرانی آقای دکتر مرتضی بیات، استاد دانشگاه زنجان،

در سمینار آموزش ریاضی مراکز تربیت معلم شمال غرب کشور

مرکز تربیت معلم الزهراء زنجان

۱۸ مرداد ۱۳۸۹

راهبردهای حل مسأله

مرتضی بیات

اگر ایده‌ای یک بار به‌کار رود یک **شگرد** است،
بیش از یک بار تبدیل به‌یک **روش** می‌شود.
(جورج پولیا)

به‌نام خدا

فهرست مندرجات

۱ مقدمه

جورج پولیا با اثر مشهور خود « **چگونه مسأله را حل کنیم**» که در سال ۱۹۴۴ نگاشته و در سال ۱۹۴۵ منتشر نمود، اولین کسی بود که به‌شیوهٔ امروزی به‌بیان روش‌های کشف و تفکر ریاضی پرداخت و به آن‌ها، عنوان رهیافت‌های نوین را داد. پولیا قبل از این‌که با کارهای خود دربارهٔ « **حل مسأله ریاضی**» بدین حد از معروفیت برسد، ریاضی‌دانی حرفه‌ای بوده و به‌تنهایی و نیز با همکاری ریاضی‌دان‌های مشهوری هم‌چون هاردی، مقالات و کتب متعددی در حوزهٔ ریاضیات کاربردی و آنالیز به‌نگارش درآورده بود. ژاک آدامار در کتاب خود بنام **سرچشمه‌های ابداع ریاضی**، از وی به «عنوان اولین ریاضی‌دان بزرگی ...» یاد می‌کند پولیا به‌حوزه‌ی حل مسأله ریاضی، بدین سبب که شخصاً تجربیات تحقیقی و دیدگاه دقیقی راجع به‌مسایل ریاضی و آموزش آنها داشته است، خوب و زیبا پرداخته است. خصوصاً که اولین کتاب وی که یک سال بعد اهمیتش برای دیگران روشن شد، در شرایط نوشته شده که هنوز هیچ کس به‌فکر چنین مسایلی نبود و تقریباً همه‌ی افرادی که بحث‌های عمیقی درباره‌ی تفکر ریاضی را مطرح می‌ساختند هنوز هم ردی بر آثار پولیا وارد نکرده‌اند لکن موضوع مورد بحث دارای چنان اهمیتی شده است که باعث گردیده مطالب آن به‌مرور زمان به‌شکل‌های متنوعی درآید، کامل شود، به‌حیطه‌های مختلفی وارد شود، عوامل جدیدی منظور گردد، بر رهیافت‌های آن کارهای دیگری انجام گردد، وسایل تازه اضافه شود، بر عمق مطالب افزوده شود، تحقیقات جدید در علم روانشناسی و شناخت بدان افزوده شود و در نهایت بر آموزش آن تمرکز و برنامه‌ریزی دقیقی معطوف گردد و همگانی شود.... به‌همین تنوعی که در سطور اخیر می‌بینید و بلکه بیشتر در سال‌های اخیر به‌نظام حل مسأله پولیایی و اشاعه‌ی آن کارهای اساسی صورت گرفته است. خود پولیا در مقدمه‌ی بخش رهیافت‌ها در کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم** آورده است که «البته این فهرست، نخستین فهرست از این گونه است و چنان به‌نظر می‌رسد که برای اکثر حالات ساده کفایت می‌کند، ولی شکی نیست که امکان کامل‌تر شدن آن وجود دارد.»

پولیا با انتشار دو کتاب دیگر با عنوان خلاقیت ریاضی و ریاضیات و استدلال موجه‌نما به‌جوانب دیگری از آنچه که قبلاً در حل مسأله‌های ریاضی معرفی کرده بود، پرداخت. به‌طور خلاصه، پولیا حل هر مسأله را فرایندی چهار مرحله‌ای در نظر گرفت که شامل مراحل **فهم مسأله، طرح نقشه، اجرای نقشه، و به‌عقب نگریستن یا دوباره نگری** است.

در دهه‌ی ۱۹۷۰ توجه ویژه‌ای به‌کارهای پولیا معطوف شد تا حدی که شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا برای دهه‌ی ۱۹۸۰، کانون توجه آموزش ریاضی را روش پولیایی آموزش حل مسأله و به‌عبارتی، آموزش ریاضی از طریق حل مسأله قرار داد. از جمله محققانی که در خلال این سال‌ها تأثیر عمیقی بر پژوهش‌های حل مسأله و برنامه‌های درسی ریاضی گذاشت **شونفیلد** بود که با انتشار چندین مقاله و کتاب، جایگاه خاصی به‌حل مسأله در تحقیقات آموزش ریاضی داد. حل مسأله را با جدیدترین تحقیقات حیطه‌های روان‌شناسی، شناخت شناسی، فلسفه و سایر حوزه‌ها، عجین ساخت. به‌اعتقاد شونفیلد، اگر کسی بخواهد رفتار حل مسأله‌ی یک فرد را توضیح دهد، باید به‌چهار مقوله‌ی دانش و رفتار به‌شرح زیر بپردازد:

۱) **ذخایر دانشی:** یا زمینه‌ی دانش‌هایی که فرد می‌تواند در موقعیت‌های ریاضی به‌یاد بیاورد.

۲) **رهیافت‌ها:** قوانین سرانگشتی برای حل مؤثر مسأله که این قوانین، برای پیشرفت در حل مسأله‌های ناآشنا و مشکل مضر هستند.
۳) **کنترل:** چگونگی انتخاب بهینه‌ی ذخایر دانش و به‌کار بردن آنها.
۴) **نظام باورها:** چارچوب دیدگاهی فرد به‌مسایل ریاضی و کل ریاضیات. نظام باورها زمینه‌ای است که ذخایر دانشی، رهیافت‌ها و کنترل، بر آن مبتنی می‌گردند.

۲ رهیافت چیست؟

رهیافت‌ها یا «عملیات ذهنی که به‌طور بارز در حل مسایل مفید و مؤثرند» در کانون توجه اکثر تحقیقات حل مسأله در آموزش ریاضی قرار داشته است و شالوده‌ی اکثر اقدامات تکمیلی در حل مسایل بوده است.
رهیافت‌ها معادل واژه‌ی Heuristics است که در اصل، از زبان یونانی وارد انگلیسی شده است و از لحاظ لغوی، به‌معنای یاری کننده برای فهم بهتر است. ولی این اصطلاح به‌دو مفهوم اطلاق می‌شود یکی به نوع روش تدریس که موضوع این بحث نیست و دیگری راهبردهایی مانند استفاده از مسأله‌ی مشابه، رسم نمودار و استفاده از مسأله‌ی کمکی در حل مسأله ریاضی است و به‌کسانی که با مسأله درگیر می‌شوند کمک می‌کند تا آن را درک نموده و حل کنند.
استفاده‌ی موفقیت‌آمیز از چنین راهبردهایی نه تنها مستلزم شناخت آن هاست بلکه نیاز به‌تصمیم‌گیری اجرایی خوب و داشتن مجموعه‌ی گسترده‌ای از دانش و مهارت‌های فردی است.
در مراحل حل مسأله بعد از فهمیدن صورت مسأله مهم‌ترین قسمت حل مسأله، طرح نقشه‌ای برای حل آن است. یعنی یافتن روشی که بتوان بین داده‌ها و مجهول مسأله ارتباط برقرار نمود و منجر به‌حل مسأله شود.
طرح نقشه علاوه بر تسلط موضوعی و تمرین و تجربه، به‌عوامل متعدد دیگری نیز بستگی دارد. هیچ‌گاه با یک ذهن خالی نمی‌توان روی حل مسأله فکر کرد و برای حل آن نقشه‌ای طرح کرد مگر آن که حداقل دانش اولیه‌ی لازم (شامل مفاهیم مجرد، رابطه‌ی اولیه‌ی بین مفاهیم و رابطه‌ی سطح بالا بین مفاهیم) را دارا بود. برای مثال، کسی که می‌خواهد یک مسأله در مبحث انتگرال را حل کند، دست کم باید تعاریف، فرمول‌ها، قضایا و قراردادهای موجود در مبحث انتگرال را بداند.
بنابراین، دانش‌آموز باید مفهوم هر فرمول، شرایط استفاده و کاربرد آن را به‌طور دقیق بیاموزد تا توشه‌ای برای طرح نقشه یا حل مسایل دیگر شود.
مهم‌ترین عمل در طرح نقشه برای حل مسأله، هدایت و کنترل فکر است. باید مراقب اولین نقشه‌ای که به‌ذهن می‌رسد، بود، زیرا ممکن است راهی ساده‌تر برای حل مسأله وجود داشته باشد یا این که همه‌ی حالات ممکن در نظر گرفته نشده باشد و یا راه‌حل به‌ذهن رسیده (تنها به‌خاطر بعضی شباهت‌های بین داده‌ها یا مجهول این مسأله با مسأله‌ای دیگر) نادرست باشد.

طرح نقشه‌ای مناسب است که در آن، لوازم و ابزارهای مورد نیاز برای اجرای آن و همچنین نحوه‌ی اجرای آن به‌طور کامل مشخص شده باشد. در طرح نقشه، باید هدف نهایی یعنی یافتن مجهول مسأله را به‌هدف‌های کوچک‌تر که قابل دسترس‌تر هستند، تقسیم کرد. یعنی در طرح نقشه، بایداز جنبهٔ نظری معلوم شود که برای حل مسأله به‌ترتیب چه چیزهایی می‌خواهیم و چگونه می‌توانیم آنها را به‌دست آوریم؟
طرح نقشه برای حل یک مسأله، مشابه طرح نقشه‌ای برای ساختن یک ساختمان (هرچند کوچک) است، هر چه جزئیات نقشه و طریقه‌ی حل مشکلات مشخص‌تر باشد، امکان برخورد با مشکلات پیش‌بینی نشده در اجرای طرح یا بین آن، کمتر می‌شود.
اگر در طرح نقشهٔ، اولیهٔ نحوهٔ اجرای اجزای متفاوت آن معلوم نباشد، ممکن است سبب اتلاف وقت و انرژی شود. البته افراط در این زمینه هم سودمند نیست. اگر از درست بودن نقشه‌ای به‌هیچ وجه مطمئن نباشیم، بهتر است با قبول امکان اشتباه، اقدام به‌امتحان آن کنیم. با توجه به‌این که هر مسأله ممکن است از راه‌های مختلفی قابل حل باشد، باید در مورد استراتژی‌هایی که مناسب‌تر به‌نظر می‌رسند کمک گرفت.
به‌هر حال کسی که می‌خواهد مسأله حل کن خوبی باشد باید توانایی تجدیدنظر در طرح را در صورت عدم کارآیی استراتژی‌های اولیه خود داشته باشد چند نمونه از استراتژی‌هایی که ممکن است در طول حل مسأله مورد استفاده واقع شوند از این قرارند.

— تعمیم (گسترش حوزه‌ی تحقیق)
— روش بازگشتی
— روش نزول نامتناهی
— جست و جوی پایایی
— حذف حالت‌های نامطلوب
— انتخاب نمادهای مؤثر و مناسب
— حل مسأله ساده‌تر و مرتبط با مسأله داده شده
— بهره‌گیری از تقارن
— الگویابی
—تهیه مدل، یعنی رسم الگوی مشابه یا منحنی متناسب با موقعیت مسأله)
— تهیه‌ی فهرست‌ها، جدول‌ها و منحنی‌های منظم و سازمان یافته
— حدس و آزمایش

منظور از بیان این فهرست، توصیف آنها نیست، بلکه علاقه به‌اجرای آنها است.
با توجه به‌مثال‌هایی که نشان می‌دهند چگونه دیگران این ایده‌های ساده و در عین حال نیرومند را به‌کار بسته‌اند، می‌توانیم امیدوار باشیم که مهارت‌هایمان در حل مسأله افزایش یابد. به‌طور کلی، می‌توان گفت رهیافت عملی ذهنی است که به‌طور بارز، در حل مسأله مفید و مؤثر است. حال به‌بیان و آموزش این رهیافت‌ها با استفاده از حل مسایل می‌پردازیم.

ضرورت فراگیری رهیافت‌ها:

هنگامی که مهم‌ترین رهیافت‌ها کشف شوند و به‌تفصیل مورد بحث قرار گیرند گام بعدی آموزش مستقیم این رهیافت‌ها و هدایت دانش آموزان به‌نسبت کشف آن‌هاست. یعنی رهیافت‌ها، در حکم راهنمای فرآیند حل مسأله عمل می‌کنند و دیگر لزومی ندارد که تک تک دانش آموزان درگیر فرآیند طولانی و پر مشقت کشف یا ابداع این رهیافت‌ها شوند. علاوه بر این، رهیافت‌ها به‌ایجاد توسعه‌ی فکری کمک می‌کنند و دانش آموزان را در برخورد با حل مسایل یاری می‌دهند و اعتماد بنفس آنها را در بالا می‌برد.
از طرفی رهیافت‌ها روش‌های کلی هستند و متعلق به‌طبقه‌ی خاص از افراد یا مربوط به‌نوعی خاص از دانش نمی‌شوند، لذا فراگیری آنها می‌تواند در حل طیف وسیعی از مسایل گوناگون مؤثر و رهگشا باشند. و بالاخره به‌دلیل این که آن‌ها به‌وسیله‌ی درون بینی (روش پولیا) با انجام مشاهدات سامانه‌مند از افراد خبره که مسایل زیادی را حل می‌کنند، شناسایی و شخصیت پردازی می‌شوند قابلیت آموزش را دارند.

۳ مسأله چیست؟

هرچند برای مسأله تعریف مشخص و مورد تأیید همگان وجود ندارد. اما از لحاظ لغوی مسأله به‌معنای سؤال است ولی هر سؤال به‌معنای مسأله نیست. مسأله‌ها سؤال‌هایی هستند که انسان را به‌اندیشیدن وادار می‌کنند و نمی‌توان با اطلاعات و یادگیری‌های قبلی به آن‌ها سریعاً پاسخ داد.
اشکال در خصوص تعریف اصطلاح مسأله آن است که حل مسأله امری نسبی است. تکالیف یکسانی که برای برخی دانش آموزان مستلزم تلاش‌های قابل ملاحظه‌ای است ممکن است، برای برخی دیگر تمرین‌هایی عادی (روتین) باشد و برای یک ریاضی‌دان، پاسخ به آن‌ها تنها یادآوری یک مطلب باشد. بدین ترتیب، مسأله بودن خاصیتی نیست که مختص به‌یک تکلیف ریاضی باشد، بلکه رابطه‌ای است نسبی بین فرد و تکلیف (کنش) به‌شرطی که تکلیف برای فردی که می‌کوشد آن را حل کند، مشکل باشد. به‌علاوه، آن مشکل باید یک بن‌بست فکری باشد نه یک بن‌بست محاسبه‌ای (مثلاً معکوس کردن یک ماتریس ۲۷×۲۷ برای من یک تکلیف پرمشقت است و به‌احتمال زیاد، من در فرآیند حل آن مرتکب خطای محاسباتی خواهم شد، ولی باز هم برای من مسأله نیست.) به‌بیان رسمی‌تر، می‌شود گفت که اگر فرد به طرحواره انجام یک تکلیف ریاضی دسترسی آسانی داشته باشد، آن تکلیف یک تمرین است نه یک مسأله.
تنها دو خصیصه مهم برای یک مسأله وجود دارد. نخست این که یک مسأله در برخی موقعیت‌ها یک ماهیت ناشناخته است (تفاوت میان یک حالت هدف‌دار و یک حالت معمولی) و این حالت‌ها با مسایل الگوریتمی ریاضی یا مسایل آزاردهنده و دشوار اجتماعی چون اعمال خشونت در مدارس، متفاوت هستند. دوم این که، یافتن و حل کردن مسایل ناشناخته بایستی ارزش اجتماعی، فرهنگی یا عقلانی داشته باشد. یعنی این که بعضی از افراد معتقدند که یافتن مسأله ناشناخته دارای ارزش زیادی است.
اگر شخص یک مسأله ناشناخته یا لزوم تشخیص یک مسأله ناشناخته را درک نکند، پس دیگر مسأله‌های درک نشده و تعبیر نشده برای وی وجود نخواهد داشت زیرا تجربهٔ وی، تنها با مسایل معمولی بوده

است. (این که آیا مسأله‌ای مستقل از هر گونه تعبیر و برداشت‌های فرد وجود دارد یا خیر، یک مسأله هستی‌شناسی است که فراتر از حوزه و قلمرو این بحث است.)
با چنین تعریفی از رهیافت‌ها و مسأله، به‌معرفی چند رهیافت مهم برای حل مسایل گوناگون می‌پردازیم.

