به نام خدا

نام کتاب:المپیاد های جهانی ریاضی
2010-1960

تهیه کننده:ناصر فرهادی

Email: Koreh@live.com

Weblog: imo.blogfa.com

Naser farhadi

دومین المپیاد جهانی ریاضی

1960

1) عدد سه رقمی N را طوری پیدا کنید که اولا بر 11 بخش پذیر باشد، ثانیا عدد $\frac{N}{11}$ با مجموع مربع های رقم های عدد N برابر باشد.

2) نابرابری زیر، به ازای کدام مقدار های حقیقی x برقرار است:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

3) وتر BC به طول a، از مثلث قائم الزاویه ی ABC را به n بخش برابر تقسیم کرده ایم (n عددی است فرد). α را زاویه ای می گیریم که رأس آن A باشد، و دو ضلع آن از دو انتهای پاره خط وسطی (که از تقسیم BC به دست آمده است) بگذرد. اگر طول ارتفاع وارد بر وتر در مثلث ABC برابر h باشد، ثابت کنید:

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

4) از مثلث ABC ارتفاع های h_a و h_b (که از رأس های A و B می گذرند) و میانه ی m_a (که از رأس A می گذرد) معلوم اند. مثلث را رسم کنید.

5) مکعب $ABCDA'B'C'D'$ داده شده است (دو وجه ABCD و $A'B'C'D'$ رو به روی یکدیگر اند):

الف) اگر X نقطه ای از AC و Y نقطه ای از $B'D'$ باشد، مکان هندسی وسط پاره خط راست XY را پیدا کنید.

ب) X و Y را همان نقطه های بخش الف بگیرید. مطلوب است مکان هندسی نقطه ی Z از پاره خط راست XY به شرطی که داشته باشیم:

$$ZY = 2XZ$$

6) مخروط دواری را با کره ی محاط در آن که بر قاعده ی مخروط مماس است در نظر بگیرید. استوانه ی محیط بر این کره راف که یکی از قاعده های آن بر قاعده ی مخروط منطبق است می سازیم. اگر V_1 حجم مخروط دوار و V_2 حجم استوانه باشد،

الف) ثابت کنید $V_1 \neq V_2$

ب) کمترین مقدار عدد k را پیدا کنید به نحوی که داشته باشیم: $V_1 = kV_2$. در این حالت زاویه ای را رسم کنید که مقابل به قطر قاعده ی مخروط و رأس آن بر رأس مخروط منطبق باشد.

7) ذوزنقه ی متساوی الساقینی، با قاعده های a، و c و ارتفاع h داده شده است:

الف) همه ی نقطه های P واقع بر محور تقارن ذوزنقه را طوری پیدا کنید که از آن جا، دو ساق ذوزنقه به زاویه ی قائمه دیده شوند.

ب) فاصله ی نقطه ی P را از هر یک از دو قاعده پیدا کنید.

ج) برای وجود نقطه های P، چه شرط هایی لازم است؟ (درباره ی حالت های مختلفی که ممکن است پیش آید، بحث کنید.)

سومین المپیاد جهانی ریاضی

1961

1) اگر a و b مقدار های ثابتی باشند، این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

a و b با چه شرطی سازگار باشند تا x، y و z (جواب دستگاه)، عدد های مثبت و متمایزی باشند؟

2) اگر a، b و c طول سه ضلع و T مقدار مساحت مثلثی باشند، ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}T$$

در چه حالتی، علامت برابری درست است؟

3) معادله ی $\cos^n x - \cos^n x = 1$ را حل کنید (n، عددی است طبیعی).

4) مثلث $P_1P_2P_3$ و نقطه ی P واقع در داخل مثلث، مفروض است. خط های راست P_1P، P_2P و P_3P ضلع های رو به رو را به ترتیب در نقطه های Q_1، Q_2 و Q_3 قطع می کنند. ثابت کنید از بین عدد های $\frac{P_1P}{PQ_1}$، $\frac{P_2P}{PQ_2}$ و $\frac{P_3P}{PQ_3}$، دست کم یکی کوچکتر یا برابر 2 و دست کم یکی بزرگ تر یا برابر 2 است.

5) اگر M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، به فرض معلوم بودن $AC=b$، $AB=c$، و $\hat{A}MB=w$، مثلث ABC را رسم کنید؛ w را کوچک تر از 90° بگیرید. ثابت کنید، مسأله وقتی، و تنها وقتی جواب دارد که داشته باشیم:

$b\tan\frac{w}{2} \leq c < b$. در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

6) صفحه ی ε و سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست A، B و C را در یک طرف صفحه ی ε در نظر می گیریم. فرض می کنیم صفحه ای که از این سه نقطه می گذرد با صفحه ی ε موازی نباشد. سه نقطه ی دلخواه A'، B' و C' را روی صفحه ی ε انتخاب می کنیم و وسط پاره خط های AA'، BB' و CC' را به ترتیب، L، M و N می نامیم. (جای نقطه های A'، B' و C' دلخواه است، ولی طوری انتخاب شده اند که سه نقطه ی L، M و N تشکیل یک مثلث می دهند.) اگر G مرکز هندسی مثلث LMN باشد وقتی که نقطه های A'، B' و C' به طور مستقل روی صفحه ی ε حرکت کنند، مکان هندسی نقطه ی G را پیدا کنید. [مرکز هندسی یک مثلث، همان گرانیگاه یا نقطه ی برخورد میانه های آن است.]

توضیح: از آن جا که برای هر سه نقطه ی دلخواه، می توان مرکز هندسی را تعریف کرد (و لو آن که روی یک خط راست باشند، یا دو نقطه و یا هر سه نقطه بر هم منطبق باشند) مسأله را می توان بدون شرطی که در داخل پرانتز آمده است، حل کرد.

چهارمین المپیاد جهانی ریاضی

1962

1) کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که:

الف) در دستگاه عدد نویسی به مبنای ۱۰، به رقم 6 ختم شود؛

ب) اگر رقم 6 را از انتهای عدد برداریم و در ابتدای آن قرار دهیم، عدد حاصل، چهار برابر عدد نخستین باشد.

2) همه ی عدد های حقیقی x را پیدا کنید که در نامعادله ی زیر صدق کنند:

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

3) مکعب $ABCDA'B'C'D'$ مفروض است (ABCD و $A'B'C'D'$، به ترتیب، قاعده های بالا و پایین مکعب اند و $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). نقطه ی X روی محیط مربع ABCD و در جهت ABCDA، و نقطه ی Y روی محیط مربع $B'C'CB$ و در جهت $B'C'CBB'$ حرکت می کند. سرعت هر دو نقطه ثابت و در ضمن با یکدیگر برابر است. دو نقطه ی X و Y در یک لحظه و به ترتیب از نقطه های A و B آغاز به حرکت می کنند.

مکان هندسی وسط پاره خط راست XY را پیدا و رسم کنید.

4) معادله ی $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$ را حل کنید.

5) روی محیط دایره ی K، سه نقطه ی A، B و C داده شده است. به کمک پرگار و خط کش، نقطه ی چهارم D را روی محیط دایره طوری پیدا کنید که چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محیطی باشد.

6) مثلث متساوی الساقین ABC مفروض است. شعاع دایره ی محیطی مثلث برابر r و شعاع دایره ی محاطی آن برابر ρ است. ثابت کنید، فاصله ی بین مرکز های دو دایره برابر است با $d=\sqrt{r(r-2\rho)}$.

7) چهاروجهی SABC چنان است که 5 کره بر یال های SA، SB، SC، AB، BC و CA و یا بر امتداد آن ها مماس اند.

ثابت کنید:

الف) چهاروجهی SABC منتظم است.

ب) برعکس، ثابت کنید برای هر چهاروجهی منتظم، چنین 5 کره ای وجود دارد.

پنجمین المپیاد جهانی ریاضی

1963

1) همه ی ریشه های حقیقی معادله ی $\sqrt{x^{۲}-p}+۲\sqrt{x^{۲}-۱}=x$ را پیدا کنید (p، پارامتری حقیقی است).

2) مطلوب است مکان هندسی رأس زاویه ی قائمه ای، در فضا، به شرطی که بدانیم یکی از ضلع های آن از نقطه ی مفروض A می گذرد و ضلع دیگرش، دست کم، یک نقطه ی مشترک با پاره خط BC دارد.

3) ثابت کنید اگر در یک n ضلعی محدب، همه ی زاویه ها برابر باشند و برای طول های ضلع های متوالی آن داشته باشیم:

$$a_{۱}\geq a_{۲}\geq a_{۳}\geq\cdots\geq a_{n}$$

آن وقت، خواهیم داشت: $a_{۱}=a_{۲}=a_{۳}=\cdots=a_{n}$

4) اگر y پارامتر باشد، همه ی جواب های $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$، $x_{۴}$ و $x_{۵}$ را از دستگاه زیر پیدا کنید:

$$\begin{cases} x_{۵}+x_{۲}=yx_{۱} \\ x_{۱}+x_{۳}=yx_{۲} \\ x_{۲}+x_{۴}=yx_{۳} \\ x_{۳}+x_{۵}=yx_{۴} \\ x_{۴}+x_{۱}=yx_{۵} \end{cases}$$

5) ثابت کنید: $\cos\frac{\pi}{۷}-\cos\frac{۲\pi}{۷}+\cos\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۱}{۲}$

6) دانش آموزان A، B، C، D و E در یک مسابقه شرکت کردند. کسی نتیجه ی مسابقه را به ردیف A، B، C، D و E پیش بینی کرد، ولی بعد از انجام مسابقه معلوم شد که هیچ کدام از شرکت کنندگان، در مقامی که او پیش بینی کرده بود، قرار نگرفتند و در ضمن هیچ دو دانش آموزی به ردیفی که او معین کرده بود پشت سر هم واقع نشدند. کس دیگری ردیف برندگان را به صورت D، A، E، C و B پیش بینی کرد. معلوم شد که مقام دو دانش آموز و همین طور ردیف دو زوج را (دو دانش آموزی که پشت سر هم قرار گرفته اند)، درست پیش بینی کرده است. نتیجه ی واقعی مسابقه چه بوده است؟

Naser farhadi

ششمین المپیاد جهانی ریاضی

1964

1)

الف) همه ی عدد های درست و مثبت n را طوری پیدا کنید که برای هر کدام از آن ها عدد 2^n-1 بر 7 بخش پذیر باشد.

ب) ثابت کنید برای هیچ یک از عدد های درست و مثبت n، عدد 2^n+1 نمی تواند بر 7 بخش پذیر باشد.

2) a، b، و c طول ضلع های یک مثلث اند. ثابت کنید:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$$

3) در مثلث ABC دایره ای محاط و سپس مماس هایی بر دایره رسم کرده ایم که با ضلع های مثلث مفروض موازی باشند. این مماس ها، سه مثلث جدید از مثلث ABC جدا می کنند. در هر یک از مثلث های جدید، دایره ای محاط کرده ایم . مجموع مساحت های این چهار دایره را بر حسب a، b و c (ضلع های مثلث) پیدا کنید.