۴ رهیافت رسم شکل

آن چه یک دیدن کند ادراک آن
سال‌ها نتوان نمودن با بیان (مولوی)

یک تصویر یا شکل، در گفت و گوها و ارتباط‌های کلامی نقش مؤثری دارد و می‌تواند ارتباط بین مکان‌ها و موقعیت‌های دور از هم را به‌سادگی و روشنی نشان دهد، زیرا مشاهده، از جمله عوامل کارآمدی است که انسان را در فرآیند تفکر یاری می‌کند. کودک از بدو تولد، به‌وسیله نگاه و مشاهده، با دنیای اطراف خود ارتباط برقرار می‌کند و مثلاً، در پاسخ نگاه والدین خود، با لبخند یا گریه به‌رفتار آن‌ها عکس العمل نشان می‌دهد. حتی انسان‌های نخستین نیز با رسم شکل بر روی دیوار غارها به‌بیان عقاید خود می پرداختند و از این طریق، مشکلات خود را مرتفع می نمودند. به‌همین دلیل، ضرب المثل‌هایی چون «شنیدن کی بود مانند دیدن» و «یک تصویر با ارزش‌تر از هزار کلمه است» از قدیم رایج بوده است. اگر به‌تاریخ تمدن‌های گوناگون نیز توجه کنیم، متوجه خواهیم شد که اولین ارقام، شکل‌های هندسی داشته‌اند و در مسیر تکاملی، به‌شکل ارقام امروزی تغییر یافته‌اند.
بابلیان نیز به‌کمک خط میخی، عددنویسی را در مبنای شصتگانی به‌روش رسم شکل انجام می‌دادند و کتیبه‌های بیستون و بعضی کتیبه‌های دیگر از دوران باستان، شاهد این مدعاست. بالاخره، در هند باستان، معمولاً به‌جای اثبات یک قضیه یا یک مسأله، شکلی می‌کشیدند.
به‌هر حال، هر زمان که ممکن باشد توصیف تصویری یک مسأله با استفاده از یک شکل یا نمودار مفید است. معمولاً نمایش یک مسأله با استفاده از نمودار، موجب سهولت جمع آوری و شکل دادن اطلاعات مرتبط با مسأله و توجه به‌ارتباط‌ها و وابستگی‌های موجود در آن می‌شود.
حال ببینیم چگونه به‌کمک رسم شکل، می‌توانیم مسأله‌ای را حل کنیم.
مسأله ۱. به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n > ۱$ می‌توانیم بازه $(۰, ۱۷)$ را به‌بی‌نهایت طریق مختلف به n بخش ناتهی مثلاً به‌طول‌های $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ تقسیم کنیم (در واقع با هر انتخابی از $n-۱$ نقطهٔ متمایز درون این بازه، این کار انجام می‌شود). اینک مجموع

$$S_n(P) = \sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲} = \sqrt{۱^۲ + a_۱^۲} + \sqrt{۳^۲ + a_۲^۲} + \cdots + \sqrt{(۲n-۱)^۲ + a_n^۲}$$

تابعی از افرازهایی مانند $P = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ است که با تغییر P روی همه افرازهای ممکن بی‌نهایت مقدار می‌گیرد. فرض کنید S_n مقدار می‌نیمم این تابع باشد

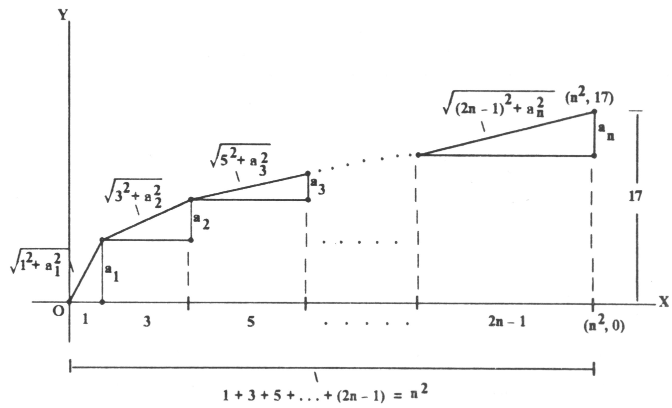
$$S_n = \min_P S_n(P) = \min_P \sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲}$$

جالب است که می‌توانیم نتیجه بگیریم که دقیقاً یکی از مقادیر

$$S_۲, S_۳, S_۴, \cdots, S_n, \cdots$$

عددی صحیح است. این مقدار کدام است؟

حل: با توجه به‌این که $\sqrt{(۲k-۱)^۲ + a_k^۲}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌طول ضلع‌های $(۲k-۱)$ و a_k است، $S_n(P)$ برابر با مجموع n وتر از این نوع می‌شود. با رسم شکل، مسأله تقریباً حل شده است.
اگر در صفحه مختصات، این وترها را به‌طور متوالی به‌یکدیگر وصل کنیم تا به‌این ترتیب، مبدأ به‌نقطه $(n^۲, ۱۷)$ مرتبط شود، برای حل کردن مسأله، گامی کوچک و معقول برداشته‌ایم.



شکل ۱

در این صورت

$$S_n = \min S_n(P) = \text{طول مسیر مستقیم بین } (۰,۰) \text{ و } (n^۲, ۱۷) = \sqrt{n^۴ + ۱۷^۲}$$

برای آن که S_n عددی صحیح باشد، باید داشته باشیم $(n^۲)^۲ + ۱۷^۲ = t^۲$
که به‌این ترتیب $(n^۲, ۱۷, t)$ سه‌تایی فیثاغورسی است. ولی تنها یک سه‌تایی فیثاغورسی وجود دارد که

طول یکی از ساق‌های مثلث متناظرش برابر ۱۷ است. نتیجه‌ای نسبتاً مشهور که تحقیق آن بسیار ساده است این است که اگر m عددی فرد (مانند ۱۷) باشد، آن‌گاه

$$(m, \frac{۱}{۲}(m^{۲} - ۱), \frac{۱}{۲}(m^{۲} + ۱))$$

سه‌تایی فیثاغورسی است. پس $(۱۷, ۱۴۴, ۱۴۵)$ سه‌تایی مطلوب است و در نتیجه

$$n^{۲} = ۱۴۴, n = ۱۲$$

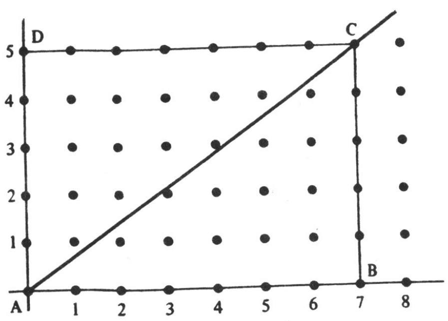
بنابراین، $S_{۱۲} = ۱۴۵$ تنها عدد صحیح بین S_n هاست.

مسأله ۲. اگر a و b عددهای صحیح و مثبتی باشند و عامل مشترکی نداشته باشند، نشان دهید:

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{۲a}{b}\right]+\left[\frac{۳a}{b}\right]+\cdots+\left[\frac{(b-۱)a}{b}\right]= \frac{(a-۱)(b-۱)}{۲}.$$

حل: وقتی $b = ۱$، می‌بینیم که مجموع سمت چپ مساوی صفر است و در نتیجه، حکم برقرار است. روشن نیست که چگونه شکل می‌تواند در اثبات این گزاره مؤثر باشد. با این حال، این گزاره شامل ۲ متغیر b, a است و $\frac{a}{b}$ و $\frac{۲a}{b}$ و ...، به‌ترتیب مقادیر تابع $f(x) = \frac{ax}{b}$ به‌ازای $x = ۱, ۲, ۳, \cdots$ هستند. آیا می‌توان مقادیر $[\frac{a}{b}]$ و $[\frac{۲a}{b}]$ و ... را با استفاده از رسم شکل نشان داد؟

برای روشن شدن بحث، حالت $a = ۵$ و $b = ۷$ را در نظر می‌گیریم هر یک از نقطه‌های $P_k = (k, \frac{۵k}{۷})$ و $k = ۱, ۲, \cdots, ۶$ روی خط $y = \frac{۵x}{۷}$ قرار دارند و $[\frac{۵k}{۷}]$ برابر است با تعداد نقاط مشبکه‌ای روی خط قائم گذرنده از نقطه P_k که بالای محور xها و نقطهٔ P_k قرار دارند. هم‌چنین $\sum_{k=۱}^{۶}\left[\frac{۵k}{۷}\right]$ که برابر است با تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای واقع در درون مثلث ABC، به‌شکل زیر دقت کنید.



شکل ۲

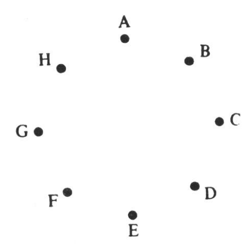
این تعداد بنابر تقارن مساوی نصف تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای واقع در درون مستطیل $ABCD$ می‌باشد. پس تعداد کل نقطه‌ها $۲۴ = ۶ \times ۴$ و در نتیجه ۱۲ نقطه درون مثلث ABC قرار می‌گیرد.

این استدلال در حالت کلی نیز درست است و شرط این که a و b عامل مشترکی ندارند، به‌ما اطمینان می‌دهد که هیچ یک از نقاط مشبکه‌ای واقع در درون مستطیل $ABCD$، روی خط $y = \frac{ax}{b}$ قرار نمی‌گیرد در نتیجه:

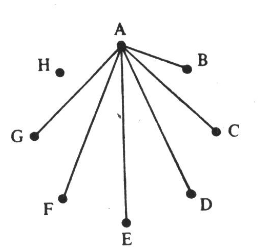
$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{1}{2}(\text{تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای درون } ABCD)=\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

مسأله ۳. آقای x و آقای y به‌نمایندگی کشور خود، در کنفرانسی که در آن ۳ زوج نماینده از سه کشور دیگر حضور داشتند، شرکت کردند. افراد حاضر در این جمع با یکدیگر دست دادند. هیچ نماینده‌ای با نماینده دیگر هم وطنش دست نداد. هیچ کس هم با فرد دیگری برای بار دوم دست نداد و البته هیچ کس با خودش هم دست نداد. پس از آن که کار دست دادن پایان یافت، آقای x از هر یک از حاضران و از جمله آقای y، درباره تعداد دفعاتی که با دیگران دست دادند سوأل کرد. با نهایت شگفتی، همه جواب‌ها متفاوت بود. آقای x چند بار دست داد؟

حل: اگر چه استفاده از یک نمودار در حل این مسأله ضروری نیست، ولی اگر داده‌ها به‌شکل زیر به‌صورت نمودار مشخص کنیم، کمکی به‌حل مسأله خواهد بود. همانگونه در شکل زیر دیده می‌شود، ۸ نفر شرکت کننده با هشت نقطه نشان داده شده‌اند (شکل ۳)

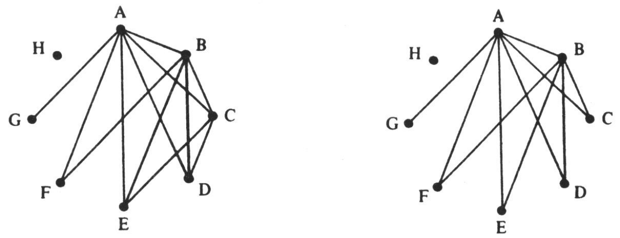


شکل ۳



شکل ۴

پس پاسخ سوأل آقای x، عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ٦ هستند. یکی از افراد مثلاً A، با ٦ نفر دیگر مثلاً B، C، D، E، F و G دست داده است که این مطلب، با رسم پاره‌خط‌هایی روی نمودار نشان داده شده است. از این نمودار معلوم می‌شود که H کسی است که با هیچ یک از افراد دست نداده (شکل ۴) همچنین، A و H باید نمایندگان یک کشور باشند. بنابر فرض، یکی از افراد B، C، D، E، F و G با پنج نفر دیگر دست داده است. می‌توانیم در صورت لزوم، با نام‌گذاری مجدد فرض کنیم این فرد B باشد.



شکل ۶ شکل ۵

بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم ۵ نفری که با B دست داده‌اند A، C، D، E و F باشند (شکل ۵). همان طور که در این شکل دیده می‌شود، G تنها کسی است که می‌توانسته پاسخ «یک بار» را بدهد. پس B و G باید نمایندگان یک کشور باشند.
بار دیگر در صورت لزوم، با نام‌گذاری مجدد نقطه‌های C، D و E فرض می‌کنیم که C با ۴ نفر یعنی E، D، B و A دست داده است. نمودار مربوط به‌این حالت در شکل ٦ آمده است.
با استدلالی مشابه قبل نتیجه می‌شود که F و C نمایندگان یک کشور و در نتیجه D و E نماینده یک کشور هستند.
D و E هر کدام با ۳ نفر دیگر دست داده‌اند. از آنجا که آقای x دو بار جواب ۳ را دریافت نکرده است، لذا D و E همان آقای x و y هستند و این نشان می‌دهد که آقای x، با سه نفر دیگر دست داده است.

۵ رهیافت تقارن

هر جا سخن از تقارن به‌میان می‌آید، عموماً همه ذهن‌ها متوجه شکل‌ها یا جسم‌هایی می‌شوند که متقارن‌اند.
بدن آدمی و بسیاری از جانوران، برگ درختان، بلورهای نمک، برف و بسیاری از پدیده‌های دیگر طبیعت هر کدام به‌نحوی مفهوم تقارن را در ما تداعی می‌کنند.
حتی بسیاری از نمادها از جمله بعضی از حروف الفبا تقارن محوری دارند، نماد ∞ هم تقارن محوری و هم تقارن مرکزی دارد زیرا محل برخورد دو خط راست یکی افقی و دیگری قائم محورها، مرکز تقارن را تشکیل می‌دهند. دایره تقارن چرخشی دارد یعنی با چرخش، دایره روی خودش قرار می‌گیرد، مثلث متساوی‌الاضلاع تقارنی با چرخش $\frac{1}{3}$ دارد. یعنی با چرخش به‌اندازه ۱۲۰ روی خودش قرار می‌گیرد، $a+b$ تقارن جا به‌جایی دارد یعنی با جا به‌جا شدن حروف a و b، مقدارش تغییر نمی‌کند.
تقارن یعنی «خودسانی» هر شکل یا چیزی که با نوعی حرکت تغییر نکند و بر خودش منطبق شود خودسان یا متقارن است.

مفهوم تقارن به‌جز آن که در هنر (و گاه در فلسفه) پایه و معیاری برای زیبایی شناسی (یا منطقی بودن بحث) است، در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، بلورشناسی، مکانیک کوانتومی و ... نقشی بنیانی برای شناخت طبیعت و قانون‌های حاکم بر آن دارد.
در اینجا کوشش می‌کنیم ضمن حل چند مسأله، اساسی‌ترین ویژگی‌های عبارت‌های متقارن و روش‌های استفاده از آنها را برای حل مسایل محاسبه‌ای به‌کار بریم. تسلط بر ویژگی‌های عبارت‌های متقارن در بسیاری از حالت‌ها نیروی لازم را برای حل مسأله در اختیار ما می‌گذارد. ریاضی در هر شکل و به‌هر صورتی که باشد، غیر از این که توان ما را برای به‌دست آوردن موقعیت‌های آینده بالاتر می‌برد، معیاری برای ارزش‌های فرهنگی و معنوی ما نیز می‌باشد. هرمان ویل ریاضیدان بزرگ روزگار ما (متوفی به‌سال ۱۹۵۵ میلادی) می‌گوید:
«کار ما این است که از میان مه تیره و انبوه راه خود را باز کنیم». باید توجه داشته باشیم که ریاضیات، به‌جز جنبه‌های نیرومند کاربردی خود، نقشی بسیار جدی در شکل‌گیری فرهنگ معنوی ما دارد. دانش ریاضی شبیه آفرینش‌های اساطیری، موسیقی و شعر، حوزه خاصی از خلاقیت است. در این جا با آوردن مثال‌هایی روش بهره‌گیری تقارن را بیان می‌کنیم.
مسأله۱. معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر یک از ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد.
حل: می‌دانیم برای تشکیل یک معادله درجه دوم باید S (مجموع) و P (حاصلضرب) دو ریشه را داشته باشیم. در این صورت، از فرمول $x^2-Sx+p=0$ معادله درجه دوم خواسته شده به‌راحتی به‌دست می‌آیند.
دو رابطه ساده بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله اولیه وجود دارد. این دو رابطه ساده‌ترین رابطه‌های متقارن بین x_1 و x_2 هستند «$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$» اکنون اگر ریشه‌های معادلهٔ مجهول را y_1 و y_2 بنامیم، بنا به‌شرط مسأله باید داشته باشیم: $y_1=x_1^3, y_2=x_2^3$ حال اگر مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله مجهول را S_1 و P_1 بنامیم داریم

$$S_1=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$S_1=(-\frac{b}{a})^3+3\frac{c}{a}\times\frac{b}{a}=-\frac{b^3-3abc}{a^3},$$
$$P_1=x_1^3\times x_2^3=(x_1x_2)^3=\frac{c^3}{a^3}$$

و معادله مجهول به‌دست می‌آید:

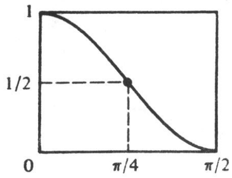
$$ay^2+(b^3-3abc)y+c^3=0$$

در اینجا به‌این دلیل توانستیم از دستورهای بالا استفاده کنیم که $x_1^3+x_2^3$ و $x_1^3x_2^3$ عبارت‌هایی متقارن برحسب x_1, x_2 بودند و اگر متقارن نبودند نمی‌توانستیم از این روش استفاده کنیم.

مسأله ۲. مقدار انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

حل: مقدار انتگرال را نمی‌توان با روش معمول انتگرال‌گیری به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، تابع زیر انتگرال تابع اولیه ندارد. با وجود این، اگر توجه کنیم که تابع بالا نسبت نقطه $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ متقارن است (شکل ۷) می‌توان آن را به‌دست آورد.



شکل ۷

برای نشان دادن این مطلب (که چندان هم بدیهی نیست) فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$، کافیست نشان دهیم که به‌ازای هر x که $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ داریم $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ پس تساوی کلی‌تر زیر را به‌ازای $r = \sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2} - x) + f(x) &= \frac{1}{1+(\tan^r(\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{1}{1+\tan^r x} \\ &= \frac{1}{1+\cot^r x} + \frac{1}{1+\tan^r x} = \frac{\tan^r x}{1+\tan^r x} + \frac{1}{1+\tan^r x} \\ &= \frac{1+\tan^r x}{1+\tan^r x} = 1 \end{aligned}$$

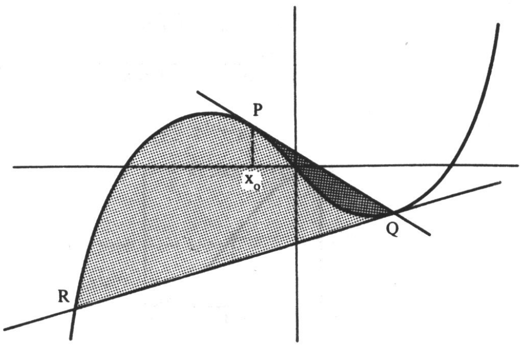
از تقارن تابع نتیجه می‌گیریم که مساحت زیرمنحنی روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ برابر نصف مساحت مستطیل است یعني مقدار انتگرال مساوی، $\frac{1 \times \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ است.

مسأله ۲. فرض کنید P نقطهٔ روی نمودار $y = f(x)$ باشد که در آن f یک چند جملهٔ درجه ۳ است و فرض کنید که مماس در نقطه P بار دیگر منحنی را در نقطه Q قطع کند و A مساحت ناحیه محدود به‌منحنی و پاره‌خط PQ باشد و B ناحیه‌ای باشد که با روشی مشابه از نقطه Q شروع شود (به‌جای P)، ارتباط بین A و B چیست؟

حل: می‌دانیم که نمودار یک چندجمله‌ای درجه سوم نسبت به‌نقطهٔ عطف خود متقارن است. از آنجا که انتخاب محورهای مختصات بر مساحت‌های مورد نظر تأثیری ندارد، نقطه عطف را مبدأ مختصات می‌گیریم.

بنابراین، فرض می‌کنیم معادله درجه سوم مفروض به‌شکل $f(x) = ax^{۳} + bx \quad a \neq ۰$ باشد. فرض کنید $x_۰$ طول نقطه P باشد در این صورت نتیجه می‌شود طول نقطه Q مساوی $-۲x_۰$ است.(ولی در اینجا محاسبه را انجام نمی‌دهیم). در حقیقت، راه زیبایی برای رسیدن به‌مطلب وجود دارد که نیاز به‌دانستن روش‌های موجود می‌باشد. یک انتگرال‌گیری سرراست نشان می‌دهد که مساحت A مساوی $kx_۰^{۴}$ که در آن k مستقل از $x_۰$ است (همانند قبل در اینجا جزئیات محاسبه‌های مربوط مورد نظر نیست).