4) 17 دانشمند به هم نامه نوشتند. موضوع نامه ها درباره ی سه زمینه ی علمی است. نامه های هر دو دانشمند به یکدیگر، تنها به یک زمینه ی علمی مربوط می شود. ثابت کنید تعداد دانشمندانی که در یک زمینه ی علمی به هم نامه نوشته اند از 3 کمتر نیست.

5) 5 نقطه روی یک صفحه داده شده اند. بین خط های راستی که این پنج نقطه را به هم وصل کرده اند، هیچ دو خط راستی موازی با هم یا عمود بر هم و یا منطبق بر هم نیستند. از هر نقطه، عمود هایی بر خط های راستی رسم کرده ایم که چهار نقطه ی دیگر را به هم وصل کرده اند. بدون در نظر گرفتن 5 نقطه ی مفروض، این خط های راست عمود، حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟

6) چهاروجهی ABCD مفروض است. رأس D را به نقطه ی D_1 مرکز ثقل قاعده وصل کرده ایم. از رأس های مثلث ABC، خط های راستی موازی DD_1 کشیده ایم تا صفحه های وجه های رو به رو را در نقطه های A_1، B_1 و C_1 قطع می کنند. ثابت کنید، حجم چهاروجهی ABCD، برابر است با $\frac{1}{3}$ حجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$. اگر D_1 نقطه ی دلخواهی در داخل مثلث ABC باشد، آیا باز هم حکم درست است؟

هفتمین المپیاد جهانی ریاضی

1965

1) همه ی مقدار های حقیقی x را در بازه ی $x \in [0, 2\pi]$ به نحوی پیدا کنید که در نابرابری های زیر صدق کنند:

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$$

2) این دستگاه با مجهول های x_1، x_2 و x_3 داده شده است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

که ضریب های آن با این شرط ها سازگارند:

الف) a_{11}، a_{22} و a_{33} عدد هایی مثبت اند؛

ب) بقیه ی ضریب ها، عدد هایی منفی اند؛

ج) در هر معادله، مجموع ضریب ها، عددی است مثبت.

ثابت کنید $x_1 = x_2 = x_3 = 0$، یگانه جواب دستگاه است.

3) هرم ABCD داده شده است. می دانیم طول یال AB برابر a، طول یال CD برابر b فاصله ی بین دو خط راست متنافر AB و CD برابر d و زاویه ی بین این دو خط راست برابر w است. هر م را به وسیله ی صفحه ی p موازی با یال های AB و CD به دو بخش تقسیم کرده ایم. مطلوب است نسبت حجم این دو بخش، به شرطی که نسبت فاصله ی از AB تا صفحه ی p به فاصله ی CD تا صفحه ی p برابر k باشد.

4) چهار عدد حقیقی x_1، x_2، x_3 و x_4 را طوری پیدا کنید که مجموع هر کدام از آن ها با حاصلضرب بقیه، برابر 2 باشد.

5) در مثلث OAB می دانیم: $\hat{A}OB = \alpha < 90^\circ$. از نقطه ی دلخواه M واقع بر محیط و یا داخل مثلث OAB ($M \neq O$)، عمود MP را بر OA و عمود MQ را بر OB رسم کرده ایم. H را نقطه ی برخورد ارتفاع های مثلث OPQ می گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه ی H، وقتی که:

الف) نقطه ی M روی پاره خط AB حرکت کند.

ب) نقطه ی M در بخش درونی مثلث OAB حرکت کند.

6) در صفحه، به تعداد $n \ge 3$ نقطه داده شده است. dرا بیشترین فاصله ی بین دو نقطه ی دلخواه، از این n نقطه می گیریم. فاصله ای از دو نقطه را که برابر d باشد، قطر این دستگاه نقطه ها می نامیم. ثابت کنید، تعداد این قطر ها نمی تواند از n بیشتر باشد.

هشتمین المپیاد جهانی ریاضی

1966

1) در المپیاد ریاضی سه مسأله ی A، B و C داده شده است. 25 دانش آموز دست کم یکی از این مسأله ها را حل کرده اند. از بین کسانی که مسأله ی A را حل نکرده بودند، تعداد دانش آموزانی که مسأله ی B را حل کرده بودند، دو برابر تعداد دانش آموزانی بود که موفق به حل مسأله ی C شده بودند. تعداد دانش آموزانی که تنها مسأله ی A را حل کردند، یک نفر بیشتر از بقیه ی دانش آموزانی بود که مسأله ی A را حل کرده بودند. چند نفر تنها مسأله ی B را حل کرده اند، به شرطی که بدانیم، به اندازه ی نیمی از کسانی که تنها یک مسأله را حل کرده اند، موفق به حل مسأله ی A نشده اند؟

2) ثابت کنید اگر ضلع های a، b، c و زاویه های مقابل آن ها α، β و γ از مثلثی در رابطه ی

$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$$

صدق کنند، مثلث مفروض متساوی الساقین است.

3) ثابت کنید، مجموع فاصله های از مرکز کره ی محیطی یک چهاروجهی منتظم تا رأس های چهاروجهی از مجموع فاصله های هر نقطه ی دیگری تا رأس های آن کمتر است.

4) درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

که در آن، n عددی طبیعی است و

$$(\lambda\in\mathbb{Z},\ k=0,1,2,\cdots,n)\ x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$$

5) این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1\end{cases}$$

که در آن، a_1، a_2، a_3، a_4، عدد های حقیقی مختلفی هستند.

6) نقطه های M، K و L را، به ترتیب، روی ضلع های AB، BC و CA از مثلث ABC در نظر گرفته ایم (به نحوی که روی رأس ها نباشند). ثابت کنید دست کم مساحت یکی از مثلث های MAL، KBM و LCK از $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC تجاوز نمی کند.

نهمین المپیاد جهانی ریاضی

1967

1) در متوازی الاضلاع ABCD، مثلث ABC، دارای زاویه های حاده است و داریم:

$$|AB| = a \ , \ |AD| = 1 \ , \ \hat{B}AD = \alpha$$

ثابت کنید چهار دایره ی K_A، K_B، K_C و K_D به شعاع واحد و به مرکز های A، B، C، و D وقتی و تنها وقتی متوازی الاضلاع را می پوشانند که داشته باشیم:

$$a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

2) در یک چهاروجهی تنها طول یکی از یال ها از واحد بزرگ تر است. ثابت کنید حجم این چهاروجهی از $\frac{1}{8}$ تجاوز نمی کند.

3) k، m و n عدد های مثبت و درست اند و $m+k+1$ عددی اول و بزرگ تر از $n+1$ است. اگر فرض کنیم $c_s = s(s+1)$، ثابت کنید حاصلضرب:

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k)$$

بر حاصلضرب $c_1 c_2 \cdots c_n$ بخش پذیر است.

4) دو مثلث $A_0B_0C_0$ و $A_1B_1C_1$، با زاویه های حاده، داده شده اند. مثلث ABC را متشابه با مثلث $A_1B_1C_1$ (A متناظر A_1، B متناظر B_1 و C متناظر C_1) رسم کنید، به نحوی که بر مثلث $A_0B_0C_0$ محیط بوده و داشته باشیم: $C_0 \in AB$، $A_0 \in BC$ و $B_0 \in CA$. مثلث ABC را طوری انتخاب کنید که مساحت آن حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد.

5) دنباله ی $\{c_n\}$ را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\
c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

که در آن a_1، a_2، .... و a_8 عدد هایی حقیقی اند و با هم برابر صفر نیستند. می دانیم در بین جمله های این دنباله بی نهایت جمله ی برابر صفر وجود دارد. همه ی مقدار های n را پیدا کنید که برای آن ها داشته باشیم: $c_n = 0$.

6) در یک جشن ورزشی که n روز طول کشید، m مدال تقسیم کردند: روز اول 1 مدال و $\frac{1}{7}$ بقیه $m-1$ مدال؛ روز دوم 2 مدال و $\frac{1}{7}$ بقیه ی مدال ها؛ ...؛ و بالاخره در روز n ام، باقی مانده ی m مدال. جشن ورزشی چند روز ادامه داشته است و روی هم چند مدال بین ورزشکاران تقسیم شده است.

دهمین المپیاد جهانی ریاضی

1968

1) ثابت کنید تنها یک مثلث وجود دارد به نحوی که ضلع های آن سه عدد طبیعی متوالی باشند و یکی از زاویه های آن دو برابر دیگری شود.

2) همه ی عدد های درست و مثبت x را پیدا کنید که در هر کدام از آن ها، حاصلضرب رقم ها – در مبنای دهدهی – برابر $x^۲ - ۱۰x - ۲۲$ شود.

3) ثابت کنید، دستگاه معادله های با n مجهول $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n

$$\begin{cases} ax_۱^۲ + bx_۱ + c = x_۲ \\ ax_۲^۲ + bx_۲ + c = x_۳ \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ ax_n^۲ + bx_n + c = x_۱ \end{cases}$$

الف) در حالت $(b-۱)^۲ - ۴ac < ۰$، جواب ندارد؛

ب) در حالت $(b-۱)^۲ - ۴ac = ۰$، تنها یک جواب دارد؛

ج) در حالت $(b-۱)^۲ - ۴ac > ۰$، بیش از یک جواب دارد. همه ی عدد های مورد بررسی حقیقی اند و $a \neq ۰$.

4) ثابت کنید در هر چهارضلعی، رأسی وجود دارد که به کمک سه پاره خطی که در این رأس به هم می رسند، بتوان یک مثلث ساخت.

5) تابع f که به ازای همه ی مقدار های حقیقی x معین است و مقدار های حقیقی را قبول می کند، برای همه ی مقدار های x، با شرط زیر سازگار است (a عددی است مخالف صفر):

$$f(x+a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^۲}$$

الف) ثابت کنید تابع f متناوب است (یعنی عدد $b \neq ۰$ یافت می شود، به نحوی که برای همه ی مقدار های x داشته باشیم: $f(x+b) = f(x)$؛

ب) نمونه ای از تابع f را (که مخالف با مقدار ثابت باشد)، به ازای $a = ۱$ پیدا کنید.

6) این مجموع را محاسبه کنید:

$$\left[\frac{n+۱}{۲}\right] + \left[\frac{n+۲}{۲^۲}\right] + \cdots + \left[\frac{n+۲^k}{۲^{k+۱}}\right] + \cdots$$

که در آن، n عددی است طبیعی. رابطه ای را که به دست می آورید ثابت کنید.

(در این جا، $[x]$ به معنای بخش درست عدد x است، یعنی بزرگ ترین عدد درستی که از x تجاوز نمی کند.)

یازدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1969

1) ثابت کنید مجموعه ای نامتناهی از عدد های طبیعی a وجود دارد که به ازای هر کدام از آن ها عدد $z = n^۴ + a$ برای هیچ کدام از عدد های طبیعی n اول نیست.

2) $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را عدد های حقیقی ثابت و x را متغیر حقیقی می گیریم و فرض می کنیم:

$$f(x) = \cos(a_۱ + x) + \frac{\cos(a_۲ + x)}{۲} + \frac{\cos(a_۳ + x)}{۲^۲} + \cdots + \frac{\cos(a_n + x)}{۲^{n-۱}}$$

ثابت کنید از $f(x_۱) = f(x_۲) = ۰$ نتیجه می شود: $x_۱ - x_۲ = m\pi$ (m عددی درست است).

3) برای هر یک از مقدار های $k = ۱,۲,۳,۴,۵$ مطلوب است شرط لازم و کافی برای عدد $a > ۰$ به نحوی که یک چهاروجهی وجود داشته باشد که k یال آن به طول برابر a و بقیه ی $۶-k$ یال آن به طول برابر واحد باشد.

4) نیم دایره ی γ به قطر AB مفروض است. نقطه ی C روی این نیم دایره، غیر از نقطه های A و B، قرار دارد. تصویر قائم C بر AB را D می نامیم. سه دایره ی $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ را مماس بر AB در نظر می گیریم: $\gamma_۱$ دایره ی محاطی مثلث ABC است و دو دایره ی $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ بر پاره خط CD و نیم دایره ی γ مماس اند. ثابت کنید سه دایره ی $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ مماس مشترک دیگری هم دارند.

5) روی صفحه n نقطه داده شده است که هیچ سه تایی از آن ها بر یک خط راست واقع نیستند ($n > ۴$). ثابت کنید دست کم به تعداد $C_{n-۳}^{۲}$ چهارضلعی محدب می توان پیدا کرد که رأس های آن ها در چهار نقطه از نقطه های مفروض واقع باشند.

6) ثابت کنید با توجه به شرط های $x_۱ > ۰$، $x_۲ > ۰$، $x_۱y_۱ - z_۱^۲ > ۰$ و $x_۲y_۲ - z_۲^۲ > ۰$ داریم:

$$\frac{۸}{(x_۱ + y_۱)(x_۲ + y_۲) - (z_۱ + z_۲)^۲} \le \frac{۱}{x_۱y_۱ - z_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲y_۲ - z_۲^۲}$$

شرط لازم و کافی را برای این که نابرابری به برابری تبدیل شود پیدا کنید.

دوازدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1970

1) نقطه ی M را روی ضلع AB از مثلث ABC در نظر می گیریم، اگر r_1، r_2 و r_3 را شعاع های دایره های محاطی داخلی مثلث های AMC، BMC و ABC بوده و q_1، q_2 و q_3 را شعاع های دایره های محاطی خارجی همان سه مثلث واقع در داخل زاویه ی ACB فرض کنیم ثابت کنید:

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r_3}{q_3}$$

2) a، b و n، سه عدد درست بزرگ تر از واحد اند. A_{n-1} و A_n را عدد هایی در دستگاه عدد نویسی به مبنای a، و B_{n-1} و B_n را عدد هایی در دستگاه عدد نویسی به مبنای b می گیریم و فرض می کنیم:

$$\begin{cases}A_n=\overline{x_n x_{n-1}\cdots x_0}\\ A_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0}\end{cases};\quad\begin{cases}B_n=\overline{x_n x_{n-1}\cdots x_0}\\ B_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0}\end{cases}$$

($x_n\neq 0$ و $x_{n-1}\neq 0$). ثابت کنید نابرابری $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$، وقتی و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a>b$.

3) برای عدد های حقیقی a_0، a_1، a_2، ...، a_n، ... داریم:

$$1=a_0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots$$

عدد های b_1، b_2، ...، b_n، ... با رابطه ی زیر تعریف شده اند:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

الف) ثابت کنید برای هر مقداری از n داریم: $0\le b_n<2$

ب) با شرط $0\le c<2$، ثابت کنید عدد های a_0، a_1، a_2، ... با ویژگی های بالا یافت می شوند که برای مقدار های به اندازه ی کافی بزرگ n داشته باشیم: $b_n>c$

4) مجموعه ی عدد های درست و مثبت n را طوری پیدا کنید که برای هر کدام از آن ها بتوان مجموعه ی

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

را به دو مجموعه چنان افراز کرد که حاصلضرب عضو های یکی از آن ها، برابر با حاصلضرب عضو های دیگری باشد.

5) در چهاروجهی ABCD، زاویه ی BDC برابر است با ۹۰ درجه. اگر نقطه ی H پای عمود وارد از نقطه ی D بر صفحه ی ABC بر نقطه ی برخورد ارتفاع های مثلث ABC قرار گرفته باشد، ثابت کنید:

$$(AB+BC+CA)^2\le 6(AD^2+BD^2+CD^2)$$

برای کدام چهاروجهی، حالت نابرابری به برابری تبدیل می شود؟

6) ۱۰۰ نقطه روی یک صفحه داده شده اند، به نحوی که هیچ سه تایی از آن ها بر یک راستا نیستند. همه ی مثلث هایی را در نظر می گیریم که رأس های آن ها بر این نقطه ها منطبق باشند. ثابت کنید بیش از ۷۰ درصد این مثلث ها نمی توانند سه زاویه ی حاده داشته باشند.

سیزدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1971

1) a_1، a_2، ...، a_n عدد هایی حقیقی و دلخواه اند. ثابت کنید نابرابری زیر به ازای $n=3$ و $n=5$ همیشه برقرار است، ولی برای سایر مقدار های طبیعی $n>2$، همیشه برقرار نیست:

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geq 0$$

2) چندوجهی محدب P_1 را با 9 رأس A_1، A_2، ... و A_9 در نظر می گیریم. P_i را چندوجهی می گیریم که از انتقال رأس A_1 به A_i ($i=2,3,\cdots,9$) به دست آید. ثابت کنید دست کم دو تا از چندوجهی های P_1، ... و P_9 در یک نقطه ی داخلی مشترک اند.

3) ثابت کنید در مجموعه ی عدد های درست:

$$2^k-3 : k=2,3,\cdots$$

زیرمجموعه ای نامتناهی وجود دارد که هر دو عضو آن، نسبت به هم اول اند.

4) همه ی وجه های چهاروجهی ABCD، مثلث هایی با زاویه های حاده اند. X را نقطه ای از یال AB (غیر از دو نقطه ی A و B) و به همین ترتیب Y، Z و T را روی یال های BC، CD و AD در نظر می گیریم. به این ترتیب مسیری از یک چندضلعی بسته به صورت XYZTX به دست می آید.

ثابت کنید:

الف) اگر داشته باشیم: $\hat{D}AB+\hat{B}CD\neq\hat{C}DA+\hat{A}BC$، در بین مسیر های چندضلعی مسیری به طول می نیمم وجود ندارد.

ب) اگر داشته باشیم: $\hat{D}AB+\hat{B}CD=\hat{C}DA+\hat{A}BC$ آن وقت در بین مسیر های چندضلعی، بی نهایت مسیر به طول می نیمم وجود دارد که طول هر کدام از آن ها، برابر است با $2AC\sin\frac{\alpha}{2}$ که در آن:

$$\alpha=\hat{B}AC+\hat{C}AD+\hat{D}AB$$

5) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی m مجموعه ی متناهی S از نقطه های واقع بر یک صفحه وجود دارد به نحوی که برای هر نقطه ی A از مجموعه ی S درست m نقطه در S وجود دارد که از نقطه ی A به فاصله ی واحد اند.

6) $A=(a_{ij})$ ($\{i,j\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$) را ماتریسی مربعی می گیریم که عضو های آن عدد هایی درست و غیر منفی اند. ثابت کنید اگر برای یکی از عضو ها داشته باشیم $a_{ij}=0$ و مجموع عنصر های سطر iام و ستون j ام از n کوچک تر نباشد آن وقت مجموع همه ی عنصر های ماتریس از $\frac{n^2}{2}$ بزرگ تر و یا با آن برابر است.

چهاردهمین المپیاد جهانی ریاضی

1972

1) مجموعه ای از عدد های دو رقمی با ۱۰ عضو متمایز (در دستگاه عدد نویسی دهدهی) مفروض است. ثابت کنید که همیشه می توان دو زیرمجموعه ی جدا از هم، از این مجموعه انتخاب کرد به نحوی که مجموع عضو های آن ها با هم برابر باشند.

2) ثابت کنید به فرض $n \geq 4$ هر چهارضلعی محاطی را می توان به n چهارضلعی محاطی دیگر تقسیم کرد.

3) ثابت کنید به شرط اینکه عدد های m و n درست و غیر منفی باشند، مقدار $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ عددی درست است ($0!=1$).

4) دستگاه نامعادله های زیر را برای مجهول های x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 حل کنید:

$$\begin{cases}(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leq 0\\(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leq 0\\(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leq 0\\(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leq 0\\(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leq 0\end{cases}$$

(x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 عدد هایی حقیقی و مثبت اند).

5) f و g تابع هایی حقیقی اند که برای همه ی مقدار های حقیقی x و y تعریف شده اند و به ازای همه ی مقدار های x و y در معادله ی زیر صدق می کنند:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$$

ثابت کنید اگر $f(x)$ متحد با صفر نباشد و به ازای هر مقدار x داشته باشیم: $|f(x)|\leq 1$ آن وقت به ازای هر مقدار y خواهیم داشت $|g(y)|\leq 1$.

6) چهار صفحه ی متمایز و موازی هم داده شده اند. ثابت کنید، چهار وجهی منتظمی وجود دارد که هر رأس آن بر یکی از این چهار صفحه منطبق باشد.

پانزدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1973

1) نقطه ی O بر خط راست g واقع است. $\overrightarrow{OP_1}$، $\overrightarrow{OP_2}$، ...، $\overrightarrow{OP_n}$ بردار های واحدی هستند، به نحوی که نقطه های P_1، P_2، ...، P_n در صفحه ای شامل g و در یک طرف g قرار دارند. ثابت کنید، برای هر عدد فرد n، داریم:

$$\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}\right|\geq ۱$$

منظور از $\left|\overrightarrow{OM}\right|$، طول بردار $\overrightarrow{OM}$ است.

2) روشن کنید آیا مجموعه ی متناهی M شامل n نقطه از فضا وجود دارد که بر یک صفحه واقع نباشند و اگر دو نقطه ی A و B متعلق به M باشند، بتوان دو نقطه ی دیگر C و D متعلق به M پیدا کرد به نحوی که دو خط راست AB و CD موازی باشند، ولی منطبق بر هم نباشند.

3) مطلوب است حداقل مقدار $a^۲+b^۲$، به شرطی که a و b حقیقی اند و به ازای آن ها معادله ی $x^۴+ax^۳+bx^۲+ax+۱=۰$ دست کم یک ریشه ی حقیقی دارد.