حال می‌توانیم نتیجه‌های قبلی خود را درباره نقطه Q به‌کار ببریم. مماس بر منحنی در نقطه Q منحنی را در R قطع می‌کند که طول آن به‌روش مساوی $-۲(-۲x_۰) = ۴x_۰$ و مساحت B مساوی است با $k(-۲x_۰)^{۴} = ۱۶kx_۰^{۴} = ۱۶A$ یعنی ارتباط بین A و B به‌دست می‌آید.



شکل ۸

۶ رهیافت دنبال کردن زوجیت

مفهوم زوجیت یعنی زوج یا فرد بودن است. در حساب زوجیت یک عدد صحیح حاکی از وضعیت نسبی آن نسبت به ۲ می‌باشد. به‌ویژه بسته به‌آن که باقیمانده تقسیم یک عدد بر دو، صفر یا یک باشد، آن عدد به‌ترتیب زوج یا فرد نامیده می‌شود.

با چنین دسته‌بندی از زوجیت تعمیم این ایده، بدین صورت طبیعی به‌نظر می‌رسد. به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، مجموعه اعداد صحیح را برحسب باقیمانده تقسیم آنها بر n به n ردهٔ هم نهشتی تقسیم می‌کنیم که هر عدد بر اساس یکی از n عدد $۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$ شناسائی می‌شوند.

مسأله ۱. فرض کنید n عدد صحیح فرد بزرگتر از ۱ باشد و A ماتریس n در n و متقارن باشد که هر سطر و ستون A از جایگشتی روی عددهای $۱, ۲, \cdots, n$ به‌وجود آمده است. نشان دهید که هر یک از عددهای $۱, \cdots, n$ روی قطر اصلی A ظاهر می‌شوند.

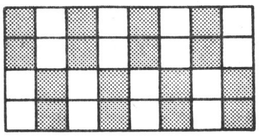
حل: درآیه‌های غیرقطری A به‌صورت جفت جفت ظاهر می‌شوند زیرا A متقارن است.

هر عدد دقیقاً n بار ظاهر می‌شود و با توجه به‌فرد بودن n، حکم ثابت می‌شود.

مسأله۲. یک اسب روی صفحه شطرنج ۴ در n قرار می‌دهیم. آیا می‌توان با $۴n$ حرکت متوالی اسب از همه خانه‌های صفحه شطرنج عبور کرد و به‌خانهٔ اول بازگشت؟

حل: قبل از حل این مسأله، جالب است همین مسأله را روی یک صفحه شطرنج ۷×۷ در نظر بگیریم. فرض کنید توانسته باشیم چنین مسیری را بیابیم. در حرکت اول، اسب به‌خانه‌ای با رنگ مخالف منتقل می‌شود. در حرکت دوم به‌خانهٔ همرنگ می‌رود و الی آخر. ملاحظه می‌کنیم که پس از تعداد فردی از حرکت‌ها رنگ خانه‌ای که اسب اشغال خواه کرد مخالف رنگ خانهٔ اول است. ولی مسیر بسته‌ای که همه خانه‌های صفحه ۷×۷ را بپیماید، نیازمند ۴۹ حرکت است که این یک عدد فرد است. بنابراین نمی‌تواند به‌خانهٔ اولش باز گردد و مسیر بسته مورد نظر ممکن نیست.

اکنون صفحه $۴ \times n$ را در نظر می‌گیریم. استدلال فوق در اینجا سودمند نیست، زیرا $۴n$ عددی زوج است. برای حل این مسأله صفحه را مطابق شکل زیر رنگ آمیزی می‌کنیم.



شکل ۹

توجه کنید که اگر اسب از خانه‌های سفید واقع در سطر بالایی یا پائینی حرکت کند، در یکی از خانه‌های سفید سطر دوم یا سوم قرار خواهد گرفت. برعکس، در مسیری از نوع مطلوب، اسب لزوماً باید از دو سطر وسطی به‌خانه‌های سفید واقع در دو سطر کناری برود، زیرا در دو سطر کناری دقیقاً n خانه سفید وجود دارد و تنها می‌توان از طریق n خانهٔ سفید واقع در دو سطر وسطی به آن‌ها رسید. بنابراین مسیر یک اسب هیچ‌گاه نمی‌تواند از خانه‌های سفید شروع شده و به‌خانه‌های سیاه ختم شود در نتیجه، چنین مسیر بسته‌ای ناممکن است.

مسأله۳. روی هر یک از خانه‌های یک صفحه شطرنج ۷×۷ یک اسب قرار می‌دهیم. آیا برای هر یک از اسب‌ها امکان دارد که به‌طور همزمان، حرکت مجازی را انجام دهند؟

حل: فرض کنید که صفحه شطرنج با الگوی معمولی شطرنج رنگ‌آمیزی شده باشد. در این صفحه ۴۹ خانه‌ای، فرض کنید ۲۴ خانه سفید و ۲۵ تای آن‌ها سیاه باشند.

۲۵ اسب را که روی خانه‌های سیاه قرار دارند، در نظر بگیرید. اگر هر یک از آن‌ها می‌توانستند حرکت مجازی انجام دهند، همگی به ۲۵ خانه سفید منتقل می‌شدند، ولی تنها ۲۴ خانه سفید وجود دارد. در نتیجه، چنین حرکتی امکان پذیر نیست.

۷ رهیافت تعمیم(گسترش حوزهٔ تحقیق)

مراد از تعمیم یک مسأله، مطالعهٔ آن مسأله در محتوایی وسیع‌تر و گسترده‌تر است. در این روش، ابتدا مسألهٔ مورد نظر از حالت خاص خارج گشته و در گسترهٔ مشمول خود، تعمیم داده می‌شود. سپس با نتیجه‌گیری مسألهٔ تعمیم یافته، حل مسأله مورد نظر هم به‌صورت خاص و هم به‌شکل اولیه خود، به‌شیوه‌ای سهل‌تر، امکان‌پذیر خواهد شد.

البته پاسخ گویان، غالباً چنین می‌اندیشند که اگر محتوای مسأله‌ای کلی‌تر و عمومی‌تر شود، رسیدن به‌پاسخ آن پیچیده‌تر خواهد شد و از این رو استفاده از رهیافت تعمیم را برای حل مسأله بیهوده می‌انگارند.

شاید این امر، نتیجهٔ غفلت ایشان از این مهم است که وقتی مسأله، شکل کلی و عام یافت، نکات مثبتی به‌همراه دارد که عبارتند از:

۱.حذف جزئیات غیرضروری،

۲.کشف روش‌های بدیع توسط حل‌کننده مسأله قرار می‌گیرد تا بتواند آسان‌تر به‌راه‌حل برسد.

خلاصهٔ کلام آن که وقتی مسأله‌ای را تعمیم می‌دهیم، آن مسأله ساده‌تر، مفهومی‌تر و ملموس‌تر خواهد شد.

به‌عنوان نمونه، مسأله‌های زیر مقصود ما را در استفاده از این رهیافت روشن‌تر خواهند کرد.

مسألهٔ ۱. مجموع نخستین n عدد اول را با نماد S_n نمایش می‌دهیم (یعنی $S_1 = 2$، $S_2 = 2 + 3$، $S_3 = 2 + 3 + 5$ و غیره). ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n، یک عدد مربع کامل بین S_n و S_{n+1} وجود دارد.

حل: دنبالهٔ تمام اعداد اول $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ با بعضی از دنباله‌ها خاصیتی مشترک دارد. مانند «تفاضل دو جمله متوالی با شروع از جملهٔ دوم، حداقل ۲ است».

بنابراین، مسأله کلی‌تر زیر را برای پاسخ به‌مسأله در نظر می‌گیریم.

مسأله کلی‌تر. دنبالهٔ $\{a_n\}$ که $a_1 = 2$، $a_2 = 3$ و برای هر $n = 2, 3, 4, \cdots$، $a_{n+1} - a_n \geq 2$ مفروض است، جمع $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ با نماد S_n نمایش می‌دهیم. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n، یک عدد مربع کامل بین S_n و S_{n+1} وجود دارد.

حل مسأله کلی‌تر: فرض کنیم حکم برقرار نباشد، در نتیجه عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که

$$k^2 \leq S_n < S_{n+1} \leq (k+1)^2,$$

از این جا به‌دست می‌آوریم

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \leq (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1.$$

اما طبق فرض برای هر $n \in N$، داریم

$$a_n \leq a_{n+1} - 2$$

از روابط فوق نامساوی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} &a_{n+۱} \leq ۲k + ۱ \\ &a_n \leq ۲k - ۱ \\ &\vdots \\ &a_۳ \leq (۲k + ۱) - ۲(n - ۱) = x. \end{aligned} \tag{۱}$$

این جا x دو حالت می‌تواند داشته باشد $x = ۳$ یا $x > ۳$.
اگر $x = ۳$ آن‌گاه تمام نامساوی‌های (۱) به‌تساوی تبدیل می‌شوند. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{n+۱} &= a_{n+۱} + a_n + \cdots + a_۲ + a_۱ \\ &= (۲k + ۱) + (۲k - ۱) + \cdots + ۳ + ۲ \\ &> (۲k + ۱) + (۲k - ۱) + \cdots + ۳ + ۱ \\ &= (k + ۱)^۲ \end{aligned}$$

یعنی $S_{n+۱} > (k + ۱)^۲$ و این با $S_n \leq (n + ۱)^۲$ تناقض دارد.
اگر $x > ۳$ آن‌گاه $n \geq ۵$ (x فرد است) و تمام نامساوی‌های (۱) به‌نامساوی‌های اکید تبدیل می‌شوند.
پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n+۱} + \cdots + a_۲ + a_۱ \\ &< (۲k - ۱) + (۲k - ۳) + \cdots + ۵ + ۲ \\ &< (۲k - ۱) + (۲k - ۳) + \cdots + ۵ + ۳ + ۱ \\ &= k^۲ \end{aligned}$$

بنابراین، $S_n \geq k^۲$ و این با $S_n \geq k^۲$ در تناقض است و حکم برقرار است. با اثبات این مسأله، مسأله ۱ که حالت خاص آن است نیز ثابت شده است.

مسأله ۲. مجموع $\sum_{k=۱}^{n} \frac{k}{۲^k}$ را بیابید.

حل. برای پاسخ دادن به‌مسأله ۲، می‌توان مسأله‌ای کلی‌تر از آن، «یعنی مجموع $\sum_{k=۱}^{n} kx^k$ پیدا کرد و سپس به‌جای x، عدد $\frac{۱}{۲}$ را قرار داد تا جواب مسأله ۲ به‌دست آید.

حل مسأله کلی‌تر: برای $x \neq ۱$، داریم

$$۱ + x + \cdots + x^n = \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x}$$

با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی اخیر به‌دست می‌آوریم.

$$۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + nx^{n-۱} = \frac{-(n + ۱)x^n + nx^{n+۱} + ۱}{(۱ - x)^۲}$$

دو طرف این تساوی را در x ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^x = \frac{-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + x}{(1-x)^2}$$

حال با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^k = 2(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}})$$

مسأله ۳. اگر بدانیم $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}$ را پیدا کنید.
حل: انتگرال کلی‌تر $I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda x}{x^2}dx$ با $\lambda \geq 0$ را در نظر بگیرید.
از دو طرف تساوی نسبت به λ مشتق می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{2x \sin \lambda x \cos \lambda x}{x^2}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin 2\lambda x}{x}dx \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $t = 2\lambda x$ نتیجه می‌شود: $dt = 2\lambda dx$ و

$$I'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف تساوی اخیر نسبت به λ خواهیم داشت:

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2}\lambda + C \qquad (\text{ثابت است} \quad C),$$

اما $I(0) = 0$ پس $C = 0$، در نتیجه: $I(\lambda) = \frac{\pi}{2}\lambda$ که $\lambda \geq 0$، با قراردادن $\lambda = 1$ نتیجه می‌شود $I(1) = \frac{\pi}{2}$.
مسأله ۳. دترمینان زیر را محاسبه کنید (دترمینان واندرموند):

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم که اگر $i \neq j$ و $a_i \neq a_j$ زیرا در غیر این صورت دترمینان مساوی صفر می‌شود. برای آن که بتوانیم بر فکر اصلی حل مسأله تمرکز روشنتری داشته باشیم، حالت $n = 3$ را در نظر می‌گیریم:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

در این دترمینان، c را به‌جای x می‌گذاریم. در این صورت، دترمینان به‌صورت یک چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ ۲ خواهد بود. همچنین $P(a)=0$ و $P(b)=0$ زیرا دترمینان حاصل از قرار دادن a یا b به‌جای c، دو سطر مساوی دارد. در نتیجه به‌ازای عدد ثابتی چون A، داریم:

$$P(x)=A(x-a)(x-b)$$

در این چندجمله‌ای، A ضریب جملهٔ x^{2} است و با توجه به‌دترمینان، نتیجه می‌گیریم که این ضریب مساوی است با

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

بنابراین $A=b-a$ و دترمینان 3×3 اولیه برابر است با

$$P(x)=(b-a)(c-a)(c-b)$$

حل مسأله در حالت کلی نیز شبیه به همین حالت است. فرض کنید D_n، مقدار دترمینان (از مرتبهٔ n) مورد نظر باشد. در سطر پایینی ماتریس، a_n را به‌جای x می‌گذاریم. دترمینان حاصل به‌شکل یک چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجه $n-1$ درمی‌آید که به‌ازای مقادیر a_1، a_2، ...، a_{n-1} صفر می‌شود. درنتیجه داریم:

$$P_n(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$$

که در آن A عددی ثابت است. همانند قبل، A ضریب جملهٔ x^{n-1} است و اگر دترمینان را نسبت به‌سطر آخر بسط دهیم، معلوم می‌شود که $A=D_{n-1}$، به‌عبارت دیگر

$$D_n=P_n(a_n)=D_{n-1}\left[(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\right]$$

می‌توانیم استدلال را برای D_{n-1} و الی آخر، تکرار کنیم. در نتیجه داریم:

$$D_n=\prod_{k=2}^{n}\Big[\prod_{i=1}^{k-1}(a_k-a_i)\Big].$$

۸ رهیافت حذف حالت‌های نامطلوب

حذف حالت‌های نامطلوب یکی از رهیافت‌های با ارزش برای حل مسأله است. در برخی موارد، بهتر است با توجه به‌شرایط مسأله، بسیاری از حالت‌های نامطلوب را کنار بگذاریم. سپس حالاتی را که به آسانی نمی‌توانیم حذف کنیم، در جدولی نظام‌دار بیاوریم تا بتوانیم با مشاهده روابط بین داده‌ها و حالت‌های مختلف و حذف آن دسته از جواب‌هایی که مطلوب نیستند به‌راه‌حل مناسب برسیم. هم‌چنین، اگر در حین

حل مسأله به‌مانعی برخورده‌ایم، باید سعی کنیم که به‌جای برخورد با آن، تصمیم بگیریم که مانع را دور بزنیم تا به‌هدف مورد نظر خود دست یابیم. این ایده جالب می‌تواند در حل مسایل به‌ما کمک کند. چه بسا مسأله در نگاه اول حل نشدنی یا غیرواقعی به‌نظر برسد، ولی همانگونه که ذکر شد، سازمان دهی داده‌ها از طریق جدول، کمک شایانی برای دستیابی به‌اطلاعات پنهان در داده‌ها و یافتن الگویی برای حل مسأله می‌نماید. اینک چند مثال برای کاربرد این رهیافت حل می‌شود.

مسأله ۱. معادله $x-[x^۲]=۱$ را حل کنید: ($[x]$ جزء صحیح x است)

حل: ابتدا این معادله را به‌صورت $[x^۲]=x-۱$ درمی آوریم.

با توجه به‌طرف راست تساوی که نامنفی است، نتیجه می‌گیریم $x-۱\geq ۰$ و در نتیجه $x\geq ۱$. پس $x<۱$ نمی‌تواند باشد (هر عدد کوچکتر از ۱، یک حالت نامطلوب است). $[x^۲]$ هم یک عدد صحیح است، پس x فقط عدد صحیح بزرگتر یا مساوی یک می‌تواند باشد. یعنی x نمی‌تواند غیرصحیح باشد (هر عدد غیرصحیح یک حالت نامطلوب است)

بنابراین جواب معادله را باید در اعداد طبیعی جستجو کنیم

معادله را به‌صورت $x-x^۲=۱$ یا $x(۱-x)=۱$ می نویسیم. این معادله جواب ندارد، زیرا $x(x-۱)$ زوج است.

مسأله ۲. دانشجویی به‌خانواده‌اش، تلگرافی به‌صورت زیر فرستاده است:

$$SEND+MORE=MONEY$$

این تلگراف را دو عدد چهار رقمی $SEND$ و $MORE$ تصور کنید که مجموعشان $MONEY$ است. هر حرف به‌معنای یک رقم است. این ارقام را پیدا کنید؟

حل: در تلگراف فوق، $S+M$ یا $S+M+۱$ عدد دو رقمی MO است، می‌دانیم S و M از ۹ بزرگتر نیستند. در نتیجه، رقم اول MO، $M=۱$ است. هم‌چنین، چون $S+۱$ یا $S+۲$ یک عدد دو رقمی است، پس $S=۸$ ، $S=۹$.

حال نشان می‌دهیم که S نمی‌تواند ۸ باشد. چون اگر $S=۸$، آن‌گاه باید از ستون صدها یک واحد به‌ستون هزارها اضافه شود تا این که $S+M+۱=۸+۱+۱=۱۰$ عدد دو رقمی شود.

حرف O هم باید صفر باشد و در نتیجه، تلگراف فوق به‌صورت زیر درمی آید:

$$۸END+۱۰RE=۱۰NEY$$

از بررسی ستون صدها دیده می‌شود که از ستون ده‌ها باید یک واحد به‌ستون صدها اضافه شود (وگرنه $E+O=E$ و نه N). چون $E\leq ۹$ و عدد $E+O+۱$ باید دو رقمی باشد، در نتیجه $E+O+۱=۱۰$ پس $N=۰$. اما قبلاً $O=۰$ به‌دست آمده است، بنابراین، $S\neq ۸$ است.