4) سربازی باید عدم وجود مین را در قطعه زمینی به شکل مثلث متساوی الاضلاع و هم روی محیط آن، مورد تحقیق قرار دهد. شعاع عمل شناساگر مورد استفاده ی او، برابر است با نصف ارتفاع مثلث. اگر سرباز از یک رأس مثلث آغاز کند، چه مسیری را باید در نظر بگیرد تا کمترین فاصله را برای انجام مأموریت خود بپیماید؟

5) مجموعه ی غیر تهی G مفروض است و می دانیم عضو های G، تابع هایی از متغیر حقیقی x به صورت $f(x)=ax+b$ هستند (a و b عدد هایی حقیقی و $a\neq ۰$). در ضمن مجموعه ی G با شرط های زیر سازگار است:

الف) اگر $g \in G$ ،f، آن گاه $gof \in G$، که در آن $(gof)x=g(f(x))$.

ب) اگر $f \in G$ که در آن $f(x)=ax+b$، آن وقت $f^{-۱}\in G$، که در آن $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-b}{a}$.

ج) برای هر $f \in G$، x_f وجود دارد به نحوی که $f(x_f)=x_f$.

ثابت کنید عدد حقیقی k وجود دارد به نحوی که برای هر $f\in G$ داشته باشیم: $f(k)=k$

6) a_1، a_2، ...، a_n را n عدد مثبت و q را عددی حقیقی با شرط $۰<q<۱$ می گیریم. n عدد حقیقی b_1، b_2، ...، b_n را طوری پیدا کنید که

الف) $a_k<b_k$، برای هر مقدار k از 1 تا n؛

ب) $q<\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<\dfrac{۱}{q}$، برای مقدار های k از 1 تا $n-۱$؛

ج) $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{۱+q}{۱-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

شانزدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1974

1) سه کارت مقوایی داریم که روی هر کدام از آن ها یکی از سه عدد درست p، q، و r نوشته شده است. در ضمن برای این سه عدد درست داریم: $0 < p < q < r$.

سه بازیکن A، B و C با این کارت ها بازی می کنند. دور اول به هر یک از این سه نفر یک کارت داده شد و برای هر یک، به اندازه ی عددی که روی کارت بود، امتیاز در نظر گرفتند. بعد کارت ها را جمع کردند.

بازی N دور ادامه پیدا کرد ($N \geq 2$). در پایان بازی، A دارای ۲۰ امتیاز، B دارای ۱۰ امتیاز و C دارای 9 امتیاز بود. در ضمن می دانیم، در دور آخر بازی، B به اندازه ی r امتیاز گرفته است. می خواهیم بدانیم در دور اول بازی کدام بازی کن q امتیاز گرفته است.

2) در مثلث ABC، زاویه هایی به رأس های A، B و C ، به ترتیب، برابر اند با α، β و γ. ثابت کنید نابرابری

$$\sin\alpha \sin\beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

شرط لازم و کافی است برای این که بتوان نقطه ی D را روی پاره خط AB طوری پیدا کرد که طول CD برابر با واسطه ی هندسی طول های AD و BD باشد.

3) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

بر 5 بخش پذیر نیست.

4) تقسیمی از صفحه ی شطرنجی 8×8 را به p مستطیل غیرمتقاطع در نظر می گیریم که با شرط های زیر سازگار باشد:

الف) هر مستطیل از چند خانه درست شده باشد و در آن، تعداد خانه های سفید با تعداد خانه های سیاه برابر باشد؛

ب) اگر a_i را تعداد خانه های سفید در مستطیل i ام فرض کنیم، داشته باشیم:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_p$$

بزرگترین عدد p را پیدا کنید که برای آن این تقسیم ممکن باشد و برای این مقدار p تمامی دنباله ی عددی a_1، a_2، ...، a_n را در این تقسیم پیدا کنید.

5) اگر a، b، c و d عدد های مثبت دلخواهی باشند، مجموعه ی مقدار های مجموع زیر را پیدا کنید:

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

6) P را چندجمله ای غیر ثابت با ضریب های درست بگیرید. در ضمن فرض کنید $n(P)$ به معنای همه ی عدد های درست k باشد که، برای آن ها داشته باشیم $[P(k)]^2 = 1$. ثابت کنید:

$$n(P) - \deg(P) \leq 2$$

که در آن، $\deg(P)$ به معنای درجه ی چندجمله ای P است.

هفدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1975

1) x_i و y_i را عدد هایی حقیقی فرض کنید ($i=1,2,\cdots,n$)، به نحوی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \\ y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n \end{cases}$$

ثابت کنید اگر z_1، z_2، ...، و z_n تبدیل های دلخواهی از عدد های y_1، y_2، ...، و y_n باشند، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

2) a_1، a_2، a_3، ... را دنباله ی نامتناهی دلخواهی از عدد های درست و مثبت فرض کنید، به نحوی که داشته باشیم:

$$a_k < a_{k+1} \ : K \ge 1$$

ثابت کنید بی نهایت جمله ی a_m از این دنباله را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$a_m = xa_p + ya_q$$

که در آن x و y، عدد هایی درست و مثبت اند و در ضمن $p \ne q$

3) روی ضلع های مثلث غیر مشخص ABC و در خارج آن (ولی در صفحه ی مثلث ABC) مثلث های BPC، CQA و ARB را ساخته ایم، به نحوی که داشته باشیم:

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ ،$$

$$\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ ،$$

$$\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ$$

ثابت کنید:

$$\widehat{QRP} = 90^\circ \text{ و } |QR| = |RP|$$

4) مجموع رقم های عدد 4444^{4444} را، در دستگاه عدد نویسی دهدهی، برابر A، و مجموع رقم های عدد A را برابر B می گیریم (A و B هم، در دستگاه عدد نویسی دهدهی نوشته شده اند). مطلوب است مجموع رقم های عدد B.

5) آیا می توان روی محیط دایره ی به شعاع واحد، 1975 نقطه طوری قرار داد که طول وتر هایی که از وصل دو به دو ی آن ها به دست می آیند با عدد هایی گویا بیان شوند؟

6) همه ی چندجمله ای های P را نسبت به دو متغیر طوری پیدا کنید که با ویژگی های زیر سازگار باشند:

الف) P، یک چندجمله ای همگن درجه ی n است، یعنی برای همه ی عدد های حقیقی t، x و y داریم:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)$$

ب) برای همه ی عدد های حقیقی a، b، و c داریم:

$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$$

ج) $P(1,0) = 1$

هجدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1976

1) مساحت چهارضلعی مسطح و محدبی برابر 32 سانتی متر مربع و مجموع طول های دو ضلع رو به رو یکی از قطر ها برابر 16 سانتی متر است. مطلوب است همه ی مقدار هایی که قطر دیگر چهارضلعی می تواند داشته باشد.

2) فرض کنید:

$$P_1(x)=x^2-2 \text{ و } P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x)) \ (k=2,3,\cdots)$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n همه ی ریشه های معادله ی $P_n(x)=x$ ، حقیقی و مختلف اند.

3) جعبه ی مکعب مستطیل شکلی را می توان به طور کامل با مکعب های به ضلع واحد پر کرد (یال های مکعب ها موازی یال های جعبه است) ولی اگر بخواهیم جعبه را با مکعب های به حجم 2 (با یال های موازی یال های جعبه) پر کنیم، حداکثر می توانیم ۴۰% حجم جعبه را پر کنیم. اندازه های درونی همه ی جعبه هایی را پیدا کنید که برای آن ها این وضع پیش می آید:

$\sqrt[3]{2}=1/2599$

4) بزرگترین عددی را پیدا کنید که با حاصلضرب چند عدد طبیعی به مجموع 1976 برابر باشد.

5) دستگاه شامل p معادله، با $q=2p$ مجهول

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1q}x_q=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{p1}x_1+\cdots+a_{pq}x_q=0 \end{cases}$$

داده شده است، که در آن $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$.

ثابت کنید جواب $(x_1,x_2,\cdots,x_q)$ برای این دستگاه وجود دارد به نحوی که:

الف) همه ی x_j ها عددهایی درست باشند؛

ب) برای مقداری از j $(1\le j\le q)$ داشته باشیم: $x_j\neq 0$؛

ج) برای همه ی j ها $(1\le j\le q)$ داشته باشیم: $x_j\le q$.

6) دنباله ی $\{u_n\}$ به این ترتیب تعریف شده است:

$$u_0=2 \text{ و } u_1=\frac{5}{2} \text{ ،} u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1 \ : n\ge 1$$

ثابت کنید برای $n\ge 1$ داریم: $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ ، که در آن منظور از $[x]$ ، بزرگ ترین عدد درستی است که از x تجاوز نکند.

نوزدهمین المپیاد جهانی ریاضی

1977

1) در داخل مربع مفروض ABCD، مثلث های متساوی الاضلاع ABK، BCL، CDM و DAN را ساخته ایم. ثابت کنید نقطه های وسط چهار پاره خط KL، LM، MN و NK همراه با نقطه های وسط هشت پاره خط AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN رأس های یک دوازده ضلعی منتظم اند.

2) در یک دنباله ی نامحدود از عدد های حقیقی، مجموع هر هفت عدد متوالی، منفی و مجموع هر یازده عدد متوالی، مثبت است. حداکثر تعداد جمله های چنین دنباله ای را پیدا کنید.

3) n را عددی طبیعی و بزرگ تر از 2 و V_n را مجموعه ی عدد های به صورت $nk+1$ $(k=1,2,\cdots)$ می گیریم. عدد $m \in V_n$ را در V_n غیر قابل تحویل می نامیم وقتی که عدد های $p, q \in V_n$ وجود نداشته باشند به نحوی که $pq=m$ باشد. ثابت کنید عدد $r \in V_n$ وجود دارد که بتوان آن را به بیش از یک نوع، به عامل های غیر قابل تحویل در V_n تجزیه کرد (تجزیه هایی که اختلاف آن ها، تنها مربوط به ردیف عامل ها باشد، تجزیه های متفاوتی به حساب نمی آیند).

4) با فرض حقیقی بودن عدد های a، b، A و B، تابع

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$$

را در نظر می گیریم. ثابت کنید، اگر برای هر x حقیقی داشته باشیم: $f(x)\ge 0$، آن وقت خواهیم داشت:

$$a^2+b^2\le 2 \text{ و } A^2+B^2\le 1$$

5) a و b دو عدد طبیعی اند. در تقسیم a^2+b^2 بر $a+b$، به خارج قسمت q باقی مانده ی r رسیده ایم. همه ی زوج عدد های (a,b) را پیدا کنید که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$q^2+r=1977$$

6) $f(n)$ تابعی است که در مجموعه ی عدد های طبیعی تعریف شده است و مقدار هایی در همین مجموعه را قبول می کند. ثابت کنید، اگر برای هر n، نابرابری $f(n+1)>f(f(n))$ برقرار باشد، برای هر n، برابری $f(n)=n$ برقرار خواهد بود.