نتیجه می‌گیریم که $S=۹$ و تلگراف به‌صورت $۹END+۱۰RE=۱۰NEY$ درمی آید. از ستون صدها به $N=E+۱$ می‌رسیم و تلگراف به‌صورت زیر در می آید.

$$۹E\ E+۱D+۱۰RE=۱۰E+۱\ Ey$$

از مجموع ستون ده‌ها نتیجه می‌شود که

$$E + ۱ + R = ۱۰ + E \text{ یا } E + +R+ = ۱۰ + E$$

از رابطه سمت چپ، $R + ۹$ به‌دست می‌آید که با $S = ۹$ تناقض دارد. پس بنابر رابطهٔ سمت راست، $R = ۸$ و تلگراف به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۹E\ E + ۱D + ۱۰۸E = ۱۰E + ۱\ EY$$

از طرفی داریم، $D + E = ۱۰ + Y$.
برای سه حرف D، E و Y فقط رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ٦ و ۷ باقی مانده است. پس $D + E$ از ۱۳ بزرگتر نیست و Y یا ۲ یا ۳ است اما $Y \neq ۳$ زیرا اگر $Y = ۳$ آن‌گاه $D + E = ۱۳$. پس $E = ۷$ یا $E = ٦$. از $E = ۷$ نتیجه می‌شود $R = ۸ = ۱ + E$ که با $N \neq R$ در تناقض است و اگر $E = ٦$، آن‌گاه $D = ۷ = ۱ + N = E$ که باز یک تناقض است.
پس $Y = ۲$ و $D + Y = ۱۲$ از بین اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ٦ و ۷ تنها مجموع دو عدد ۷ و ۵ دوازده است، اما $E \neq ۷$، پس $D = ۷$ و $E = ۵$ و جواب مسأله بدین صورت است

$$۹۵٦۷ + ۱۰۸۵ = ۱۰٦۵۲.$$

۹ رهیافت الگویابی

تصور کنید از شهری یک نقشه در اختیار دارید. واضح است که به آن نقشه، به‌راحتی می‌توان تمام معابر سطح شهر را بررسی و در مورد بهترین شیوهٔ شبکه‌بندی و حفر کانال برای موارد مختلف تصمیم گیری نمود.
بنابراین، نقشه‌ها و ماکت‌ها، الگوهای مناسبی هستند که ما را برای رسیدن به‌اهداف مختلف یاری می‌نمایند. الگوها می‌توانند در کشف حقایق ما را راهنمایی کنند. کشف یک الگو بین اجزای یک مسأله، به‌مسأله حل کن در حل مسأله، کمک خواهد کرد. به‌طور نمونه، کشف یک الگوی مناسب در جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برای دانش‌آموز خردسالی که بعدها از بزرگترین نوابغ ریاضی شد این امکان را فراهم نمود تا وی به‌راحتی مجموع اعداد فوق را به‌دست آورد. این دانشمند بزرگ کارل فریدریش گاوس بود.
روزی آموزگار سر کلاس برای مشغول کردن دانش‌آموزان به‌آن‌ها گفت مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ را پیدا کنند، چند دقیقه بعد آموزگار ملاحظه کرد که گاوس ساکت نشسته است و متوجه شد که وی بلافاصله جواب را پیدا کرده است که برای معلم باور کردنی نبود. گاوس احتمالاً دنبال یک الگو گشته بود و با توجه به‌این که $۱۰۱ = ۱۰۰ + ۱$، $۱۰۱ = ۹۹ + ۲$ و $۱۰۱ = ۹۸ + ۳$ و $۱۰۱ = ۵۱ + ۵۰$،

الگوی زیر را یافته بود

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۵۰ + ۵۱ + \cdots + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

بنابراین، گاوس نقشه خود را به‌این صورت اجرا نمود که ۵۰ جفت عدد داریم که مجموع هر جفت آن ۱۰۱ می‌باشد. پس مجموع مورد نظر ۱۰۱×۵۰ یا ۵۰۵۰ است.

نگاه آگاهانه و عمیق برای یافتن الگوها مهارتی است مهم که داشتن آن برای حل مسأله و به‌طور کلی مطالعه هستی ضرورت دارد. توانایی الگویابی موجب می‌شود که مسایل به‌حد الگوها تنزل یابند تا بتوانیم با استفاده از الگوها، به‌حل آن مسایل نایل شویم.

اهمیت مطالعهٔ الگوها به‌حدی است که ریاضیات را علم الگوها نیز نامیده‌اند. الگوها در همه جا حضور دارند. در زندگی روزانه به‌هزاران الگو ممکن است برخورد کنیم.

طراحی صنعتی، رفت و آمد وسایل نقلیه، برنامه‌های تلویزیونی، سنگ فرش خیابان و منازل و پارک‌ها، طراحی‌های هنری و معماری و ... نشانه‌هایی از وجود الگوها در زندگی روزانه هستند. نگاه آگاهانه و دقیق برای یافتن الگوها در زمینه‌های مختلف، عامل موفقیت افراد بزرگ است. معمولاً کلید اصلی یافت یک الگو، سازماندهی و تنظیم داده‌ها در مسأله است.

بنابراین، می‌توان الگویابی را به‌عنوان یکی از رهیافت‌های کارآمد در حل مسایل ریاضی مطرح نمود. ناگفته نماند که استفاده از سایر رهیافت‌های می‌تواند ما را در یافتن یک الگوی مناسب یاری کند. معمولاً پس از آن که یک الگو شناخته شده و قانون آن مشخص شد، با استفاده از نمادهای ریاضی، قانون الگو را به‌صورت عبارت‌های ریاضی می‌نویسیم. این کار به‌ما امکان می‌دهد که مسایل واقعی را به‌کمک ریاضی حل کنیم.

جستجوی الگو: در واقع، همه حل کنندگان مسأله، کار حل مسأله را با متقاعد ساختن خود از موجه بودن حکم مسأله و توانایی حل آن آغاز می‌کنند و آزمودن چند حالت خاص، یکی از بهترین راه‌های رسیدن به‌این مقصود است. هنگامی که این کشف به‌روشی قانونمند صورت گیرد، احتمالاً الگوهایی ظاهر می‌شوند که ایده‌هایی را جهت پیشبرد حل مسأله ارائه می‌دهند. حال شما هم ببینید به‌کمک رهیافت الگویابی، چگونه می‌توان مسایل زیر را حل کرد.

مسأله ۱. ثابت کنید مجموعه‌ای با n عضو (متفاوت)، دقیقاً ۲^n زیرمجموعه (متفاوت) دارد. ممکن است وقتی مسأله به‌این شکل آمرانه مطرح می‌شود، شخص تازه‌کار دچار هراس شود و نداند آن را چگونه حل کند. ولی فرض کنید که مسأله به‌شکل سوألی مطرح شود مثلاً:

الف) از یک مجموعه n عضوی، چند زیرمجموعه ساخته می‌شود؟

ب) این حکم را ثابت یا رد کنید: یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.

در هر دو شکل فوق، به‌طور ضمنی پیشنهاد بررسی چند حالت خاص مطرح می‌شود. برخورد با هر مسأله باید چنین باشد که «همواره نسبت به‌حکم مسأله تردید داشته باشید تا وقتی متقاعد شوید»

حل: ابتدا بینیم وقتی مجموعه ۰، ۱، ۲، یا ۳ عضو داشته باشد، چه روی می‌دهد.
نتیجه‌ها در جدول زیر آمده‌اند.

تعداد عضوها		تعداد زیر مجموعه‌ها
۰	$\varnothing$	۱
۱	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$	۴
۲	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$	۶
۳	$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	۴
۴	$\{a, b, c, d\}$	۱

جدول ۱

هدف از ساختن این جدول نه تنها تحقیق درباره حکم است، بلکه جستجو به‌دنبال الگوهایی است که احتمالاً نشان می‌دهند در حالت کلی، از چه راهی وارد حل مسأله شویم.
لذا می‌کوشیم که تا حد امکان، نظام وار عمل کنیم. در این حالت، توجه کنید که وقتی $n = ۳$، ابتدا زیرمجموعه‌های $\{x_{۱}, x_{۲}\}$ را فهرست کردیم و سپس به‌هر یک از زیرمجموعه‌های حاصل $x_{۳}$ را افزودیم. این ایده کلیدی، امکان می‌دهد که بتوانیم کار را برای مقادیر بالاتر n نیز ادامه می‌دهیم. برای مثال، وقتی $n = ۴$، زیرمجموعه‌های $S = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\}$ عبارتند از ۸ زیرمجموعهٔ $\{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\}$ (که در جدول بالا نشان داده شده است)، به‌همراه ۸ تای دیگر که از افزودن $x_{۴}$ به‌هر یک از زیرمجموعه‌های قبلی به‌دست می‌آید. این ۱۶ حالت تمامی حالت‌های ممکن را در بر می‌گیرد و لذا، مجموعه‌ای با ۴ عضو، $۱۶ = ۲^{۴}$ زیرمجموعه دارد. برهانی بر اساس این ایده، کاربرد ساده‌ای از استقرای ریاضی است.

حل مسأله به روش دیگر:

روش نظام وار دیگری در جدول ۲ آمده است که در آن، زیرمجموعه‌های $S = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\}$ فهرست شده‌اند.

زیرمجموعه	سه‌تایی	عدد در مبنای۲	عدد اعشاری
$\varnothing$	$(۰, ۰, ۰)$	۰	۰
$\{x_{۳}\}$	$(۰, ۰, ۱)$	۱	۱
$\{x_{۲}\}$	$(۰, ۱, ۰)$	۱۰	۲
$\{x_{۲}, x_{۳}\}$	$(۰, ۱, ۱)$	۱۱	۳
$\{x_{۱}\}$	$(۱, ۰, ۰)$	۱۰۰	۴
$\{x_{۱}, x_{۳}\}$	$(۱, ۰, ۱)$	۱۰۱	۵
$\{x_{۱}, x_{۲}\}$	$(۱, ۱, ۰)$	۱۱۰	۶
$\{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\}$	$(۱, ۱, ۱)$	۱۱۱	۷

جدول ۲

برای درک این الگو، به‌تناظر بین اندیس‌های آخر ستون طرف چپ و ۱ های موجود در سه‌تائی‌های ستون درجه دوم توجه کنید. به‌خصوص اگر A، زیرمجموعه‌ای از $S = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\}$ باشد، a_i را به‌ازای

$i = ۱, ۲, \cdots, n$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:
دیده می‌شود زیرمجموعه‌ای چون A از S را می‌توانیم با n تایی $(a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ که از صفرها و ۱ها تشکیل شده است، مشخص کنیم. برعکس، هر n تائی به‌شکل فوق با زیرمجموعهٔ منحصر به‌فردی از S متناظر است. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های S با تعداد n تایی‌های متشکل از صفر و یک برابر است.
دیده می‌شود که مجموعهٔ اخیر با مجموعهٔ‌های نامنفی کوچکتر از ۲^n که در مبنای ۲ نوشته شده باشند در تناظر یک به‌یک است. پس هر عدد صحیح نامنفی کوچکتر از ۲^n دقیقاً با یکی از زیرمجموعه‌های S متناظر است و برعکس. در نتیجه، S باید ۲^n زیرمجموعه داشته باشد.
به‌طور معمول برای هر مثال، تنها یک راه حل ارائه می‌کنیم— راه حلی که برای روشن کردن ایدهٔ راهیابی موردنظر، مناسب باشد. ولی در این مثال، می‌خواستیم تذکر دهیم که معمولاً یک مسأله را به‌الگوهایی گوناگون می‌توان تبدیل و سپس حل کرد. درسی که از این مسأله می‌گیریم این است که باید در گام‌های اولیه کاوش دربارهٔ حل یک مسأله، انعطاف‌پذیر بود.
اگر به‌نظر رسید که یک راه‌حل مسأله به‌نتیجه نمی‌رسد، ناامید نشوید، بلکه به‌دنبال راه تازه‌ای بگردید و تا فرصت اندیشیدن به‌طور گسترده را دربارهٔ راه‌های گوناگون پیدا نکرده‌اید، هرگز خود را به‌یک راه‌حل مشخص مقید نکنید.
مسأله ۲. فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشند $(a_i \neq ۰)$ که در تساوی

$$x_n = \frac{x_{n-۲}x_{n-۱}}{۲x_{n-۲} - x_{n-۱}} \quad n = ۳, ۴, ۵, \cdots$$

صدق می‌کند. یک شرط لازم و کافی براساس $x_۱$ و $x_۲$ بنویسید که به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقدارهای n، x_n عدد صحیح باشد.
حل: برای به‌دست آوردن دیدگاهی از این دنباله، ابتدا چند جمله اول آن را محاسبه و آنها را برحسب $x_۱$ و $x_۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_۳ = \frac{x_۱ \times x_۲}{۲x_۱ - x_۲}, \quad x_۴ = \frac{x_۲ \cdot x_۳}{۲x_۲ - x_۳} = \frac{x_۱x_۲}{۳x_۱ - ۲x_۲}$$

بدین ترتیب، می‌توانیم $x_۵$ را به‌دست آوریم (برحسب $x_۱$ و $x_۲$):

$$x_۵ = \frac{x_۱x_۲}{۴x_۱ - ۳x_۲}.$$

خوشبختانه در این مثال خاص، می‌توان محاسبه‌ها را به‌راحتی انجام داد و از آن الگویی به‌دست آورد. با استقرایی ساده نتیجه می‌گیریم $x_n = \frac{x_۱x_۲}{(n-۱)x_۱-(n-۲)x_۲}$ که با جدا کردن ضریب n به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x_n = \frac{x_۱x_۲}{-n \times (x_۲ - x_۱) + (۲x_۲ - x_۱)}$$

در این حالت، می‌بینیم که اگر $x_۲ \neq x_۱$ باشد، در نهایت، اندازه مخرج از صورت فاصله بیشتری می‌گیرد و لذا، x_n عددی صحیح نخواهد بود. ولی اگر $x_۲ = x_۱$، آن‌گاه تمام جملات دنباله با هم مساوی

می‌شوند. در نتیجه، x_n به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n صحیح است، اگر و فقط اگر $x_1 = x_2$ باشد.

مسأله۳. عددهای صحیح و مثبت $n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ را طوری بیابید که
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1000$ و حاصلضرب $a_1 a_2 \cdots a_n$ تا حد ممکن بزرگ باشد.

حل: هنگامی که وجود یک پارامتر در مسأله موجب پیچیدگی تحلیل آن می‌گردد، غالباً بهتر است که در مرحله کشف راه‌حل مسأله، آن را موقتاً با عبارتی جایگزین کرد که ساده‌تر مورد بررسی قرار گیرد. در مسألهٔ حاضر، می‌توانیم دنباله‌ای از حالت‌های خاص را آزمایش کنیم که با قراردادن $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots$ به‌جای ۱۰۰۰ به‌دست می‌آیند.

به‌این ترتیب، درمی‌یابیم که در یک حاصلضرب ماکزیمم

۱) هیچ a_i بیشتر از ۴ نیست.

۲) هیچ a_iای مساوی ۱ نیست.

۳) می‌توان همه a_iها را مساوی ۲ یا ۳ گرفت (زیرا $2 + 2 = 4$ و $2 \times 2 = 4$).

۴) حداکثر ۲ تا از a_iها مساوی ۲ هستند (زیرا $3 \times 3 < 2 \times 2 \times 2$ و $3 + 3 = 2 + 2 + 2$).

هر یک از این‌ها به‌سادگی ثابت می‌شوند. لذا وقتی که مانند مسأله فعلی، پارامتر مساوی ۱۰۰۰ است، مقدار ماکزیمم حاصلضرب باید مساوی $2^2 \times 3^{332}$ باشد.

۱۰ رهیافت حدس و آزمایش

این رهیافت، ابزار مفیدی است که به‌چگونگی استفاده از آن بستگی دارد. این رهیافت، در فهمیدن مسأله یا حل مسأله، به‌ما کمک می‌کند و به‌طور شگفت انگیزی نقطه‌ی شروع حل مسأله را به‌ما نشان می‌دهد. با استفاده از این رهیافت، گاهی خیلی سریع به‌جواب می‌رسیم و گاهی ممکن است به‌نتیجهٔ امیدوارکننده نرسیم. در این صورت، باید بدون دلسردی، در انتخاب حدس‌های بعدی هوشمندانه‌تر و منظم‌تر و بهتر عمل نماییم. گاهی ماهیت مسأله چنان است که با حدس و آزمایش نمی‌توان جواب درستی به‌دست آورد، ولی می‌توان تقریب و تخمین خوبی برای جواب فراهم نمود.

خوب است که برای به‌کارگیری این رهیافت، نکات زیر را همواره به‌خاطر داشته باشیم:

۱) حدسی بسازید و با آن، حل مسأله را شروع کنید و در مورد آن، نکات بیشتری بیاموزید.

۲) حدس خود را به‌آزمایش بگذارید و آن را ارزیابی کنید.

۳) اگر حدس شما مؤثر و کارآمد نبود بار دیگر حدس بهتری بسازید.

مسأله۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$، $a_0 = 2 \;,\; a_1 = 3$، پیدا کنید.

حل: چند جمله‌ی اول این دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_0 = 2 \;,\; a_1 = 3 \;,\; a_2 = 5 \;,\; a_3 = 9 \;,\; a_4 = 17$$

حال با اندکی دقت، روشن می‌شود که هر جمله‌ی دنباله، یک واحد از توان عدد ۲ بزرگتر است، یعنی:

$$a_0 = 2^0 + 1,\ \ a_1 = 2^1 + 1,\ \ a_2 = 2^2 + 1,\ \ a_3 = 2^3 + 1,\ \ a_4 = 2^4 + 1, \cdots$$

بنابراین، حدس می‌زنیم $a_n^{7} = 2^n + 1$
این حدس، جواب مسأله است زیرا در رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ صدق می‌کند.
مسأله ۲. n دایره روی صفحه‌ای رسم شده اند به‌نحوی که هر دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند ولی هیچ سه دایره‌ای نقطه‌ی مشترک ندارند. این دایره‌ها صفحه را به‌چند بخش مختلف تقسیم می‌کنند؟
حل: فرض کنیم $F(n)$ تعداد بخش‌هایی است که n دایره در صفحه به‌وجود می آورند. به‌ازای n مساوی ۱، ۲و۳ داریم:

$$F(1) = 2 \quad , \quad F(2) = 4 \qquad F(3) = 8$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که:

$$F(1) = 2^1,\ \ F(2) = 2^2,\ \ F(3) = 2^3$$

در نتیجه، حدس می‌زنیم $F(n) = 2^n$. حال درستی این حدس را بررسی می‌کنیم. با رسم شکل مناسب مشاهده می‌شود که تعداد بخش‌هایی که چهار دایره‌ی مفروض ایجاد می‌کنند، ۱۴ است و این با حدس $F(4) = 16$ در تناقض است، یعنی این حدس درست نیست. اکنون حدس دیگری می‌زنیم. مقادیر $F(1), F(2), F(3), F(4)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$F(1) = 1(1-1)+2 \ \ , \ \ F(2) = 2(2-1)+2 \ \ , \ \ F(3) = 3(3-1) \ \ , \ \ F(4) = 4(4-1)+2$$

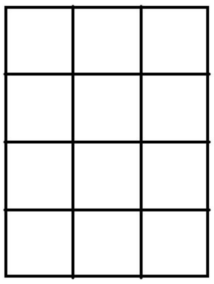
این بار حدس می‌زنیم $F(n) = n(n-1)+2$. این حدس را می‌توان به‌کمک استقرای ریاضی ثابت کرد.