بیستمین المپیاد جهانی ریاضی

1978

1) m و n را عدد های طبیعی با شرط $۱ \leq m < n$ بگیرید. می دانیم سه رقم سمت راست عدد ۱۹۷۸^m با سه رقم سمت راست عدد ۱۹۷۸^n برابر است (در دستگاه عددنویسی دهدهی). m و n را طوری پیدا کنید که مجموع $m+n$، کمترین مقدار ممکن باشد.

2) نقطه ی P در درون کره ی مفروض داده شده است. سه نیم خط دو به دو عمود بر هم از نقطه ی P گذرانده ایم تا کره را در نقطه های U، V و W قطع کنند. Q را رأس مقابل P در متوازی السطوحی می گیریم که روی پاره خط های PU، PV و PW ساخته شده است (PQ، قطر متوازی السطوح است). مطلوب است مکان هندسی نقطه ی Q، وقتی سه تایی های مرسوم از نقطه ی P متغیر باشند.

3) می دانیم از اجتماع دو مجموعه ی

$$\{f(۱),f(۲),\cdots f(n),\cdots\} \text{ و } \{g(۱),g(۲),\cdots,g(n),\cdots\}$$

همه ی عدد های درست و مثبت به دست می آید. در ضمن

$$f(۱)<f(۲)<\cdots<f(n)<\cdots ;$$

و

$$g(۱)<g(۲)<\cdots<g(n)<\cdots \text{ و } ,g(n)=f(f(n))+۱$$

مطلوب است محاسبه ی $f(۲۴۵)$.

4) مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$) مفروض است. دایره ای رسم کرده ایم که بر دایره ی محیطی مثلث و بر دو ضلع AB و AC (از درون) مماس باشد. نقطه های تماس دایره را با ضلع های AB و AC ، به ترتیب، P و Q می گیریم. ثابت کنید، وسط پاره خط PQ، مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC است.

5) $\{a_k\}$ را دنباله ای از عدد های مختلف درست و مثبت می گیریم ($k=۱,۲,\cdots,n,\cdots$). ثابت کنید، نابرابری زیر، برای همه ی عدد های طبیعی n درست است:

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{a^k}{k^۲} \geq \sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}$$

6) 1987 نفر از شش کشور در یک گردهم آیی بین المللی شرکت کرده اند. این افراد با عدد های 1، 2، 3، ...، و 1978 شماره گذاری شده اند. ثابت کنید، دست کم، یک عضو در این گردهم آیی پیدا می شود که شماره ی او یا برابر مجموع شماره های دو عضو از کشور خودش، و یا دو برابر شماره ی یکی از عضو های کشور خودش می باشد.

بیست و یکمین المپیاد جهانی ریاضی

1979

1) p و q دو عدد طبیعی اند و می دانیم

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1317}-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

ثابت کنید عدد p بر ۱۹۷۹ بخش پذیر است.

2) پنج ضلعی های $A_1A_2A_3A_4A_5$ و $B_1B_2B_3B_4B_5$، به ترتیب، قاعده های بالا و پایین یک منشور را تشکیل داده اند. هر یک از پاره خط های A_iB_j ($\{i,j\}\subset\{1,2,\cdots,5\}$) و هر یک از ضلع های پنج ضلعی های دو قاعده را با رنگ های قرمز یا سبز رنگ کرده ایم. می دانیم هر مثلثی که رأس های آن منطبق بر رأس های منشور و تمام ضلع های آن رنگی باشد، دارای دو ضلع نا همرنگ است. ثابت کنید ۱۰ ضلع قاعده های بالا و پایین منشور، دارای یک رنگ هستند.

3) دو دایره ی متقاطع دریک صفحه قرار دارند. A را یکی از دو نقطه ی برخورد دایره ها می گیریم. دو متحرک، به طور همزمان و با سرعت ثابت، از نقطه ی A آغاز به حرکت می کنند و هر نقطه، مسیر دایره ی خودش را می پیماید. دو متحرک، در یک لحظه به نقطه ی A بر می گردند (بعد از آنکه هر کدام یک دور کامل چرخیده اند). ثابت کنید می توان نقطه ی ثابت P را در صفحه طوری پیدا کرد که در هر لحظه از دو متحرک به یک فاصله باشد.

4) نقطه ی P روی صفحه ی π و نقطه ی Q در بیرون این صفحه داده شده اند. مجموعه ی نقطه های R از صفحه ی π را طوری پیدا کنید که نسبت $\frac{QP+PR}{QR}$ بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

5) مجموعه ی همه ی عدد های حقیقی a را پیدا کنید به نحوی که برای آن ها عدد های حقیقی و غیر منفی x_1، x_2، x_3، x_4، و x_5 وجود داشته باشند که در رابطه های زیر صدق کنند:

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a,\ \sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2,\ \sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3$$

6) A و E را دو رأس رو به روی یک هشت ضلعی منتظم می گیریم. قورباغه ای از رأس A با آغاز به جهیدن می کند و هر بار به رأس مجاور می پرد. ولی وقتی به رأس E رسید همان جا توقف می کند. a_n را تعداد مسیر هایی می گیریم که قورباغه از طریق آن ها با n جهش به E می رسد. ثابت کنید:

$$a_{2n-1}=0;\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})\ ;(n=1,2,3,\cdots)$$

که در آن $x=2+\sqrt{2}$ و $y=2-\sqrt{2}$ است.

یادداشت: مسیر n جهش، دنباله ای از رأس های P_0، P_1، ... و P_n:

الف) $P_0=A$ و $P_n=E$؛

ب) برای هر i، با شرط $0\le i\le n-1$، P_i متمایز از E است؛

ج) برای هر i، با شرط $0\le i\le n-1$، P_i و P_{i+1} دو رأس مجاور اند.

بیست و دومین المپیاد جهانی ریاضی

1981

1) P را نقطه ای از درون مثلث ABC، و D، E، و F را به ترتیب تصویر های قائم این نقطه بر خط های راست BC و CA و AB می گیریم. نقطه ی P را طوری پیدا کنید که، برای آن مجموع

$$\frac{|BC|}{|PD|}+\frac{|CA|}{|PE|}+\frac{|AB|}{|PF|}$$

حداقل مقدار ممکن باشد.

2) عدد های طبیعی n و r داده شده اند، در ضمن، $1 \le r \le n$. همه ی زیرمجموعه های مجموعه ی $\{1,2,3,\cdots,n\}$ را که شامل r عضو باشند، در نظر می گیریم. در هر یک از این زیرمجموعه ها، کوچکترین عضو ها، برابر است با $\frac{n+1}{r+1}$.

3) مطلوب است بیشترین مقدار عبارت m^2+n^2، به شرطی که m و n عدد هایی طبیعی باشند ($1 \le m \le 1981$ و $1 \le n \le 1981$) و داشته باشیم: $(n^2-nm-m^2)^2$.

4)

الف) برای چه مقدار هایی از $m \ge 3$، مجموعه ای شامل n عضو از عدد های طبیعی متوالی وجود دارد که دارای ویژگی زیر باشد:

بزرگ ترین عضو این مجموعه، مقسوم علیهی از کوچک ترین مضرب مشترک بقیه ی $n-1$ عدد باشد.

ب) برای چه مقدار هایی از $n \ge 3$، تنها یک مجموعه از n عدد متوالی با همان ویژگی بالا وجود دارد.

5) از نقطه ی O واقع در داخل یک مثلث، سه دایره با شعاع های برابر طوری می گذرانیم که هر کدام از آن ها در داخل مثلث قرار گیرد و بر دو ضلع مثلث مماس باشد. ثابت کنید مرکز دایره ی محیطی مثلث، مرکز دایره ی محاطی مثلث و نقطه ی O، بر یک خط راست واقع اند.

6) می دانیم، تابع $f(x,y)$، برای هر زوج عدد درست و غیر منفی x و y، با شرط های زیر سازگار است:

الف) $f(0,y)=y+1$؛

ب) $f(x+1,0)=f(x,1)$؛

ج) $f(x+1,y+1)=f\left(x,f(x+1,y)\right)$

مطلوب است $f(4,1981)$

بیست و سومین المپیاد جهانی ریاضی

1982

1) تابع $f(n)$ برای تمام مقدار های درست مثبت n تعریف شده است و مقدار های نامنفی را قبول می کند. در ضمن می دانیم:

$$f(2)=0 ،\ f(3)>0 ،\ f(9999)=3333$$

و برای همه ی مقدار های m و n داریم:

$$f(m+n)-f(m)-f(n)\in\{0,1\}$$

مطلوب است محاسبه ی $f(1982)$

2) مثلث غیر متساوی الساقین $A_1A_2A_3$، با ضلع های a_1، a_2 و a_3 داده شده است (a_i، ضلع رو به رو به زاویه ی A_i). M_i وسط ضلع a_i و T_i نقطه ی تماس دایره ی محاطی داخلی مثلث با ضلع a_i است ($i=1,2,3$). اگر S_i را قرینه ی نقطه ی T_i نسبت به نیم ساز داخلی زاویه ی A_i بگیریم، ثابت کنید خط های راست M_1S_1، M_2S_2 و M_3S_3 از یک نقطه می گذرند.

3) دنباله ی نامتناهی $\{x_n\}$، برای همه ی عدد های حقیقی و مثبت، به این ترتیب تعریف شده است:

$x_0=1$ و برای همه ی مقدار های $i\geq 0$: $x_{i+1}\leq x_i$.

الف) ثابت کنید در چنین دنباله ای عدد $n\geq 1$ وجود دارد به نحوی که

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3/999$$

ب) دنباله ای از این گونه را مشخص کنید که برای آن به ازای هر مقدار n داشته باشیم:

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

4) ثابت کنید اگر برای عدد درست مثبت n معادله ی

$$x^3-3xy^2+y^3=n$$

جوابی مانند (x,y)، در مجموعه ی عدد های درست داشته باشد آن وقت دست کم سه جواب در مجموعه ی عدد های درست خواهد داشت.

ثابت کنید این معادله به ازای $n=2891$، جوابی در مجموعه ی عدد های درست ندارد.

5) قطر های **AC** و **CE** از شش ضلعی منتظم **ABCDEF**، به ترتیب به وسیله ی نقطه های **M** و **N** تقسیم شده اند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$$

اگر نقطه های **B**، **M** و **N** روی یک خط راست باشند، مقدار r را محاسبه کنید.

6) **S**، مربعی با ضلع به طول ۱۰۰ است. **L** مسیری است داخل **S** به نحوی که خودش را قطع نمی کند و از پاره خط های A_0A_1، A_1A_2، ...، $A_{n-1}A_n$ ساخته شده است ($A_0\neq A_n$). می دانیم برای هر نقطه ی **P** از محیط **S**، نقطه ای روی **L** پیدا می شود، به نحوی که فاصله ی بین آن ها، از واحد تجاوز نمی کند و در ضمن طول بخشی از مسیر که بین **X** و **Y** واقع است از **198** کمتر نیست.