۱۱ رهیافت بهره‌برداری از مسأله‌های مشابه ساده‌تر

اگر احساس می‌کنید مسأله سخت است، سعی کنید آن را به‌مسأله‌ای ساده‌تر تبدیل کنید. برای تبدیل یک مسأله سخت به‌مسألۀ ساده‌تر، راه‌های گوناگونی وجود دارد، البته مسأله ساده‌تری که به‌مسأله اصلی مربوط باشد و بتوان آن را حل کرد. فرض کنید مسأله‌ای پیش روی شماست که راه‌حل آن را نمی‌دانید. پرسش‌های زیر را برابر خود قرار دهید و تلاش کنید پاسخ آن‌ها را پیدا کنید.
آیا این مسأله حالت یا حالت‌های خاصی دارد؟
آیا مسأله ساده‌تری که با این مسأله شباهت داشته باشد به‌یادتان می آید؟ آیا می‌توانید با رسم شکل‌های مختلف یا با آزمایش عددهای مختلف، مسأله را عینی‌تر و ملموس‌تر کنید؟ چنین پرسش‌هایی می‌تواند شما را با مسأله آشناتر کند و به‌غیر از آن، مسأله‌های دیگری در مقابل شما قرار گیرد که از مسأله‌اصلی

ساده‌تر و احتمال حل آن‌ها بیشتر است. بعد اگر این مسأله یا مسأله‌های ساده‌تر را حل کردید، از خود بپرسید که آیا می‌توان از همین راه حل یا راه‌حلی شبیه آن، مسأله اصلی را حل کرد؟ در راه‌حل مسألهٔ ساده‌تر چه تغییری بدهیم تا بتواند برای حل مسئله‌ها مفید باشد؟ و نظایر آن.
الکساندر خین‌چین (۱۸۹۴–۱۹۵۹) ریاضیدان بزرگ، مربی برجسته و عضو فرهنگستان اتحاد شوروی سابق، در زمینه تابع‌های با متغیر حقیقی، تابع‌های اندازه‌پذیر، تعمیم مفهوم دیفرانسیل و انتگرال و نظریه متری عددها، موفقیت‌های چشمگیری به‌دست آورد، ولی شهرت اصلی او به‌خاطر پایه گذاشتن نظریهٔ تازه احتمال بود. وی در یکی از مقالات خود با عنوان «نقش تربیتی در درس‌های ریاضی» می‌نویسد:
نتیجه‌گیری از راه شباهت چه در دانش تجربی و چه در زندگی عادی، روش معمولی و قانونی برای کشف قانونمندی‌های تازه است. اگر فرض کنیم طبیعت شناسی متوجه شود همه‌گونه‌هایی که دارای شاخه‌های A و B هستند و تاکنون به آن‌ها برخورده‌اند، در ضمن دارای نشانه C هم هستند، آن‌وقت اگر گونهٔ تازه‌ای را پیدا کند که نشانه‌های A و B در آن باشد، به‌طور طبیعی نتیجه می‌گیرد این گونه تازه هم دارای نشانه C است. این گونهٔ نتیجه‌گیری از راه شباهت، موقعی قانع کننده‌تر است که علاوه بر آزمایش، نوعی ملاحظهٔ نظری هم در این باره وجود داشته باشد که همراهی C با A و B تصادفی نیست و زمینه‌ای در خود این نشانه‌ها یا در جای دیگری دارد(و اغلب می‌توان چنین ملاحظه نظری را پیدا کرد). تنها در ریاضیات است که بر ضرورت این امر تاکید می‌شود که
این ملاحظه نظری را باید تا آخر و به‌طور کامل، ثابت کرد.
باید با دقت کامل ثابت کنیم که وجود نشانه‌های A و B، همیشه به‌معنای وجود نشانه C است، و اگر نتوانیم چنین اثباتی را پیدا کنیم، حق نداریم از روی نشانه‌های A و B، وجود نشانه C را نتیجه بگیریم. ولی در حالت اول (یعنی وقتی این قضیه ثابت شود که « C نتیجه‌ای است از B, A ») کاربرد سادهٔ این قضیه را دیگر نمی‌توان نتیجه‌گیری از راه شباهت نامید.
بنابراین، می‌توان گفت که در ریاضی، نتیجه گیری کلی از راه شباهت، منع شده است (و این، البته به‌هیچ وجه به‌معنای بی‌اعتباری نتیجه‌های بزرگی که از راه تجربه به‌دست آمده‌اند نیست.) در حالی که در دانش‌های تجربی و فعالیت‌های علمی، نتیجه‌گیری از راه شباهت نقشی عظیم دارد و یک از عمده‌ترین و اساسی‌ترین روش‌ها برای پیدا کردن قانون‌مندی‌های تازه است.
پس دوباره، در برابر پرسش جدیدی قرار می‌گیریم: در این رابطه چه می‌توان کرد تا درس‌های ریاضی برای فرهنگ عمومی و ارتقای نحوهٔ تفکر، نقشی تربیت کننده داشته باشد؟ پاسخ روشن است: تربیت ریاضی ذهن و خو گرفتن به‌این موضوع که نتیجه‌گیری بر پایه شباهت تنها می‌تواند در خدمت روش‌های آزمایشی باشد و به‌خودی خود، هیچ‌گونه نیروی استدلالی ندارد، به‌ناچار آدمی را وامی‌دارد تا در همهٔ زمینه‌های دیگر اندیشه هم، با احتیاط بیشتر با این گونه استنباط‌ها رو به‌رو شود و به‌یاد آورد که در هیچ حالتی، نمی‌توان بدون دقت کافی و بدون پیدا کردن نشانه‌های اساسی دیگر، تنها بر اساس شباهت داوری کرد. هر کدام از ما، این ویژگی اندیشه ریاضی را آزمایش کرده‌ایم و دریافته‌ایم که این تأثیر، چگونه موجب ارتقای فرهنگ اندیشه ریاضی ما شده است.
برخوردی انتقادی با نتیجه‌گیری‌هایی که بر اساس شباهت به‌دست می‌آیند، یکی از بهترین و مهمترین

نشانه‌ها برای تشخیص اندیشه پختهٔ علمی از اندیشه سطحی و ساده‌لوحانه است و دانش ریاضی، از بهترین امکان‌ها، برای تربیت اندیشه ابتدایی و تکامل آن به‌سمت اندیشه علمی و دوراندیشانه است.
اگر بخواهیم توصیه‌های خین‌چین را در نظر داشته باشیم، باید به‌یک نکته اساسی توجه کنیم که در مسأله‌های ریاضی، شباهت می‌تواند وسیله و راهنمای ما برای کشف‌های تازه یا احتمال وجود یک ویژگی در یک شکل باشد. ولی نمی‌تواند جانشین استدلال شود. در ریاضی، برای پذیرفتن یک ویژگی یا یک قاعده، باید وجود و درستی آن، با استدلال استنتاجی اثبات شود.
به‌هر حال، «شباهت» یکی از انگیزه‌هایی است که می‌تواند ذهن جستجوگر را در جهت‌های گوناگون، به‌اندیشه وادارد و موجبی برای کشف‌های تازه و روش‌های ساده‌تر باشد. یوهان‌کپلر می‌گوید: «من بیش از هر چیز، به‌شباهت‌ها که بهترین معلمان من بوده‌اند، ارج می‌گذارم. آنها، به‌همه رازهای طبیعت آگاهی دارند و به‌ویژه در هندسه، نباید به‌آن‌ها بی‌اعتنا بود ...»
یک راه ساده برای ساختن مسأله‌ای آسانتر، این است که اعداد کوچک‌تر و ساده‌تر را جایگزین اعداد بزرگتر کنیم و مسأله را با اعداد کوچکتر حل کنیم، یا این که به‌جای حل کردن مسأله در حالت کلی، چند حالت و مثال خاص را در مورد آن بررسی کنیم و به‌دنبال نشانه یا الگویی برای حل مسأله اصلی بگردیم.
در اینجا، روش‌هایی را با چند مثال مناسب، ارائه می‌کنیم. قبل از آن باید توجه داشته باشیم که رهیافت مسأله ساده‌تر و مرتبط شبیه راهبرد حدس و آزمایش است. در رهیافت حدس و آزمایش می‌کوشیم یک عدد را حدس بزنیم و ببینیم آیا کار می‌کند یا خیر؟
در رهیافت مسألهٔ ساده‌تر و مرتبط نیز تلاش می‌کنیم تا یک فرآیند حل مسأله را در حالتی خاص یا ساده‌تر پیدا کنیم و برای حل مسأله اصلی به‌کار ببریم.
بالاخره برای استفاده از این رهیافت، توجه به‌موارد زیر مفید است:
۱) اگر مسأله متغیرهای بیشتری داشته باشد و آن قدر گیج کننده باشد که نتوان به‌راحتی به‌آن پرداخت، مسأله مشابهی با متغیرهای کمتری را طرح کرده و حل کنید.
۲) اگر مسأله‌ای با پارامتر صحیح n داده شده باشد، برای مقادیر کوچک n، حالات خاص را محاسبه کنید و در جستجوی یک الگو باشید.
با توجه به‌موارد فوق، شما می‌توانید
الف) راه‌حلی برای مسألهٔ پیچیده که از آن به‌وجود آمده است بیاورید.
ب) نتیجه مسأله مشابه را بگیرید و با آن کار کنید.
مسأله ۱. در یک مستطیل مشبک $n \times m$، چند مستطیل وجود دارد؟
حل: برای حل این مسأله به‌طرح مسأله‌ای ساده‌تر اما مرتبط با مسأله اصلی می‌پردازیم. پس ابتدا، تعداد مستطیل‌های یک مستطیل مشبک ۳×۴ راست با کمک گرفتن از شکل ۱۰ و تنظیم جدول ۳، به‌دست می‌آوریم و سعی می‌کنیم الگویی برای حل مسأله پیدا کنیم نتایج شمارش در جدول آمده است.



شکل ۱۰

با توجه به‌جدول ۳، می‌توان تعداد کل مستطیل‌های موجود در این مستطیل مشبک ۳×۴ را پیدا کرد.

$$\begin{aligned} (۳+۲+۱)+(۶+۴+۲)+(۹+۶+۳)+(۱۲+۸+۴) &= \text{تعداد مستطیل‌ها} \\ &= ۴(۱+۲+۳)+۳(۱+۲+۳)+۲(۱+۲+۳)+(۱+۲+۳) \\ &= (۱+۲+۳)(۴+۳+۲+۱) = \frac{۳\times۴}{۲}\times\frac{۴\times۵}{۲} = ۶۰ \end{aligned}$$

که به‌الگوی جالبی دست یافته‌ایم!
با بررسی شبکه‌های ۵×۴ و ۳×۵ و شمارش تعداد مستطیل‌های موجود در آن‌ها، می‌توان الگوی کلی تعداد مستطیل‌های یک شبکه $n \times m$ را به‌صورت زیر مشاهده کرد

$$(۱+۲+۳+\cdots+n)(۱+۲+۳+۴+\cdots+m) = \tfrac{n(n+۱)}{۲}\times\tfrac{m(m+۱)}{۲}$$

سپس، به‌کمک قواعدی که در آنالیز ترکیبی داریم:

$$C(n+۱,۲)\times C(m+۱,۲) = \tbinom{n+۱}{۲}\times\tbinom{m+۱}{۲} = n\times m \text{ تعداد مستطیل‌های یک شبکه}$$

تغییر این رابطه این است که در هر شبکه $n \times m$، $n+۱$ خط افقی و $m+۱$ خط عمودی وجود دارد و هر انتخابی از دو خط افقی و دو خط عمودی، یک مستطیل را مشخص می‌کند بنابراین، تعداد مستطیل‌ها در یک شبکه $n \times m$، برابر $\binom{n+۱}{۲}\times\binom{m+۱}{۲}$ است.

مسأله ۲. بیشترین تعداد ناحیه‌هایی را که به‌وسیله ۵ وتر در دایره ایجاد می‌شود، بیابید و مسأله را تعمیم دهید.

حل: با بررسی چند حالت، مشاهده می‌کنیم که بیشترین تعداد نواحی وقتی ایجاد می‌شود که هیچ سه وتری یکدیگر را در یک نقطه درون دایره قطع نکنند. لذا از حالت‌های ساده‌تر شروع می‌کنیم و با اضافه کردن تعداد وترها مشروط بر این که هیچ سه‌تای آن‌ها یکدیگر را درون دایره قطع نکنند تعداد نواحی را می‌شماریم و یافته‌های خود را در جدولی تنظیم می‌کنیم.

هر چه تعداد وترها بیشتر شود، رسم شکل مطلوب و شمردن تعداد نواحی دشوارتر است.
لذا برای تعمیم مسأله، باید دنبال الگویی در دنباله اعداد جدول صفحه قبل باشیم.
با ملاحظه دنباله اعداد سطر دوم جدول یعنی $2, 4, 7, 11, 16, \cdots$، ممکن است الگوهای متفاوتی به‌ذهن برسد شما چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟
همان طور که در جدول صفحه قبل بالا مشاهده می‌شود، هر جملهٔ دنباله با افزودن یک واحد به‌جملهٔ نظیر آن در دنباله مثلثی ساخته می‌شود. قانون دنباله اعداد مثلثی به‌قرار زیر است:

$\frac{n^2+n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 =$ بیشترین تعداد نواحی ایجاد شده توسط n وتر

مسأله۳. فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای به‌صورت زیر باشند:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

اگر a_n و a_0 مخالف صفر باشند، چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد؟ سعی کنید پاسخ خود را اثبات کنید:
(توجه به‌این نکته داریم که عدد x_0 را ریشه چندجمله $P(x)$ گوییم هرگاه $P(x_0) = 0$ باشد.)

حل: برای حل مسأله‌هائی از این نوع، شاید بهترین کار این باشد که چند مثال ساده روی بیاوریم و امیدوار باشیم که سرنخی پیدا کنیم. به‌عبارت دیگر، مسأله را به‌مسأله ساده‌تر تبدیل کنیم که به‌مسأله اصلی مربوط است و به‌جای حل مسأله در حالت کلی، چند حالت و مثال خاص را در مورد آن بررسی کنیم و به‌دنبال نشانه یا الگویی برای حل مسأله اصلی بگردیم. برای این کار، دو چندجمله‌ای $P(x) = ax + b$ و $Q(x) = bx + a$ را در نظر می‌گیریم ($a \neq 0, b \neq 0$). ملاحظه می‌شود که ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ به‌ترتیب $-\frac{b}{a}, -\frac{a}{b}$ یعنی عکس یکدیگرند.
در اینجا سعی می‌کنیم توجه خود را به‌چند مثال عددی معطوف کنیم. برای این کار، بهتر است به‌چندجمله‌ای درجه دومی توجه کنیم که به‌راحتی به‌حاصلضرب دو چندجمله‌ای درجه اول تجزیه می‌شوند. مثلاً فرض کنیم $P(x) = x^2 - x - 12$. در این صورت $P(x) = (x-4)(x+3)$ بنابراین ریشه‌های چندجملهٔ $P(x)$ عبارتند از ۴ و ۳−. توجه داریم که $Q(x) = -12x^2 - x + 1$ و در نتیجه، $Q(x) = -((4x-1)(3x+1))$. بنابراین، ریشه‌های $Q(x)$ عبارتند از $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{3}$. مشاهده می‌کنید که ریشه‌های این دو سه‌جملهٔ درجه دوم باشند و ($a \neq 0 \neq c$) و $x_0 \neq 0$ یک ریشه $P(x)$ باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{1}{x_0}$ یک ریشه چندجملهٔ $Q(x)$ است؟
اگر بتوانیم این حدس خود را اثبات کنیم، شاید الگویی یا روشی برای تعمیم حدس خود پیدا نماییم و بتوانیم مسأله را در حالت کلی ثابت کنیم.
اگر x_0 ریشه $P(x)$ باشد، آن‌گاه: $P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = 0$
و باید نشان دهیم $Q(\frac{1}{x_0}) = 0$ داریم:

$$Q(\tfrac{1}{x_0}) = c(\tfrac{1}{x_0})^2 + b(\tfrac{1}{x_0}) + a = = \frac{c}{x_0^2} + \frac{b}{x_0} + a = \frac{1}{x_0^2}(c + bx_0 + ax_0^2) = \frac{1}{x_0^2} \times 0 = 0$$

در نتیجه، می‌توان گفت که در حالت کلی، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجه دوم $P(x)$ و $Q(x)$ عکس یکدیگرند. پس به‌نکتهٔ جالبی رسیدیم و ظاهراً، با به‌کاربردن فرآیند حل این مسأله در مورد چندجمله‌ای‌های درجه دوم، می‌توانیم مسأله اصلی را نیز حل کنیم. فرض کنیم $r \neq 0$ (چون $a_0 \neq 0$ لذا $P(x)$ نمی‌تواند ریشه صفر داشته باشد) ریشه‌ای از $P(x)$ باشد. بنابراین

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

حال ثابت می‌کنیم $Q(\frac{1}{r})$ برای این منظور باید

$$\begin{aligned} Q(\frac{1}{r}) &= a_0(\frac{1}{r}) + a_{n-1}(\frac{1}{r}) + a_n = \frac{a_0}{r^n} + \frac{a_1}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{r} + a_n \\ &= \frac{1}{r^n}(a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = \frac{1}{r^n} P(r) = \frac{1}{r^n} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

پس بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه $Q(x)$ است.
در حقیقت، ما از رهیافت ساختن مسأله ساده‌تر و مرتبط با مسأله اصلی استفاده نمودیم.
مسأله ۴. ثابت کنید برای هر ۴ عدد حقیقی a، b، c و d اگر $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$ آن‌گاه $a = b = c = d$.
حل: برای حل این مسأله، دو مسأله مشابه زیر را در نظر می‌گیریم
مسأله A. ثابت کنید اگر $a^2 + b^2 = ab$، آن‌گاه $a = b = 0$
مسأله B. ثابت کنید اگر $a^2 + b^2 = ab + ba$، آن‌گاه $a = b$
مسأله A با مسأله ۴ شباهت نزدیک ندارد که بتواند برای ما مفید باشد. برای انتخاب مسألهٔ مشابه، لازم است به‌ماهیت چرخه‌ای جملات مسأله ۴ توجه کنیم. این کار، مسأله B را موجب می‌شود. خوشبختانه، مسأله B به‌آسانی و به‌شکل زیر حل می‌شود

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = ab + ba \\ & a^2 + b^2 = 2ab \\ & (a-b)^2 = 0 \\ & a = b \end{aligned}$$

اکنون با کسب بصیرت نسبت به‌این راه‌حل، می‌توان ایده‌ای که در ورای این راه‌حل است شناخت و از این، برای حل مسأله به‌شکل زیر استفاده کرد:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$$

اگر دو طرف رابطهٔ فوق را در ۲ ضرب کنیم و همهٔ جملات را به‌یک طرف ببریم، خواهیم داشت

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = 0$$

که از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$a = b = c = d$$

نهایتاً متذکر می‌شویم که مسایل فوق، نشان می‌دهند که این رهیافت کلی، تنها یک رهیافت نیست، بلکه مجموعه‌ای از رهیافت‌ها است.