Naser farhadi

بیست و چهارمین المپیاد جهانی ریاضی

1983

1) مطلوب است همه ی تابع های f که در $\mathbb{R}^+$ (عدد های حقیقی مثبت) معین باشند و مقدار هایی در $\mathbb{R}^+$ را قبول کنند و در ضمن با شرط های زیر سازگار باشند:

الف) $f(xf(y)) = yf(x)$، برای x و y های مثبت،

ب) $f(x) \to 0$ وقتی $x \to \infty$

2) A را یکی از دو نقطه ی برخورد دایره های C_1 و C_2 می گیریم. این دو دایره در یک صفحه قرار دارند، شعاع های آن ها متفاوت است و مرکز های آن ها، به ترتیب، O_1 و O_2 است. مماس مشترک های P_1P_2 و Q_1Q_2 این دو دایره را رسم کرده ایم ($P_1 \in C_1$، $P_2 \in C_2$ و $Q_1 \in C_1$، $Q_2 \in C_2$). M_1 را وسط وتر P_1Q_1 و M_2 را وسط وتر P_2Q_2 می گیریم. ثابت کنید $\widehat{O_1AO_2} = \widehat{M_1AM_2}$.

3) a، b و c را سه عدد درست مثبت می گیریم که دو به دو نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید

$$2abc - ab - bc - ca$$

بزرگ ترین عدد درستی است که نمی تواند به صورت زیر باشد:

$$xbc + yca + zab$$

(x، y و z، عدد هایی درست و غیر منفی هستند).

4) فرض کنید E، اجتماع ضلع های مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد، آیا این حکم درست است که، به ازای هر تقسیم مجموعه ی E به دو زیرمجموعه ی جدا از هم E_1 و E_2 (یعنی $E = E_1 \cup E_2$ و $E_1 \cap E_2 = \varnothing$)، دست کم در یکی از این زیرمجموعه ها، سه نقطه پیدا می شود، به نحوی که رأس های یک مثلث قائم الزاویه باشند؟

5) حکم زیر را ثابت یا رد کنید:

از مجموعه ی همه ی عدد های درست و مثبت کوچکتر یا مساوی 10^5، می توان زیرمجموعه ای شامل 1983 عضو انتخاب کرد، به نحوی که، در آن، حتی سه عضو وجود نداشته باشد که جمله های متوالی یک تصاعد حسابی باشند.

6) a، b و c را طول ضلع های یک مثلث غیر مشخص بگیرید. ثابت کنید:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

علامت برابری، در چه حالتی برقرار است؟

بیست و پنجمین المپیاد جهانی ریاضی

1984

1) x، y و z، عدد هایی حقیقی و غیر منفی اند و می دانیم $x+y+z=1$. ثابت کنید:

$$0 \le yz+zx+xy-2xyz \le \frac{7}{27}$$

2) زوج (a,b) از عدد های درست و مثبت را طوری پیدا کنید که

اولا $ab(a+b)$ بر 7 بخش پذیر نباشد؛

ثانیا $(a+b)^7-a^7-ab^7$ بر 7^7 بخش پذیر باشد.

درستی ادعای خود را ثابت کنید.

3) دو نقطه ی متمایز **A** و **O** در صفحه داده شده اند. برای هر نقطه ی **X** از صفحه (به جز **O**)، اندازه ی زاویه ی بین **OA** و **OX** را با $a(X)$ نشان می دهیم (بر حسب رادیان). زاویه ی در جهت مثلثاتی (عکس جهت عقربه های ساعت) و با آغاز از **OA** به حساب می آوریم ($0 \le a(X) < 2\pi$).

$C(X)$ را دایره ای به مرکز **O** و شعاع به طول $OX+\frac{a(X)}{OX}$ می گیریم. هر نقطه ی صفحه را به یکی از تعداد رنگ های محدود، رنگ کرده ایم. ثابت کنید نقطه ای مانند **Y**، با شرط $a(Y)>0$، وجود دارد، به نحوی که رنگ این نقطه، روی محیط دایره ی $C(Y)$ ظاهر شود.

4) در چهارضلعی محدب **ABCD** می دانیم خط راست **CD** بر دایره ی به قطر **AB** مماس است. ثابت کنید خط راست **AB** وقتی و تنها وقتی بر دایره ی به قطر **CD** مماس است که خط های راست **AD** و **BC** با هم موازی باشند.

5) d را مجموع طول های همه ی قطر های یک n ضلعی محدب و واقع بر یک صفحه بگیرید ($n>3$). ثابت کنید، اگر p محیط این n ضلعی باشد، همیشه داریم:

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

$[x]$، یعنی بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی کند.

6) a، b، c و d را عدد هایی درست و فرد بگیرید. می دانیم

$$0<a<b<c<d \text{ و } ad=bc$$

ثابت کنید اگر برای بعضی عدد های طبیعی k و m داشته باشیم: $a+d=2^k$ و $b+c=2^m$، آن وقت خواهیم داشت: $a=1$.

بیست و ششمین المپیاد جهانی ریاضی

1985

1) مرکز دایره ای بر ضلع AB از چهارضلعی محاطی ABCD واقع است. سه ضلع دیگر چهارضلعی بر دایره مماس اند. ثابت کنید:

$$AD+BC=AB$$

2) n و k را دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول فرض کنید:

$$(n,k)=1 \text{ و } 0<k<n$$

هر عدد از مجموعه ی $M=\{1,2,3,\cdots,n-1\}$ را با یکی از رنگ های سفید یا آبی، رنگ کرده ایم و می دانیم:

الف) برای هر $i\in M$، هم i و هم $n-i$ از یک رنگ اند؛

ب) برای هر $i\in M$ و $i\neq k$، هم i و هم $|i-k|$ همرنگ اند.

ثابت کنید همه عضو های مجموعه ی M، باید از یک رنگ باشند.

3) برای هر چندجمله ای با ضریب های درست، مثل

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$$

تعداد ضریب های فرد را با $w(p)$ نشان می دهیم؛ و به ازای $i=0,1,2,\cdots$ فرض می کنیم $Q_i(x)=(1+x)^i$. ثابت کنید، اگر i_1، i_2، ... ، i_n، عدد هایی درست باشند و داشته باشیم: $0\le i_1<i_2<\cdots<i_n$، در این صورت

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n})\ge w(Q_{i_1})$$

4) مجموعه ای مانند M، شامل 1985 عدد درست مثبت متمایز، مفروض است. می دانیم که هیچ کدام از عدد های عضو M، مقسوم علیه اولی بزرگ تر از 26 ندارند. ثابت کنید، دست کم یک زیرمجموعه ای شامل 4 عضو متمایز، می توان از مجموعه ی M جدا کرد، به نحوی که حاصل ضرب چهار عدد عضو این زیرمجموعه، برابر با توان چهارم یک عدد درست باشد.

5) دایره ای به مرکز O، از رأس های A و C در مثلث ABC می گذرد و پاره خط های AB و BC را در نقطه های دیگر K و N، به ترتیب، قطع می کند. اگر دایره های محیطی مثلث های ABC و KBN، یکدیگر را در دو نقطه ی متمایز B و M قطع کنند، ثابت کنید، مثلث OMB قائم الزاویه است.

6) برای هر عدد حقیقی x_1، دنباله ی عددی

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

را با قرار دادن $x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$، برای $n>1$، تشکیل دهید. ثابت کنید، تنها یک مقدار x_1 وجود دارد که، در مورد آن، برای هر n داشته باشیم: $0<x_n<x_{n+1}<1$

Naser farhadi

بیست و هفتمین المپیاد ریاضی جهانی

1986

1) d عددی است طبیعی و در ضمن $d \notin \{۲,۵,۱۳\}$. ثابت کنید نمی توان عددی برای d پیدا کرد، به نحوی که هر سه عدد $۲d-۱$، $۵d-۱$ و $۱۳d-۱$ مجذور کامل باشند.

2) مثلث $A_1A_2A_3$ و نقطه ی P_0 دریک صفحه داده شده اند. برای هر عدد طبیعی s ($s \ge ۴$)، تعریف می کنیم: $A_s = A_{s-3}$. دنباله ی نقطه های P_1، P_2، ...، P_n، ... را طوری در نظر می گیریم که P_{k+1} از نقطه ی P_k، در دوران به مرکز A_{k+1} و به اندازه ی زاویه ی ۱۲۰ درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت، به دست آمده باشد ($k = ۰,۱,۲,\cdots$). ثابت کنید، اگر داشته باشیم $P_{1986} = P_0$، آن وقت، مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی الاضلاع است.

3) به هر رأس یک پنج ضلعی منتظم، عددی درست نسبت داده شده است و می دانیم، مجموع این پنج عدد، مقداری مثبت است. اگر عدد های سه رأس متوالی پنج ضلعی، به ترتیب، x، y و z و در ضمن $y < ۰$ باشد، آن ها را به ترتیب، با عدد های $x+y$، $-y$ و $y+z$ عوض می کنیم. این عمل جای گزینی را آن قدر ادامه می دهیم تا دست کم یکی از پنج عدد منفی شود. آیا تعداد عمل هایی که این روند را به انجام می رسانند، محدود است؟

4) A و B را دو رأس مجاور یک n ضلعی منتظم ($n \ge ۵$) در صفحه، و O را مرکز چندضلعی می گیریم. مثلث XYZ بر مثلث OAB منطبق است (X بر O، Y بر A و Z بر B قرار دارد). مثلث XYZ طوری تغییر مکان می دهد که Y و Z روی محیط چندضلعی و X در داخل آن است. مکان هندسی نقطه ی X را پیدا کنید.

5) همه ی تابع های f را پیدا کنید که در مجموعه ی عدد های غیر منفی تعریف شده است و مقدار های حقیقی غیر منفی را قبول می کند، به شرطی که

الف) $x,y \ge ۰$: $f[xf(y)]f(y) = f(x+y)$؛

ب) $f(۲) = ۰$؛

ج) برای $۰ \le x < ۲$ داشته باشیم: $f(x) \ne ۰$.

6) تعدادی متناهی نقطه، با مختصاتی درست، در صفحه داده شده اند. آیا می توان این نقطه ها را با دو رنگ قرمز و سفید رنگ کرد، به نحوی که، برای هر خط راست D موازی یکی از دو محور مختصات، قدرمطلق اختلاف بین تعداد نقطه های قرمز و سفید در روی خط D، کوچک تر یا برابر 1 است. استدلال کنید.