۱۲ رهیافت انتخاب نماد کارآمد

نیمی از یک مفهوم ریاضی ابداع علامتی مناسب برای آن است. (لاپلاس)

انتخاب نماد کارآمد یکی از روش‌هایی است که برای حل مسایل ریاضی قابل استفاده است. زیرا از جمله گام‌های اولیه در حل مسأله‌های ریاضی، ترجمه آن‌ها به‌عبارت‌های نمادین است. برای این‌کار، ابتدا باید همه مفاهیم کلیدی شناسایی و نامگذاری شوند. به‌تدریج با کشف ارتباط‌های موجود در مسأله، می‌توان نمادهای زاید را حذف کرد. اینک با چند مثال چگونگی استفاده از این رهیافت را بیشتر توضیح می‌دهیم.

مسأله ۱. فرض کنید $-۱ < a_۰ < ۱$ و به‌صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم

$$a_n = \left(\frac{۱ + a_{n-۱}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

فرض کنید $A_n = ۴^n(۱ - a_n)$. وقتی n به‌بینهایت میل می‌کند، برای A_n چه روی می‌دهد؟

حل: در صورتی که بخواهیم با تلاش زیاد مستقیماً a_n را برحسب $a_۰$ بیان کنیم، به‌عبارت‌های پیچیدهٔ ناامیدکننده‌ای، مانند دنباله‌ای از رادیکال‌های تودرتو می‌رسیم که راهی برای خلاصه کردن آن‌ها به‌صورت جمع و جور وجود ندارد. در اینجا روش منحصر به‌فردی مورد نیاز است که ملاحظه می‌کنیم زاویه θ که $۰ < \theta < \pi$ وجود دارد به‌طوری که $a_۰ = \cos\theta$ که به‌ازای آن داریم

$$\begin{aligned}
a_۱ &= (\frac{۱ + \cos\theta}{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \cos\frac{\theta}{۲} \\
a_۲ &= (\frac{۱ + \cos\theta}{۲})^{۲} = \cos\frac{\theta}{۴}, \cdots, a_n = \cos\frac{\theta}{۲^n} \\
A_n &= ۴^n(۱ - \cos(\frac{\theta}{۲^n})) = \frac{۴^n(۱ - \cos(\frac{\theta}{۲^n})(۱ + \cos(\frac{\theta}{۲^n}))}{۱ + \cos(\frac{\theta}{۲^n})} \\
&= \frac{۴^n \sin(\frac{\theta}{۲^n})}{۱ + \cos(\frac{\theta}{۲^n})} = (\frac{\theta^۲}{۱ + \cos(\frac{\theta}{۲^n})})(\frac{\sin(\frac{\theta}{۲^n})}{\frac{\theta}{۲^n}})^۲
\end{aligned}$$

با بزرگ شدن n عبارت $\frac{\theta^۲}{۱+\cos(\frac{\theta}{۲^n})}$ به‌سمت $\frac{\theta^۲}{۲}$ میل کرده و $\frac{\sin(\frac{\theta}{۲^n})}{(\frac{\theta}{۲^n})}$ به‌سمت ۱ می‌گراید. یادآوری می‌کنیم که وقتی $x \longrightarrow ۰$ آن‌گاه $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow ۱$. بنابراین، وقتی n به‌بینهایت میل می‌کند، A_n به $\frac{\theta^۲}{۲}$ می‌گراید.

مسأله ۲. اگر $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ تمام اعداد حقیقی x, y, z را بیابید که

$$x + y + z = a + b + c$$

$$۴xyz-(a^۲x+b^۲y+c^۲z)=abc$$

حل: داریم

$$۴=\frac{a^۲}{zy}+\frac{b^۲}{zx}+\frac{c^۲}{xy}+\frac{abc}{xyz}$$

که اگر قرار دهیم:

$$\frac{a}{\sqrt{zy}}=x_۱,\frac{b}{\sqrt{xz}}=y_۱,\frac{c}{\sqrt{xy}}=z_۱$$

خواهیم داشت:

$$x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲+x_۱y_۱z_۱=۴$$

همچنین داریم: $۲>x_۱>۰,۲>y_۱>۰,۲>z_۱>۰$ در نتیجه می‌توان قرار داد:

$$x_۱=۲\sin(M) \qquad y_۱=۲\sin(V)$$

به‌طوری که $\frac{\pi}{۲}>M>۰,\frac{\pi}{۲}>V>۰$ پس داریم

$$\begin{aligned}&۴\sin^۲(M)+۴\sin^۲(V)+z_۱^۲+۴(\sin(M)\times\sin(V))z_۱=۴\\ &\Longrightarrow [z_۱+۲\sin(M)\cdot\sin(V)]^۲=۴(۱-\sin^۲(M))(۱-\sin^۲(V))\\ &\Longrightarrow z_۱+۲\sin(M)\cdot\sin(V)=|۲\cos(M)\cdot\cos(V)|\end{aligned}$$

با توجه به‌این که $\cos V,\cos M,\sin V,\sin M,Z_۱$ مثبت هستند، در نتیجه

$$\begin{aligned}z_۱+۲\sin(M)\sin(V)=۲\cos(M)\cdot\cos(V)\Longrightarrow z_۱&=۲(\cos(M)\cos(V)-\sin(V)\sin(M))\\&=۲\cos(M+V)\end{aligned}$$

در نتیجه با برگردانیدن متغیرها داریم

$$\begin{aligned}a&=۲\sin(M)\sqrt{yz}\\ b&=۲\sin(V)\sqrt{xz}\\ c&=۲\cos(M+V)\sqrt{xz}\end{aligned}$$

اما $x+y+z=a+b+c$ پس:

$$[\sqrt{x}\cos(V)-\sqrt{y}\cos(M)]^۲+[\sqrt{x}\sin(V)+\sqrt{y}\sin(M)-\sqrt{z}]^۲=۰$$

$$\sqrt{z}=\sqrt{x}\sin(V)+\sqrt{y}\sin(M)=\sqrt{x}\times\frac{y_۱}{۲}+\sqrt{y}\times\frac{x_۱}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$\sqrt{z}=\sqrt{x}\cdot\frac{b}{۲\sqrt{zx}}+\sqrt{y}\cdot\frac{a}{۲\sqrt{yz}}\Longrightarrow z=\frac{a+b}{۲}$$

و به‌طریق مشابه و با توجه به‌تقارن موجود داریم

$$x=\frac{b+c}{۲},y=\frac{c+a}{۲}$$

و واضح است که $(\frac{b+c}{۲},\frac{c+a}{۲},\frac{a+b}{۲})$ تنها جواب مسأله می‌باشد.

مسأله ۳. یک روز صبح برف سنگینی با سرعت ثابت شروع به‌باریدن کرد. یک ماشین برف‌روب کار خود را در ساعت ۸ صبح آغاز و در ساعت ۹ صبح، ۲ کیلومتر و در ساعت ۱۰ صبح ۳ کیلومتر پیش رفته بود. به‌فرض آن که ماشین برف‌روب در هر ساعت حجم ثابتی از برف را پاک کند، تعیین کنید که برف از چه ساعتی شروع به‌باریدن کرده است.

حل: به‌سختی می‌توان تصور کرد که اطلاعات موجود در این مسأله برای پاسخ به‌سوال کافی باشد. با وجود این اگر راهی وجود داشته باشد نخست باید به‌روشی نظام‌وار، کمیت‌های ناشناخته را شناسایی کرد. نماد زیر را معرفی می‌کنیم. فرض کنید t مدت زمانی باشد که از شروع بارش برف می‌گذرد و T زمان آغاز به‌کار برفروب باشد (که از $t=۰$ محاسبه می‌شود). فرض کنید $x(t)$ مسافتی باشد که برفروب تا زمان t طی کرده است ($x(t)$ تنها به‌ازای $t\geq T$ مورد نظر است) بالاخره فرض کنید $h(t)$ نشان دهنده عمق برف در زمان t باشد. اکنون آماده‌ایم که مسأله را به‌عبارت‌های نمادین ترجمه کنیم. این مطلب که برف با سرعت ثابتی می‌بارد به‌معنی آن است که عمق آن با سرعتی ثابت افزایش می‌یابد یعنی (c ثابت) $\frac{dh}{dt}=c$
با انتگرال گیری از دو طرف خواهیم داشت $h(t)=ct+d$
(d,c ثابت‌اند) و چون $h(۰)=۰$، نتیجه می‌گیریم $d=۰$ یعنی $h(t)=c\cdot t$
این حقیقت که برفروب برف را با سرعت ثابتی پاک می‌کند به‌معنی آن است که در هر لحظه t سرعت برفروب با عمق برف نسبت عکس دارد (مثلاً با ۲ برابر شدن عمق سرعت نصف می‌شود). به‌شکل نمادی به‌ازای $t\geq T$ داریم

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k}{h(t)}(\text{ ثابت } k)\Longrightarrow\frac{k}{ct}=\frac{k}{t}(\text{ ثابت است } k=\frac{k}{c})$$

با انتگرال گیری از دو طرف نتیجه می‌شود

$$x(t)=k\log t+c(\text{ ثابت است } c)$$

سه شرط در اختیار داریم: وقتی $t=T$، $x=۰$، وقتی $t=T+۱$ $x=۲$ و وقتی $t=T+۲$ $x=۳$ با استفاده از دو شرط از شرایط فوق، می‌توان ثابت‌های c,k و با استفاده از شرط سوم می‌توان مقدار T را به‌دست آورد. جزئیات حل مسأله را کنار می‌گذاریم و نتیجه می‌گیریم

$$T = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0/618 \approx$$ ساعت ≈ ۳۷ دقیقه و ۵ ثانیه

بنابراین، برف در ساعت $7, 22', 55''$ شروع به‌باریدن کرده است.

۱۳ رهیافت توجه به‌حالت‌های انتهایی (اکسترمم)

اگر بگذاریم پارامترهای مسأله از یک مقدار انتهایی به‌مقدار انتهایی دیگر تغییر کند، به‌حل مسأله کمک خواهد کرد.
غالباً وضعیت‌های انتهایی، کلید درک مسأله‌های وجودی‌اند مانند «ثابت کنید xای وجود دارد که $p(x)$».
اینک چند مثال را که این رهیافت به‌حل آنها کمک می‌کند، با هم مرور می‌کنیم:
مسأله ۱. معادله زیر را در مجموعهٔ اعداد طبیعی حل کنید.

$$x + y + z = xyz$$

حل فرض کنید $x \leq y \leq z$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$y = x + a \ , \ z = x + b \ , \ (0 \leq a \leq b)$$

پس داریم

$$3x + a + b = x(x+a)(x+b)$$

حال فرض کنید $\max\{x\} > 1$، پس اگر چنین xای بزرگتر از ۱ موجود باشد، با توجه به‌معادلهٔ زیر

$$x(x^2 - 3) + (a+b)(x^2 - 1) + (ab)x = 0 \qquad (2)$$

با توجه به‌این که $x \geq 2$ پس سمت چپ معادله فوق از صفر بزرگتر است و این یک تناقض است.
در نتیجه $\max\{x\} \leq 1$. حال اگر $x = 1$ را در معادلهٔ (۲) قرار دهیم خواهیم داشت .

$$ab = 2 \Longrightarrow a = 1, b = 2 \Longrightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

یعنی $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ تنها جواب معادله است.
مسأله ۲. تعدادی متناهی از نقاط یک صفحه را در نظر می‌گیریم که همگی هم‌خط نیستند. ثابت کنید خط راستی وجود دارد که دقیقاً از دوتای آنها می‌گذرد؟
حل: فاصله نقطه p تا خط l را به $d(p, l)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید S مجموعهٔ فاصله‌های مثبت $d(p, l)$ باشد که از تغییر نقطه p روی مجموعه نقطه های داده شده، و تغییر l روی مجموعه خط‌هایی بوجود می‌آیند که از p نمی‌گذرند ولی دست کم از دو نقطه داده شده عبور می‌کنند. مجموعه S ناتهی است

(زیرا همه نقاط هم‌خط نیستند) و متناهی است. در نتیجه، S کوچکترین عضوی چون $d(P,M)$ دارد.
ادعا می‌کنیم که M، دقیقاً از دو نقطهٔ این نقاط مفروض می‌گذرد.
فرض کنید که M از سه نقطه $p_۱, p_۲, p_۳$ بگذرد و Q نزدیکترین نقطه M به P باشد. دست کم دو تا از نقطه‌های $p_۱, p_۲, p_۳$ در یک‌طرف Q قرار دارند (یکی از آن‌ها می‌تواند خود Q باشد) که آنها را $p_۲, p_۳$ می‌نامیم. فرض کنید نقاط را طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که $p_۲$ به p نزدیکتر باشد تا $p_۳$ به p. حال فرض کنید که N خط گذرنده از $p_۳, p$ باشد و توجه کنید که $d(P/N) < d(P,M)$ که این با انتخاب M, P در تناقض است. از اینجا نتیجه می‌شود که M تنها می‌تواند از دو تا از این نقاط بگذرد.
مسأله ۳. ثابت کنید $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.
حل: فرض کنیم عدد $\sqrt{۲}$ گویا است. بنابر اصل خوش‌ترتیبی، کوچکترین عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که $k\sqrt{۲} \in \mathbb{N}$ از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$(\sqrt{۲}k - k) \times \sqrt{۲} = ۲k - \sqrt{۲}k \in \mathbb{N}$$

از طرفی

$$\sqrt{۲} < ۲ \longrightarrow \sqrt{۲} - ۱ < ۱ \longrightarrow \sqrt{۲}k - k < k$$

پس عدد طبیعی $\sqrt{۲}k - k$ کوچکتر از k یافتیم که $(\sqrt{۲}k - k)\sqrt{۲} \in \mathbb{N}$. این مطلب با کوچکتر بودن k در تناقض است. بنابراین فرض ما درست نیست و در نتیجه حکم برقرار است.

۱۴ رهیافت بازگشتی

روش بازگشتی در یک مسأله به‌معنای آن است که حکم مسأله را بپذیریم و بر این اساس پس از نتیجه‌گیری‌های متوالی از نتیجه به‌آنچه معلوم است یا به‌حکمی که بتوان آن را به‌سادگی ثابت کرد دست یابیم. پس از رسیدن به‌فرض یا معلوم، مراحل استدلال را معکوس می‌کنیم و به‌سوی حکم اصلی پیش می‌رویم.
این روش از قدیمی‌ترین روش‌های حل مسأله است که از قدیم و مخصوصاً یونانیان باستان از این روش در مسایل استفاده می‌کرده‌اند. آن‌ها فرض می‌کردند که شی قبلاً ایجاد شده است و به‌عقب باز می‌گشتند. این مسأله در صورتی خوب عمل می‌کند که مسأله در مراحل عقب زیاد شاخه پیدا نکند. مخصوصاً این نکته را باید مد نظر قرار داد که روابط استدلال شده باید همگی بازگشت‌پذیر باشند. استفاده از رهیافت بازگشتی در حل مسایل جبر و مثلثات دبیرستانی معمول است. مثلاً برای یافتن ریشه‌های معادله $۲x + ۵ = ۹$ به‌شکل زیر استدلال می‌کنیم:
فرض کنید x در معادله بالا صدق کند، با کاستن ۵ از دو طرف معادله و تقسیم دو طرف معادله بر ضریب x، به‌دست می‌آید $x = ۲$. از آنجا که هر یک از دو گام به کار رفته برگشت‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که

۲ واقعاً در معادله $۲x + ۵ = ۹$ صدق می‌کند و این تنها جواب ممکن است.

مسأله۱. اگر a و b و c طول ضلع‌های یک مثلث باشند نشان دهید

$$۳(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^۲ \leq ۴(ab + bc + ca).$$

حل: نابرابری طرف چپ را در نظر می‌گیریم

$$۳(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^۲$$
$$۳ab + ۳bc + ۳ac \leq a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + bc + ac)$$
$$ab + bc + ac \leq a^۲ + b^۲ + c^۲ \Longrightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - ac - bc \geq ۰$$
$$۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ - ۲ab - ۲ac - ۲bc \geq ۰$$
$$(a + b^۲ - ۲ab) + (b^۲ - ۲bc + c^۲) + (c^۲ - ۲ac + a^۲) \geq ۰$$
$$(a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (c - a)^۲ \geq ۰$$

این نابرابری به‌ازای همه مقادیر a، b و c درست است. حال نابرابری طرف راست را در نظر بگیرید

$$(a + b + c)^۲ \leq ۴(ab + bc + ca)$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + bc + ac) \leq ۴(ab + bc + ca)$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \leq ۲(ab + bc + ca)$$

رابطه قبل را می‌توان چنین نوشت

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \leq a(b + c) + b(a + c) + c(a + b)$$

این رابطه کاملاً درست است زیرا در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچکتر است. بنابراین داریم

$$a^۲ \leq (b + c)a, b^۲ \leq b(a + c), c^۲ \leq c(b + a)$$

از آنجا که می‌توان هر یک از مراحل استدلال را برعکس کرد، برهان کامل است.

۱۵ رهیافت برهان خلف

«برهان خلف، این عزیز دُردانه اقلیدس، یکی از برنده‌ترین سلاح‌های ریاضی‌دانان است. در یک بازی شطرنج، حرکتی که انجام گیرد دیری نمی‌پاید که ارزش آن معین می‌گردد، یک بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یک پیاده یا مهرهٔ دیگر را بپذیرد. اما آن چه مطرح است کل بازی است.»

(هاردی در کتاب دفاعیه یک ریاضی‌دان)

«برهان خلف» یکی از روش‌های جالب برای اثبات قضیه‌ها در جبر و هندسه است. با استفاده از برهان خلف، به‌جای این که درستی یک گزاره را به‌طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با پذیرفتن درستی گزاره، به‌نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم.
برای مثال، برای اثبات برابری a, b ثابت می‌کنیم a از b بزرگتر نیست و a از b کوچکتر هم نیست.
اصطلاح برهان خلف ترجمه واژه لاتینی «Reducation and Absurdom» به‌معنای اثبات از جهت مخالف، یا اثبات از راه رد کردن حکم مخالف است. تا آنجا که می‌دانیم اقلیدس نخستین کسی بود که از برهان خلف در کتاب خود به‌نام «مقدمات» استفاده کرد. و آن را «معمای برهان خلف» می‌نامید و درباره آن می‌گفت: گزارهٔ A را می‌توان ثابت شده دانست وقتی که اگر آن را نادرست بدانیم، باز هم درستی A را نتیجه بدهد. در طول تاریخ، تعریف‌های دیگری هم از برهان خلف ارائه شده است.
اگر B درست باشد و در ضمن از درستی A نادرستی B نتیجه شود، به‌معنای نادرستی A است. ناگفته نماند که این روش استدلال اغلب در مواقعی به‌کار می‌رود که بتوان حکم مسأله را به‌سادگی نفی کرد یا فرض‌های مسأله امکان کمی برای استدلال فراهم آورند و یا هنگامی که ایده اساسی برای نحوه عمل به‌ذهن نمی‌رسد. در اینجا با آوردن مثال‌هایی کوشش می‌کنیم این رهیافت را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم.

مسأله ۱. دنباله متناهی $\{a_k\}$ که تمام جملات آن عددهایی مثبت‌اند چنان است که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $(*) \quad (a_{k+1} + k)a_k = 1$. ثابت کنید همه عددهای این دنباله عددهای گنگ‌اند.

حل: فرض می‌کنیم یکی از جملات دنباله عددی گویا و به‌صورت $a_k = \frac{p}{q}$ باشد که در آن، p و q عددهای طبیعی هستند. با توجه به‌برابری $(*)$ می‌توان جملهٔ بعدی را به‌دست آورد:

$$a_{k+1} = \frac{1}{a_k} - k = \frac{p}{q} - k = \frac{p - kq}{q}$$

مجموع اعداد صورت و مخرج در a_k برابر $p + q$ و در a_{k+1} برابر $q + p - kq$ است، یعنی این مجموع در a_{k+1} کمتر از این مجموع در a_k است و بنابراین بعد از چند گام به‌جایی می‌رسیم که یکی از دو جمله صورت یا مخرج عدد منفی می‌شود و فرض این که همه جملات مثبت‌اند، نقض می‌شود. این تناقض ثابت می‌کند که در این دنباله، جمله گویا وجود ندارد. اما توجه کنید که ما ثابت کردیم این دنباله، نمی‌تواند جمله گویا داشته باشد. اما ثابت نکرده‌ایم چنین دنباله‌ای با جملات گنگ وجود دارد. خودتان در این باره فکر کنید، آیا چنین دنباله‌ای وجود دارد؟ روشن است برای پاسخ مثبت یا منفی به‌این پرسش، استدلال ریاضی لازم است. البته اگر بتوان یک مثال عددی برای چنین دنباله پیدا کرد کافی است تا حکم کنیم چنین دنباله‌ای وجود دارد، ولی آیا می‌توانید چنین نمونه‌ای را پیدا کنید؟

مسأله ۲. ثابت کنید سری همساز واگراست؟

حل: از برهان خلف کمک می‌گیریم و فرض می‌کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = r$ به‌عدد r همگرا باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} r = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \cdots &> \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots \\ r &> r \end{aligned}$$

اما این یک تناقض است. پس به‌ناچار می‌پذیریم که سری همساز واگراست.

مثال۳. ثابت کنید که e عددی گنگ است؟

برهان: فرض می‌کنیم e گنگ نباشد. قرار می‌دهیم $e=\frac{h}{k}$ که در آن k,h عددهای صحیح‌اند.
با استفاده از بسط توانی e^x و قرار دادن $x=۱$ به‌دست می‌آوریم

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{k!}+\left[\frac{۱}{(k+۱)!}+\frac{۱}{(k+۲)!}+\cdots\right]$$

دو طرف را در $k!$ ضرب می‌کنیم و حاصل را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$k!\left[\frac{h}{k}-۱-\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}-\cdots-\frac{۱}{k!}\right]=\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}+\cdots$$

توجه کنید که طرف راست تساوی عددی مثبت و طرف چپ عددی صحیح است. بنابراین، طرف چپ باید عددی صحیح و مثبت باشد. ولی در طرف راست داریم

$$\begin{aligned}
&\tfrac{۱}{k+۱}+\tfrac{۱}{(k+۱)(k+۲)}+\tfrac{۱}{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}+\cdots\\
&=\tfrac{۱}{k+۱}\left[۱+\tfrac{۱}{k+۲}+\tfrac{۱}{(k+۲)(k+۳)}+\cdots\right]\\
&<\tfrac{۱}{k+۱}\left[۱+\tfrac{۱}{k+۱}+\tfrac{۱}{(k+۱)^{۲}}+\cdots\right]\\
&=\tfrac{۱}{k+۱}\left[\tfrac{۱}{۱-(\frac{۱}{k+۱})}\right]=\tfrac{۱}{k+۱}(\tfrac{k+۱}{k})=\tfrac{۱}{k}<۱
\end{aligned}$$

در نتیجه طرف راست عدد صحیح مثبتی نیست و این تناقض است. بنابراین e باید عددی گنگ باشد.

۱۶ رهیافت تبدیل مسأله به‌مسأله‌ای هم‌ارز

هر چند اولین گام در راه حل مسأله جمع آوری اطلاعات، کشف، درک، ایجاد ارتباط، حدس و تحلیل آن مسأله است، ولی اگر به‌دلیل پیچیده شدن محاسبات یا عدم وجود حالت‌های خاص روشن کننده، نتوان این کار را به‌شکلی با معنی انجام داد، پیشنهاد می‌کنیم مسأله را به‌مسألهٔ هم‌ارز ولی ساده‌تر از حالت اصلی صورت‌بندی کنید.

این کار به‌قدرت تخیل و خلاقیت فرد بستگی دارد. برخی تکنیک‌های استاندارد در صورت‌بندی مجدد شامل عملیات جبری و مثلثاتی، جایگزینی یا تغییر متغیر، استفاده از تناظر یک به‌یک و بیان مسأله به‌زبان مبحث دیگری (مانند جبر، هندسه، آنالیز، ترکیبیات و غیره) است.

در این بخش، ضمن ارائه مثال‌هایی سعی می‌کنیم این رهیافت را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم.

مسأله۱. همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱=۰$ را به‌دست آورید.

حل: می‌توانیم طرفین این معادله را بر $x^{۲}$ تقسیم کنیم. سپس با جایگزینی $y=x+\frac{۱}{x}$ و استفاده از دستور حل معادله درجه دوم معادله را حل کنیم. در نتیجه داریم:

$$x^2 + x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = 0 \Longrightarrow (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) + (1 - 2) = 0$$
$$(x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x}) - 1 = 0 \Longrightarrow y^2 + y - 1 = 0$$

ریشه‌های این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

باید x را از حل دو معادله زیر به‌دست آوریم:

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

که معادلند با:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0, \quad x^2 - y_2 x + 1 = 0$$

و از اینجا چهار ریشه معادله عبارتند از:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$
$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

مسأله ۲. دستوری برای مشتق nام تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ بیابید.

حل: هنگام کار با تابع‌های گویا، یکی از راه‌های معمول برای ساده کردن حل مسأله، نوشتن کسر گویا به‌صورت مجموعی از کسرهای ساده است. در این حالت داریم

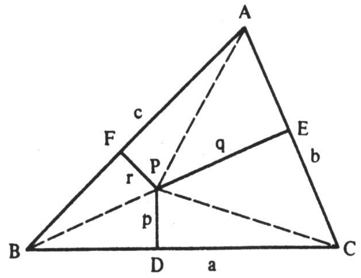
$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+B) + A - B}{x^2 - 1} \qquad \begin{cases} A+B=2 \\ A-B=0 \end{cases} \Longrightarrow A = B = 1$$
$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}\right) = (-1)^n \times n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}})$$

مسأله۳. P نقطهٔ درون مثلث ABC، D، E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از P بر خط‌های BC و CA و AB هستند. همهٔ نقاطی مانند P را بیابید به‌طوری که $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: طول‌های BC، AC و AB را به‌ترتیب با a، b و c و طول‌های PD و PE و PF را به‌ترتیب با p، q و r نشان می‌دهیم. می‌خواهیم حاصل $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$ را می‌نیمم کنیم.



شکل ۱۱

توجه کنید که

$$\text{مساحت}\,\Delta ABC = \text{مساحت}\,\Delta BCP + \text{مساحت}\,\Delta CAP + \text{مساحت}\,\Delta ABP$$
$$= \frac{۱}{۲}ap + \frac{۱}{۲}bq + \frac{۱}{۲}cr$$
$$= \frac{ap + bq + cr}{۲}$$

بنابراین

$$۲S_{ABC} = ap + bq + cr$$

درنتیجه، مقدار $ap + bq + cr$ ثابت و مستقل از محل قرار گرفتن P است. در نتیجه به‌جای می‌نیمم کردن $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$ مقدار $(ap + bq + cr)(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r})$ را می‌نیمم می‌کنیم.
برای این منظور می‌نویسیم:

$$(ap + bq + cr)(\tfrac{a}{p} + \tfrac{b}{q} + \tfrac{c}{r}) =$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab(\tfrac{p}{q} + \tfrac{q}{p}) + bc(\tfrac{q}{r} + \tfrac{r}{p}) + ac(\tfrac{p}{r} + \tfrac{r}{p})$$
$$\geq a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ac = (a + b + c)^۲$$

عبارت $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$، وقتی می‌نیمم خود (یعنی $(a + b + c)^۲$) را اتخاذ می‌کند که $p = q = r$ یعنی وقتی P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد.

۱۷ رهیافت تقسیم مسأله به‌چند حالت

اغلب مواردی پیش می‌آید که می‌توانیم یک مسأله را به‌تعدادی مسأله‌های فرعی کوچکتر تقسیم کنیم، به‌طوری که هر یک از آن‌ها را بتوان به‌طور جداگانه به‌روش حالت به‌حالت بررسی کرد، به‌ویژه این مطلب دربارهٔ مسأله که در آن از سور عمومی استفاده شده است (یعنی به‌ازای هر ...) درست است. برای مثال،

ممکن است گزاره‌ای به‌شکل «به‌ازای هر عدد صحیح ...» را بتوان با بررسی حالت‌های زوج و فرد، به‌طور جداگانه ثابت کرد.
همین طور، ممکن است یک قضیه درباره مثلث‌ها، با استفاده از تقسیم آن به‌سه حالت مثلث حاده‌الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه، ثابت شود. در برخی موارد می‌توان مسأله‌های فرعی را به‌شکل متوالی طوری مرتب کرد که پس از ثابت شدن اولین حالت، به‌کمک آن گام‌های بعدی را نیز ثابت کرد که به‌چنین روندی، **تپه نوردی** گفته می‌شود.
در نخستین مراحل تجزیه و تحلیل یک مسأله باید فکر کنیم که چگونه می‌توان آن را به‌چند مسأله فرعی (امیدوار کننده) ساده‌تر تقسیم کرد و سپس برای حل آن اقدام نمود.
مسأله۱. تابع f با مقادیر حقیقی روی مجموعهٔ عددهای گویا تعریف شده است. هر دو عدد گویای x و y در تساوی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد گویای x داریم $f(x)=f(۱)\times x$

حل: برهان را در چند مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا حکم را برای اعداد صحیح مثبت ثابت می‌کنیم.
حالت۱ (عددها صحیح و مثبت‌اند). حکم وقتی $x=۱$ برقرار است. به‌ازای $x=۲$ داریم

$$f(۲)=f(۱+۱)=f(۱)=۲f(۱)$$

به‌ازای $x=۳$ داریم

$$f(۳)=f(۲+۱)=f(۲)+f(۱)=۲f(۱)+f(۱)=۳f(۱)$$

روشن است که می‌توان این روند را برای هر عدد صحیح مثبت n ادامه داد و نتیجه گرفت که $f(n)=nf(۱)$ (برهان رسمی این حکم بر اساس اصل استقرای ریاضی است.)
حالت۲ (عددها صحیح و نامثبت‌اند). ابتدا داریم:

$$f(۰)=f(۰+\bar{۰})=f(۰)+f(۰)\Longrightarrow f(۰)=۰\Longrightarrow f(۰)=۰\times f(۰)=۰$$

اما

$$۰=f(۰)=f(۱+(-۱))=f(۱)+f(-۱)\Longrightarrow f(-۱)=-f(۱)$$

به‌طور مشابه، به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم

$$f(n)+f(-n)=f(n+(-n))=f(۰)=۰\Longrightarrow f(-n)=-nf(۱).$$

حالت۳ (عکس عددها). به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$f(۱)=f(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲})=۲f(\frac{۱}{۲})\Longrightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{f(۱)}{۲}$$

برای $x=\frac{۱}{۳}$ داریم

$$f(1) = f(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}) = f(\tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{1}{3}) = 3f(\tfrac{1}{3}) \Longrightarrow f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{f(1)}{3}$$

به‌روشی مشابه به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم $f(\frac{1}{n}) = \frac{f(1)}{n}$
به‌ازای $x = -\frac{1}{n}$ داریم $f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n} + (-\frac{1}{n})) = f(0) = 0$. در نتیجه $f(-\frac{1}{n}) = \frac{-f(1)}{n}$.
حالت ۴ (همه اعداد گویا). فرض کنید که n عددی صحیح باشد. در این صورت

$$f(\tfrac{2}{n}) = f(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}) = f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{1}{n}) = 2f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{2}{n}f(1)$$

به‌طور مشابه، اگر $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ و دلخواه باشد که در آن m عددی صحیح و n عددی صحیح مثبت است، آن‌گاه

$$f(\tfrac{m}{n}) = f(\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}) = f(\tfrac{1}{n}) + \cdots + f(\tfrac{1}{n}) = mf(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{m}{n}f(1)$$

بدین ترتیب، حکم مسأله که مثال خوبی از روش تپه‌نوردی، است ثابت می‌شود.
مسأله ۲. ثابت کنید به‌ازای هر دو عدد حقیقی a, b:

$$|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad 0 \leq p \leq 1$$

حل: در چند حالت خاص نامساوی بدیهی است.
مثلاً اگر $a = 0$ یا اگر a و b علامت‌های مختلف داشته باشند، حکم برقرار است. همچنین، وقتی $p = 0$ یا $p = 1$، نتیجه درست است. بنابراین، کافی است نشان دهیم که حکم وقتی a و b مثبت‌اند و $0 < p < 1$ درست است.
برای چنین a، b و pای قرار می‌دهیم $x = \frac{b}{a}$. در این صورت، مسأله آن است که نشان دهیم $0 < p < 1$ و $x > 0 \qquad (1 + x)^p \leq 1 + x^p$.
برای این کار قرار می‌دهیم $D(x) = 1 + x^p - (1 + x)^p$
در این صورت، $D(0) = 0$ و $D'(x) = px^{p-1} - p(1 + x)^{p-1} > 0$ است. در نتیجه، بنابر آن چه پیشتر گفتیم، برهان کامل می‌شود. (توجه کنید که اگر $p > 1$ جهت نامساوی معکوس می‌شد.)
مسأله ۳. ثابت کنید که مساحت یک مثلث مشبکه‌ای مساوی است با $I + \frac{1}{2}B - 1$ که در آن I و B به‌ترتیب عبارتند از تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای درونی و روی مرز مثلث (مثلث مشبکه‌ای مثلثی واقع در صفحه است که رأس‌های آن نقطه‌های مشبکه‌ای (با مختصات صحیح) هستند.)
حل: این یک حالت خاص از است که برای چندضلعی‌ها بیان می‌شود بدین صورت:
قضیه پیک Pick: ثابت کنید مساحت یک چندضلعی مشبکهٔ ساده که رأس‌های آن نقاط مشبکه‌ای و اضلاع آن یکدیگر را قطع نکند، برابر $I + \frac{1}{2}B - 1$ است.
چندین راه‌حل زیرکانه برای حل این مسأله وجود دارد که در هر یک از آن‌ها، مجموعه مثلث‌های مشبکه‌ای به‌چند نوع خاص تقسیم می‌شوند. یکی از این راه‌ها آن است که مثلث موردنظر را در مستطیلی که اضلاع آن موازی محورهای مختصات است محاط کنیم. دست کم یکی از رأس‌های مستطیل بر یکی از رأس‌های مثلث منطبق می‌شود. می‌توان بررسی کرد که هر مثلث مشبکه‌ای را می‌توان در یکی از

رده‌های ناهم‌ارزی که در پایین آمده است طبقه‌بندی کرد
در ردهٔ اول، مثلث‌های قائم‌الزاویه قرار دارند که اضلاع زاویه قائمه آن‌ها موازی محورهای مختصات‌اند.
ردهٔ دوم، شامل مثلث‌های حاده‌الزاویه است که یک ضلع آن‌ها موازی محورهای مختصات است. هر مثلث از این نوع مساوی است با مجموع دو مثلث از نوع اول.
در ردهٔ سوم، مثلث‌های منفرجه‌الزاویه قرار دارند که یک ضلع آن‌ها موازی یکی از محورهای مختصات است. آن‌ها تفاضل دو مثلث از نوع اول هستند.
رده‌های چهارم و پنجم مثلث‌هایی را در بر دارند که هیچ یک از ضلع‌های آن‌ها با محورهای مختصات موازی نیستند. برهان حکم مثالی از الگوی تپه‌نوردی است. برای شروع مستطیل $ABCD$ را در حالت اول در نظر بگیرید فرض کنید که پاره‌خط‌های AB و AD به‌جز نقطه‌های انتهایشان به‌ترتیب شامل a و b نقطه مشبکه‌ای باشند. در این‌صورت، اگر $ABCD$ دارای I نقطه درونی و B نقطه مرزی باشد، داریم

$$I+\frac{۱}{۲}B-۱ = ab+\frac{۱}{۲}(۲a+۲b+۴)-۱ = ab+a+b+۱ = (a+۱)(b+۱) = ABCD \text{ مساحت}$$

حال فرض کنید که روی پاره‌خط‌های AB، BC و AC به‌جز نقطه انتهایشان به‌ترتیب a و b و c نقطهٔ مشبکه‌ای قرار داشته و فرض کنید که مثلث ABC، i نقطه درونی داشته باشد. در این‌صورت، مستطیل $ABCD$، $۲i+c$ نقطه درونی خواهد داشت و اگر ABC، I نقطه درونی و B نقطه مرزی داشته باشیم، داریم

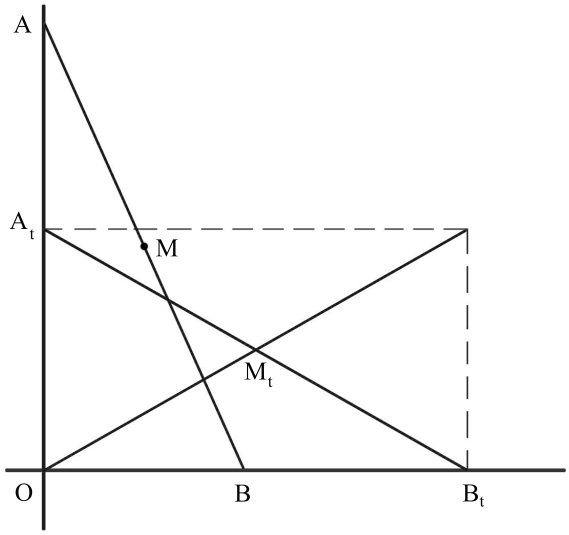
$$\begin{aligned}
&I+\tfrac{۱}{۲}B-۱ = i+\tfrac{۱}{۲}(a+b+c+۳)-۱ = \\
&\tfrac{۱}{۲}(۲i+a+b+c+۱) = \tfrac{۱}{۲}\left[(۲i+c)+\tfrac{۱}{۲}(۲a+۲b+۴)-۱\right] \\
&= \tfrac{۱}{۲}(ABCD \text{ مساحت}) = ABC \text{ مساحت}
\end{aligned}$$

حالت‌های دیگر را نیز می‌توان به‌روشی مشابه بررسی کرد که ما آن را به‌علت طولانی بودن اثبات نمی‌کنیم.
تذکر: همانگونه که ملاحظه نمودید، این رهیافت با رهیافت حل مسأله مرتبط، شباهت زیادی دارد.