مسأله های بیست و هشتمین المپیاد جهانی ریاضی (هاوانا، کوبا)،

1987

1. تعداد جایگشت های مجموعه ی $S=\{1,2,\cdots,n\}$ را که دقیقا k نقطه را ثابت نگاه می دارند با $P_n(k)$ نمایش می دهیم. ثابت کنید که

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$$

2. مثلث ABC را که دارای زوایای حاده است در نظر می گیریم. نیمساز داخلی زاویه ی A را رسم می کنیم تا ضلع BC را در نقطه ی L و دایره ی محیطی مثلث را در نقطه ی N قطع کند. از L عمود هایی بر اضلاع AB و AC رسم می کنیم و پای دو عمود را K و M می نامیم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی AKNM با مساحت مثلث ABC برابر است.

3. فرض کنید x_1، x_2، ... و x_n اعداد حقیقی باشند به طوری که $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح k ($k\ge 2$)، اعداد صحیحی مانند a_1، a_2، ... و a_n موجودند به طوری که a_i ها همه صفر نیستند و

الف) به ازای هر i که $1\le i\le n$، داریم $|a_i|\le k-1$

ب) $|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$

4. ثابت کنید تابعی مانند $f:\square^*\to\square^*$ وجود ندارد به طوری که به ازای هر $n\in\square^*$ داشته باشیم

$$f(f(n))=n+1987 \quad (\square^*=\{0,1,2,\cdots\})$$

5. فرض کنید n عددی صحیح [بوده] و $n\ge 3$ باشد. ثابت کنید یک مجموعه از نقاط با n عضو در صفحه ی مختصات می توان یافت به طوری که داشته باشیم

الف) فاصله ی هر دو نقطه در این مجموعه، عددی گنگ است.

ب) هیچ سه نقطه [ای] در این مجموعه همخط نیستند و مساحت مثلثی که توسط هر سه نقطه ساخته می شود عددی گویا است.

6. فرض کنید n عددی صحیح باشد و $n\ge 2$، به طوری که برای هر عدد صحیح k، با شرط $0\le k\le\sqrt{\frac{n}{3}}$، عدد k^2+k+n عددی اول باشد. ثابت کنید که برای هر عدد صحیح k، با شرط $0\le k\le n-2$، عدد k^2+k+n عددی اول خواهد بود.

مسأله های بیست و نهمین المپیاد جهانی ریاضی (کانبرا، استرالیا)،

1988

1. دو دایره ی متحد المرکز را به شعاع های **R** و r در صفحه در نظر بگیرید ($R > r$)؛ فرض کنید **P** نقطه ای ثابت روی دایره ی کوچک و **B** نقطه ی متغیری روی دایره ی بزرگ باشد. پاره خط **BP** دایره ی بزرگ را دوباره در **C** قطع می کند. از **P** عمودی بر **BP** رسم کنید تا دایره ی کوچک را در **A** قطع کند (اگر این عمود بر دایره ی کوچک در **P** مماس باشد آن گاه $A = P$).

الف) تمام مقادیر ممکن $AB^2+BC^2+CA^2$ را زمانی که **B** روی دایره ی بزرگ تغییر نماید، تعیین کنید.

ب) مکان هندسی نقطه ی وسط پاره خط **AB** را به دست آورید.

2. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت، **B** یک مجموعه و A_1، A_2، ... و A_{2n+1} زیرمجموعه های **B** باشند به طوری که داشته باشیم

الف) هر یک از A_i ها دقیقا دارای $2n$ عضو است؛

ب) برای هر i و j ($1 \le i < j \le 2n+1$)، $A_i \cap A_j$ شامل دقیقا یک عضو است؛

ج) هر عضو **B** حداقل به دو تا از A_i ها تعلق دارد.

می خواهیم به هر یک از اعضای **B** یکی از دو عدد صفر یا یک را نسبت دهیم به طوری که به هر یک A_i ها دقیقا n صفر نسبت داده شود ($1 \le i \le 2n+1$). تعیین کنید که به ازای چه مقادیری از n این کار ممکن است.

3. تابع f با شرایط زیر روی مجموعه ی اعداد صحیح و مثبت تعریف شده است.

$$f(1)=1, f(2)=2$$

و برای هر $n \ge 1$ داریم

$$f(2n)=f(n)$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$$
$$f(4n+2)=2f(2n+1)-2f(n)$$

تعداد اعداد صحیح و مثبت n را که در شرایط زیر صدق می کنند تعیین کنید.

$$1 \le n \le 1988, f(n)=n$$

4. مجموعه ی اعداد حقیقی x را که در نامساوی $f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k} \ge \frac{5}{4}$ صدق می کنند، در نظر بگیرید. نشان دهید که این مجموعه از اجتماع تعدادی بازه های مجزا از هم تشکیل شده است که مجموع طول این بازه ها برابر با **1988** است.

5. مثلث قائم الزاویه ی **ABC** را که در رأس **A** قائمه است در نظر بگیرید. فرض کنید **D** پای ارتفاع مرسوم از **A** باشد. مرکز دایره های محاطی مثلث های **ABD** و **ACD** را به هم وصل کنید تا اضلاع **AB** و **AC** را به ترتیب در **K** و **L** قطع کند؛ مساحت مثلث های **ABC** و **AKL** را به ترتیب **S** و **T** می نامیم. ثابت کنید $S \ge 2T$.

6. فرض کنید a و b اعدادی صحیح و مثبت باشند به طوری که $ab+1 \mid a^2+b^2$. نشان دهید

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

مربع کامل است.

مسأله های سی امین المپیاد جهانی ریاضی (برانشویک، آلمان غربی)،

1989

1. ثابت کنید که مجموعه ی $\{۱,۲,\cdots,۱۹۸۹\}$ می تواند به مجموعه های A_i $(i=۱,۲,\cdots,۱۱۷)$ افراز شود به طوری که

الف) هر A_i، 17 عضو داشته باشد.

ب) مجموع همه ی عضو های هر A_i، یکسان باشد.

2. در مثلث ABC با زوایای حاده، نیمساز های زوایای A، B و C به ترتیب دایره ی محیطی را در نقطه های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ قطع می کنند. همچنین نقاط $A_۰$، $B_۰$ و $C_۰$ به ترتیب مراکز دوایر محاطی خارجی متناظر با رئوس A، B و C هستند. ثابت کنید که

الف) مساحت مثلث $A_۰B_۰C_۰$ دو برابر مساحت شش ضلعی $AC_۱BA_۱CB_۱$ است.

ب) مساحت مثلث $A_۰B_۰C_۰$ حداقل چهار برابر مساحت مثلث ABC است.

3. فرض کنید n و k اعداد صحیح و مثبت و S مجموعه ای n نقطه ای در صفحه باشد به طوری که

الف) هیچ سه نقطه ای از S بر یک راستا واقع نباشد.

ب) برای هر نقطه ی P از S حداقل k نقطه از S وجود داشته باشد که فاصله ی آن ها از P یکسان باشد.

ثابت کنید $k<\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲n}$.

4. فرض کنید ABCD یک چهارضلعی محدب با رابطه ی $AB=AD+BC$ باشد. نقطه ای مانند P در داخل چهارضلعی با فاصله ی h از CD وجود دارد به طوری که $AP=h+AD$ و $BP=h+BC$. ثابت کنید که

$$\frac{۱}{\sqrt{h}}\geq\frac{۱}{\sqrt{AD}}+\frac{۱}{\sqrt{BC}}$$

5. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n، n عدد صحیح مثبت متوالی وجود دارد به طوری که هیچ کدام از آن ها توان صحیحی از یک عدد اول نیست.

6. یک جایگشت $(x_۱,x_۲,\cdots,x_m)$ از مجموعه ی $\{۱,۲,\cdots,۲n\}$ وقتی که n یک عدد صحیح مثبت باشد، دارای خاصیت T است هر گاه وجود داشته باشد i به طوری که $|x_i-x_{i+1}|=n$ و $۱\leq i\leq n-۱$. نشان دهید برای هر n، تعداد جایگشت های دارای خاصیت T بیشتر از جایگشت های بدون این خاصیت است.

مسأله های سی و یکمین المپیاد جهانی ریاضی (پکن، چین)،

1990

1. دو وتر AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطه ی E درون دایره قطع می کنند. فرض کنید M یک نقطه ی داخلی پاره خط EB (غیر از E و B) باشد. از سه نقطه ی D، E و M یک دایره می گذرد. مماس بر این دایره در نقطه ی E خطوط BC و AC را به ترتیب در نقاط F و G قطع می کند. اگر $t=\dfrac{AM}{AB}$ باشد، مقدار $\dfrac{EG}{EF}$ را بر حسب t پیدا کنید.

2. فرض کنید $n \geq 3$ و مجموعه ی E از $2n-1$ نقطه ی متمایز روی یک دایره تشکیل شده باشد. فرض کنید دقیقا k نقطه از این نقطه ها به رنگ سیاه رنگ آمیزی شده است. یک چنین رنگ آمیزی را «خوب» می گوییم اگر حداقل یک زوج از نقاط سیاه وجود داشته باشد به طوری که درون یکی از دو کمان منتهی به این دو نقطه شامل درست n نقطه از E باشد.

کمترین مقدار k را برای این که هر رنگ آمیزی E خوب باشد پیدا کنید.

3. کلیه ی اعداد صحیح $n>1$ را پیدا کنید که $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ عدد صحیح باشد.

4. فرض کنید $\mathbb{Q}^+$ مجموعه ی اعداد گویای مثبت باشد. تابع $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ را طوری پیدا کنید که به ازای هر x و y در $\mathbb{Q}^+$،

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$$

باشد. مربعهایی که در تابعها میبینید R=

5. یک عدد صحیح اولیه ی $n_0>1$ داده شده است. دو بازیکن A و B اعداد صحیح n_1، n_2 و ... را متناوبا (یکی پس از دیگری) با توجه به قواعد زیر انتخاب می کنند: بازیکن A با دانستن n_{2k}، عدد صحیح n_{2k+1} را طوری انتخاب می کند که

$$n_{2k}\leq n_{2k+1}\leq n_{2k}^2$$

بازیکن B با دانستن n_{2k+1}، عدد صحیح n_{2k+2} را طوری انتخاب می کند که $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ به صورت توان طبیعی از یک عدد اول باشد. بازیکن A با انتخاب عدد ۱۹۹۰ و بازیکن B با انتخاب 1 برنده محسوب می شوند.

به ازای چه مقادیری از n_0،

الف) [بازیکن] A برنامه ای برای برنده شدن دارد.

ب) [بازیکن] B برنامه ای برای برنده شدن دارد.

ج) هیچ یک برنامه ای برای برنده شدن ندارند.

6. ثابت کنید یک ۱۹۹۰ ضلعی محدب با خواص زیر وجود دارد.

الف) تمام زوایای آن با هم مساوی باشند.

ب) طول اضلاع آن بدون در نظر گرفتن ترتیب، اعداد 1^2، 2^2، ... و 1990^2 باشند.