۱۸ رهیافت جست و جوی ناوردایی (پایایی)

یکی از عالی‌ترین شیوه‌ها و استراتژی‌های حل مسأله، رهیافت جست و جوی نامتغیرها است. این روش در جهت حل نمونه‌های معینی از مسایل مشکل و پیچیده، سودمند و راهگشاست. مسایلی که به‌آسانی قابل تشخیص هستند و نوعی تکرار قانونی در برخی از اجزای آن‌ها، از دیگر مسایل متمایزشان می‌کند.
رهیافت جست و جوی نامتغیرها با استفاده از تکرار مذکور در مسایل، حل آن‌ها را سهل و آسان می‌نماید. ما برآنیم تا برای شناساندن این رهیافت، به‌ذکر راه‌حل‌های مسایلی که از این استراتژی بهره می‌برند، بپردازیم.

در حقیقت، آموزش حل مسأله، تنها از طریق حل مسایل آموخته می‌شود و این مهم می‌تواند با فراهم کردن استراتژی‌هایی از جانب معلمان ممکن گردد.
از این رهیافت، می‌توان در حل مسایل الگوریتمی (بازی‌ها، تبدیلات ، و ...) استفاده کرد و برای اجرای آن، توجه به‌نکات زیر و تشخیص آن‌ها ضروری است:
الف. چه چیزهایی همان گونه که بوده، باقی می‌ماند؟
ب. چه چیزهایی در تکاپوی تغییرات نامتغیر، باقی می‌ماند؟
سپس با بهره‌گیری از موارد فوق، به‌حل مسأله همت می‌گماریم.
مسأله ۱. میله‌ای به‌طول L سانتی‌متر به‌دیواری مطابق شکل ۱۲ تکیه دارد. میله سر می‌خورد. مکان هندسی نقطهٔ وسط میله را مشخص کنید.



شکل ۱۲

حل: در طی حرکت میله، نقطهٔ M_t وسط آن برحسب زمان t پس از شروع حرکت، تغییر می‌کند. اگر پاره‌خط OM_t را تا نقطهٔ C_t و به‌اندازه OM_t مطابق شکل امتداد دهیم، آن‌گاه چهارضلعی $OA_tC_tB_t$ یک مستطیل خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت

$$OM_t = \frac{OC_t}{۲} = \frac{A_tB_t}{۲} = \frac{L}{۲}$$

یا:

$$OM_t = \frac{L}{۲}$$

اینجا، OM_t با تغییر M_t نامتغیر باقی می‌ماند. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M_t یک ربع دایره به‌مرکز O و شعاع $\frac{L}{۲}$ است.

مسأله ۲. در جزیره‌ای ۴۵ سوسمار کوچک زندگی می‌کنند. از این تعداد، ۱۷ تای آن‌ها زرد، ۱۵ تا خاکستری و ۱۳ تا آبی هستند. سوسمارها سرگردانند. گاه به‌یکدیگر برخورد می‌کنند و در هر برخورد، فقط ۲ سوسمار حضور دارند. اگر دو سوسمار از یک رنگ به‌هم برخورد کنند، هر دو به‌رنگ سومی درمی‌آیند، (مثلاً اگر یک سوسمار زرد و یک سوسمار خاکستری با هم برخورد کنند، هر دوی آن‌ها به‌رنگ آبی تغییر می‌کنند.) آیا ممکن است این اتفاق بیفتد که در یک مورد خاص، همهٔ سوسمارها در جزیره، هم رنگ شوند؟

حل: فرض کنید پس از k برخورد ناهمرنگ، y_k زرد، g_k خاکستری و b_k آبی سوسمار در جزیره باقی می‌ماند. بگیریم

$$T_k = (y_k, g_k, b_k)$$

بنابر فرض مسأله، در برخورد ناهمرنگ $k+1$ام، سه‌تایی $T_{k+1} = (y_{k+1}, g_{k+1}, b_{k+1})$ با یکی از سه‌تایی‌های زیر برابر است:

$$(y_{k+1}+2, g_k-1, b_k-1), (y_k-1, y_k+2, b_k-1), (y_k-1, g_k-1, b_k+2)$$

با توجه به‌مطلب فوق، $y_{k+1} - g_{k+1}$ نیز به‌ترتیب با یکی از موارد زیر برابر است

$$y_k - g_k + 3, y_k - g_k - 3, y_k - g_k$$

در نتیجه، برای هر $k = 0, 1, 2, \cdots$، داریم:

$$y_{k+1} - g_{k+1} \equiv y_k - g_k (mod 3) \qquad (1)$$

یعنی برای هر n برخورد ناهمرنگ، باقی مانده تقسیم $y_n - g_n$ بر ۳، ثابت (نامتغیر) باقی می‌ماند.
اما داریم $y_0 - g_0 = 17 - 15 = 2$. پس برای هر n برخورد ناهمرنگ

$$y_n - g_n 3 \equiv 2 (mod 3)$$

حال اگر تمام سوسمارها پس از m برخورد ناهمرنگ، همرنگ شوند، آن‌گاه $y_m - g_m$ برابر ۴۵ یا ۰ یا ۴۵− خواهد بود و این با $y_m - g_m \equiv 2$ تناقض دارد. پس نتیجه می‌گیریم که سوسمارها هیچ وقت هم‌رنگ نخواهند شد.

مسأله ۳. a و b دو عدد مثبت هستند و $a > b$. دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ چنین توصیف شده‌اند

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad (n \geq 1)$$

(x_{n+1} واسطهٔ حسابی و y_{n+1} واسطهٔ توافقی x_n و y_n است.)
ثابت کنید هر دو دنباله هم‌گرا هستند و $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab}$

حل: از فرض مسأله، رابطهٔ زیر به‌دست می آید
به‌ازای هر n

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n$$

از طرفی $x_1y_1 = ab$. در نتیجه، برای هر n داریم $x_ny_n = ab$
یعنی عبارت x_ny_n با تغییر n، نامتغیر باقی می‌ماند. هم‌چنین، برای هر n داریم

$$\frac{x_n + y_n}{2} > \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \Longrightarrow x_{n+1} > y_{n+1}$$

چون $x_1 > y_1$، در نتیجه برای هر n، $x_n > y_n$.
اما برای هر n داریم $x_n > x_{n+1}, y_{n+1} > y_n$ زیرا

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{x_n - y_n}{2} > 0, y_{n+1} - y_n = \frac{2x_ny_n}{x_n + y_n} - y_n = \frac{y_n(x_n - y_n)}{x_n + y_n} > 0$$

پس

$$a = x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > y_n > \cdots > y_1 = b$$

و

$$a > x_n > x_{n+1} > y_{n+1} > y_n > b$$

این رابطه نشان می‌دهد دنباله‌های $\{x_n\}, \{y_n\}$ یکنوا و کراندار هستند. در نتیجه همگرا هستند.
فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ پس می‌توان نوشت

$$x_ny_n = ab \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab \Longrightarrow \alpha\beta = ab$$
$$2x_{x+1} = x_n + y_n \Longrightarrow 2\lim x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \Longrightarrow 2\alpha = \alpha + \beta$$

در نتیجه $\alpha = \beta$ و $\alpha^2 = ab$
از طرفی $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$، بنابراین $\alpha = \sqrt{ab}$ و حکم ثابت است.

۱۹ رهیافت نزول نامتناهی فرما

این رهیافت که ریشه در قدیمی‌ترین روش‌های اثبات دارد و قدمت آن به‌فیثاغورسی‌های سدهٔ پنجم قبل از میلاد باز می‌گردد، ابزاری نیرومند برای حل و پاسخگویی به‌دامنهٔ وسیعی از مسایل است.
فرما (١٦٦٥—١٦٠١) این روش را مجدداً کشف کرد و بازشناساند و آن را روش کاهش نامتناهی نامید و این روش، به‌نام فرما، ثبت شد.
فرما در آخرین سال‌های زندگی‌اش، مقاله‌ای نوشت و طی آن نوشتهٔ طولانی، تمام کشفیات خود را دربارهٔ نظریهٔ اعداد، به‌طور اجمالی و خلاصه ذکر کرد و اظهار داشت که هر چه کرده، همه از برکات این روش بوده و کشفیات خود را مرهون آن است.
این روش، به‌ویژه برای اثبات گزاره‌های منفی مانند «غیر قابل حل بودن یک معادله» یا «غیر ممکن بودن یک ترکیب و ساختار»، به‌کار می‌رود.

ایدهٔ اصلی این روش چنین است:
فرض کنید که یک مسأله مشخص، راه حلی مانند S دارد. با استفاده از این روش، یک دنبالهٔ نامتناهی از راه‌حل‌های مختلف شکل می‌گیرد. از این گذشته، ماهیت مسأله حاکی از آن است که دنبالهٔ راه‌حل‌ها، باید یک جملهٔ پایانی داشته باشد. این تناقض ثابت می‌کند که مسأله راه‌حل ندارد.
نمونه کار این روش را در اثبات عدم وجود جواب یک معادله به‌شرح زیر می‌آوریم
به‌عنوان مثال، فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که معادلهٔ چند مجهولی زیر در مجموعه اعداد صحیح و مثبت، فاقد جواب است.

$$F(x, y, z, \cdots) = 0 \qquad (1)$$

ابتدا فرض می‌کنیم اعداد صحیح و مثبت a_1، b_1 و ... وجود دارند که در معادلهٔ (۱) صدق کنند.
به‌دنبال این مطلب، ثابت می‌شود اعداد صحیح و مثبت a_2، b_2 و ... با شرط $a_2 < a_1$، $b_2 < b_1$ و ... وجود دارند به‌نحوی که در معادلهٔ (۱) هم صدق کنند. با تکرار این شیوه، دنباله‌های نزولی و نامتناهی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و ... از اعداد طبیعی به‌دست می‌آیند که هر کدام، با توجه به آنچه گفته شد، با اصل «هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی، عضو ابتدا دارد» در تناقض است. این موضوع بیانگر این مطلب است که معادلهٔ (۱) فاقد جواب است.
مسایل زیر، کاربرد بیشتر رهیافت نزول نامتناهی فرما را نشان می‌دهد
مسأله ۱. ثابت کنید که معادله زیر در مجموعهٔ اعداد طبیعی، جواب ندارد.

$$a^2 = ab + b^2 \qquad (1)$$

حل: فرض کنید اعداد طبیعی a_1 و b_1 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. پس

$$a_1^2 = a_1 b_1 + b_1^2 \qquad (2)$$

a_1 و b_1 هر دو زوج هستند، زیرا اگر زوج نباشند، یک طرف (۲) زوج و طرف دیگر آن فرد خواهد بود و این یک تناقض است. پس

$$a_1 = 2a_2,\quad b_1 = 2b_2,\quad a_2 < b_1,\quad b_2 < b_1$$

اکنون در معادلهٔ (۲) به جای a_1 و b_1 به‌ترتیب $2a_2$ و $2b_2$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$4a_2^2 = 4a_2 b_2 + 4b_2^2$$

یا

$$a_2^2 = a_2 b_2 + b_2^2$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که اعداد طبیعی a_2 و b_2 جواب دیگر معادلهٔ (۱) هستند. اگر ما این روش را مرتباً تکرار کنیم، دو دنباله نامتناهی و نزولی $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ از اعداد طبیعی به‌دست می‌آید به‌طوری که هر زوج a_i و b_i، $i = 1, 2, \cdots$ جوابی برای معادلهٔ (۱) است. هر کدام از این دنباله‌ها با اصل «هر

زیرمجموعه از اعداد طبیعی، عضو ابتدا دارد» در تناقض است. پس معادلهٔ (۱) در مجموعه اعداد طبیعی، فاقد جواب است.

تعریف: به‌نقطهٔ A در صفحه نقطه مشبک گویند اگر و تنها اگر، طول و عرض A اعداد صحیحی باشند.

مسأله ۲. ثابت کنید پنج ضلعی منتظمی در صفحه نمی‌توان یافت که رأس‌های آن مشبک باشند. **حل:** فرض کنید پنج‌ضلعی منتظم $P_۱ = A_۱B_۱C_۱D_۱E_۱$ وجود دارد که هر رأس آن مشبک باشد. بردارهای $A_۱A_۲$، $B_۱B_۲$، $C_۱C_۲$، $D_۱D_۲$ و $E_۱E_۲$ را طوری رسم می‌کنیم که

$$E_۱E_۲ = A_۱D_۱ \quad , \quad D_۱D_۲ = E_۱A_۱ \quad , \quad C_۱C_۲ = D_۱E_۱$$
$$B_۱B_۲ = C_۱D_۱ \quad , \quad A_۱A_۲ = B_۱C_۱$$

پنج‌ضلعی منظم $P_۲ = A_۲B_۲C_۲D_۲E_۲$ با رأس‌های مشبک حاصل می‌شود. اگر این شیوه را روی هر پنج‌ضلعی به‌دست آمده تکرار کنیم، دنبالهٔ نامتناهی $\{P_n\}$ از پنج‌ضلعی‌های منتظم با رأس‌های مشبک به‌دست می‌آید. اگر طول ضلع هر P_n را با a_n $(n = ۱, ۲, \cdots)$ نمایش دهیم، آن‌گاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی و نامتناهی از اعداد طبیعی خواهد بود که این با اصل «هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی عضو ابتدا دارد» تناقض دارد. در نتیجه حکم مسأله برقرار است.

مسأله ۳. آیا می‌توان یک مکعب را به‌تعداد متناهی مکعب‌های کوچک‌تر با اندازه‌های مختلف تقسیم کرد؟

حل: فرض کنید مکعب $C = KLMNOPQR$ را بتوان به‌تعداد متناهی مکعب c_i $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ با اندازه‌های مختلف تقسیم کرد. بنابراین، بعضی از c_iها، وجه $KLMN$ این مکعب را می‌پوشانند. در نتیجه این وجه توسط تعداد متناهی مربع S_j $j = ۱, ۲, \cdots, k$ با اندازه‌های مختلف تقسیم می‌شود. کوچک‌ترین این مربع‌ها را با حرف S_m نمایش می‌دهیم $(S_m = K_mL_mM_mN_m)$ و نشان می‌دهیم که S_m، درون وجه $KLMN$ قرار دارد. حال مکعب $C_m = K_mL_mM_mN_mO_mP_mQ_mR_m$ (با وجه S_m) را در نظر می‌گیریم. واضح است که مربع S_m با مربع‌هایی احاطه شده است که هر کدام از آن‌ها از S_m بزرگ‌ترند. بنابراین، مکعب‌های متناظر با این مربع‌ها بزرگ‌تر از مکعب C_m خواهند بود. از این رو، وجه $O_mP_mQ_mR_m$ در حفره‌ای از مکعب‌های C_i $(i = ۱, ۲, ۳, \cdots, n)$ قرار دارد. در نتیجه روی این وجه، تعداد متناهی مکعب که هر یک از آن‌ها کوچکتر از C_m است جا دارد. این مکعب‌ها وجه مذکور را به‌مربعات مختلف تقسیم می‌کنند که کوچک‌ترین آن‌ها، داخل این وجه قرار دارد. اگر مکعب متناظر با کوچک‌ترین مربع را با C'_m نمایش دهیم، خواهیم داشت: $C'_m < C_m$. حال اگر این روش را به‌طول متوالی تکرار کنیم، یک دنبالهٔ نامتناهی و نزولی $C_m, C'_m, C''_m, \cdots$ از مکعب‌های C_i به‌وجود می‌آید که این با متناهی بودن مکعب‌ها تناقض دارد. در نتیجه، نمی‌توان یک مکعب را به‌مکعبات کوچک‌تر و با اندازه‌های مختلف تقسیم کرد.

مراجع

[1] L.C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag, 1983.

[2] S.G. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, American Mathematical Society, 1997.

[3] R. Honsberger, *From Erdös To Kiev: Problems of Olympiad Caliber*, The Mathematical Association of America, 1996.

[۴] سید عباس موسوی، حل مسأله و رهیافت‌ها، *پایان‌نامه کارشناسی ارشد، (دانشگاه شهید بهشتی)*، ۱۳۸۴.

[۵] علی روزدار، نقش رهیافت‌ها در آموزش ریاضیات متوسطه از طریق حل مسأله، *پایان‌نامه کارشناسی ارشد، (دانشگاه شهید بهشتی)*، ۱۳۸۳.

[٦] مرتضی بیات و زهرا خاتمی، *راهبرد رسم شکل در حل مسایل ریاضی*، رشد آموزش ریاضی، شماره ۹۴، ۱۳۸۷، صص ۲۹—۲۲.