مسأله های سی و دومین المپیاد جهانی ریاضی (سیگتونا، سوئد)،

1991

1. در مثلث ABC فرض می کنیم I مرکز دایره ی محاطی باشد و نیمساز های داخلی زوایای A، B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در A'، B' و C' قطع می کنند. ثابت کنید که

$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. فرض می کنیم $n > 6$ یک عدد صحیح باشد و a_1، a_2، ... و a_k، تمام اعداد طبیعی [ای] باشند که از n کوچکتر و نسبت به n اول اند. اگر

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

ثابت کنید n یا اول است و یا به صورت توان صحیحی از 2 است.

3. فرض می کنیم

$$S = \{1, 2, \cdots, 280\}$$

کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید به طوری که در هر زیرمجموعه ی n عضوی از S پنج عدد وجود داشته باشد که دو به دو نسبت به هم اول باشند.

4. فرض می کنیم G یک گراف همبند باشد که دارای k یال است. ثابت کنید می توان یال های G را با اعداد 1، 2، 3، ... و k طوری نامگذاری کرد که در هر رأس که از آن دو یال یا بیشتر از دو یال می گذرد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام اعداد وابسته به این یال ها برابر 1 باشد.

(یک گراف G از مجموعه ای از نقاط به نام رئوس و مجموعه ای از پاره خط ها به نام یال ها که برخی رئوس متمایز را به هم وصل می کند، تشکیل شده است، و از هر دو رأس u و v حداکثر یک یال می گذرد. G یک گراف همبند است اگر برای هر دو رأس متمایز x و y، دنباله ای از رئوس مانند

$$x = V_0, V_1, \cdots, V_m = y$$

وجود داشته باشد به طوری که از هر دو رأس V_i و V_{i+1} ($0 \leq i < m$)، یک یال واقع در G بگذرد.)

5. فرض می کنیم M یک نقطه در درون مثلث ABC باشد، ثابت کنید حداقل یکی از زوایای MAB، MBC یا MCA کوچکتر یا مساوی 30° است.

6. گوییم دنباله ی نامتناهی $x_0, x_1, x_2, \cdots$ از اعداد حقیقی کراندار است اگر عدد ثابتی مانند u وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq 0$ داشته باشیم $|x_i| \leq u$. عدد حقیقی $a > 1$ داده شده است. یک دنباله نامتناهی کراندار از اعداد مانند $x_0, x_1, x_2, \cdots$ بسازید به طوری که برای هر دو عدد صحیح و نامنفی i و j که $i \neq j$، داشته باشیم

$$|x_i - x_j| . |i - j|^a \geq 1$$

مسأله های سی و سومین المپیاد جهانی ریاضی (مسکو، روسیه)،

1992

1. همه ی اعداد صحیح a، b و c را پیدا کنید به طوری که $1<a<b<c$ و $abc-1$ بر $(a-1)(b-1)(c-1)$ قابل قسمت باشد.

2. فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعه ی اعداد حقیقی باشد. همه ی توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را پیدا کنید به طوری که به ازای هر x و y در $\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f\left(x^2+f(y)\right)=x+\left(f(x)\right)^2$$

3. نه نقطه در فضا در دست است که هیچ چهار تای آن ها در یک صفحه نیستند. هر دو نقطه به وسیله ی یک یال به هم وصل شده اند (منظور از یال، پاره خط است). هر یال یا [با رنگ] آبی رنگ می شود، یا قرمز و یا اصلا رنگ نمی شود.

کوچک ترین عدد صحیح n را پیدا کنید که در شرط زیر صدق کند.

« به هر ترتیب که دقیقا n یال را رنگ کنیم، مجموعه ی یال های رنگ شده مثلثی را شامل باشد که هر سه ضلع آن همرنگ باشند.»

4. دایره ی C، خط L مماس بر آن و نقطه ی M واقع بر L در یک صفحه مفروض اند. مکان هندسی نقاطی مانند P را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق کنند.

« دو نقطه ی Q و R روی مماس L وجود داشته باشند. [به طوری] که نقطه ی M وسط پاره خط QR و دایره ی C دایره ی محاطی داخلی مثلث PQR باشد. »

5. دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ در فضا داده شده است. فرض کنیم S یک مجموعه ی متناهی از نقاط فضا باشد. مجموعه ی تصویر های قائم نقاط S را روی سه صفحه ی مختصات $o-yz$، $o-xz$ و $o-xy$، به ترتیب با S_x، S_y و S_z نمایش می دهیم. نشان دهید

$$|S|^2\le|S_x||S_y||S_z|$$

که در آن تعداد اعضای مجموعه ی متناهی A با $|A|$ نمایش داده شده است.

{توضیح: تصویر قائم یک نقطه روی یک صفحه عبارت است از پای عمود وارد از آن نقطه بر صفحه.}

6. به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $S(n)$ را بزرگترین عددی تعریف می کنیم که به ازای همه ی اعداد صحیح k که $1\le k\le S(n)$، n^2 را بتوان به صورت مجموع k مربع کامل مثبت نوشت.

الف) نشان دهید به ازای هر $n\ge 4$، $S(n)\le n^2-14$.

ب) یک عدد صحیح مانند n پیدا کنید که $S(n)=n^2-14$.

ج) نشان دهید بینهایت عدد صحیح مانند n وجود دارد که $S(n)=n^2-14$.

مسأله های سی و چهارمین المپیاد جهانی ریاضی (استانبول، ترکیه)،

1993

1. فرض کنیم $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ که در آن $n>1$ یک عدد صحیح است. ثابت کنید $f(x)$ را نمی توان به صورت حاصلضرب دو چندجمله ای نوشت که در آن ها همه ی ضریب ها عدد صحیح و درجه ی هر یک از آن ها حداقل یک باشد.

2. فرض کنیم D یک نقطه درون مثلث ABC با زوایای حاده باشد به طوری که

$$\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$$

و

$$AC.BD=AD.BC$$

الف) مقدار عددی نسبت $\frac{AB.CD}{AC.BD}$ را محاسبه کنید.

ب) ثابت کنید خطوط مماس در نقطه ی C بر دایره های محیطی مثلث های ACD و BCD بر هم عمودند.

3. روی یک صفحه ی شطرنج نامتناهی یک بازی به شرح زیر انجام می گیرد.

در شروع بازی n^2 مهره روی یک بلوک $n\times n$ از مربع های مجاور هم چیده می شود به طوری که در هر مربع یک مهره قرار می گیرد. در این بازی یک حرکت عبارت است از پرش یک مهره به طور افقی یا به طور عمودی از روی یک مهره ی مجاور آن به مربع خالی بلافاصله بعد از آن. بعد از هر حرکت مهره ای که از روی آن پرش انجام شده، برداشته می شود. مقادیری از n را پیدا کنید که به ازای آن ها بتوان بازی را با باقی ماندن فقط یک مهره روی صفحه، به پایان برد.

4. برای سه نقطه ی P، Q و R در صفحه، $m(PQR)$ را برابر مینیمم طول ارتفاع های مثلث PQR تعریف می کنیم (در حالتی که P، Q و R روی یک خط باشند، $m(PQR)=0$ می گیریم). فرض کنیم A، B و C نقاط داده شده در صفحه باشند. ثابت کنید به ازای هر نقطه ی X در این صفحه داریم

$$m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$$

5. فرض کنیم

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$$

آیا تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f(1)=2$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$f(f(n))=f(n)+n$$

$$f(n)<f(n+1)$$

6. فرض کنیم $n>1$ یک عدد صحیح باشد. تعداد n لامپ L_0، L_1، ... و L_{n-1} دور یک دایره قرار دارند. هر لامپ یا « روشن» است و یا « خاموش ». دنباله ای از عمل های S_0، S_1، ....، S_j و ... انجام می شود. عمل S_j فقط روی وضعیت لامپ L_j به شرح زیر اثر می کند (وضعیت بقیه ی لامپ ها را تغییر نمی دهد).

- اگر L_{j-1} « روشن » باشد، S_j وضعیت را از « روشن » به « خاموش » و یا از « خاموش » به « روشن » عوض می کند.
- اگر L_{j-1} « خاموش » باشد S_j وضعیت L_j را تغییر نمی دهد.

لامپ ها به پیمانه ی n شماره گذاری شده اند یعنی

$$L_{-1}=L_{n-1},L_0=L_n,L_1=L_{n+1},\cdots$$

در ابتدا همه ی لامپ ها « روشن » هستند. نشان دهید که

الف) یک عدد صحیح مثبت $M(n)$ وجود دارد که بعد از طی $M(n)$ گام لامپ ها دوباره همه « روشن » هستند.

ب) اگر n به صورت 2^k باشد، آن گاه بعد از طی n^2-1 گام لامپ ها همه « روشن » هستند.

ج) اگر n به صورت 2^k+1 باشد، آن گاه بعد از طی n^2-n+1 گام لامپ ها همه « روشن » هستند.

مسأله های سی و پنجمین المپیاد جهانی ریاضی (هنگ کنگ، هنگ کنگ)،

1994

1. فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت باشند. همچنین a_1، a_2، ... و a_m را اعضای متمایزی از $\{1,2,\cdots,n\}$ بگیرید به طوری که هر گاه $a_i + a_j \le n$ که در آن $1 \le i \le j \le m$، آن گاه k ($1 \le k \le m$)، موجود باشد [به طوری] که $a_i + a_j = a_k$. ثابت کنید

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$$

2. ABC را مثلث متساوی الساقینی بگیرید که در آن $AB = AC$. فرض کنید که

الف) M نقطه ی وسط BC و O نقطه ای روی خط AM است به طوری که OB بر AB عمود است.

ب) Q نقطه ی دلخواهی روی پاره خط BC متمایز از B و C است.

ج) نقطه ی E روی خط AB و F روی خط AC قرار دارد به طوری که Q، E و F متمایز و هم خط هستند.

ثابت کنید OQ بر EF عمود است اگر و فقط اگر $QE = QF$.

3. برای هر عدد طبیعی k، $f(k)$ را تعداد اعدادی در مجموعه ی $\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$ بگیرید که بسط مبنای دوی آن ها دقیقا سه تا 1 دارد.

الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت m، حداقل یک عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که $f(k) = m$.

ب) همه ی اعداد صحیح و مثبت m را طوری تعیین کنید که دقیقا یک k با شرط $f(k) = m$ وجود داشته باشد.

4. همه ی زوج مرتب ها (m, n) از اعداد صحیح مثبت را طوری تعیین کنید که

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

یک عدد صحیح باشد.

5. S را مجموعه ی اعداد حقیقی اکیدا بزرگ تر از -1 بگیرید. همه ی توابع $f: S \to S$ واجد شرایط زیر را پیدا کنید.

الف) $\forall x, y \in S, f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$

ب) $\frac{f(x)}{x}$ روی هر کدام از بازه های $-1 < x < 0$ و $0 < x$ اکیدا صعودی است.

6. نشان دهید که یک مجموعه ی A از اعداد صحیح مثبت با شرط زیر وجود دارد.

برای هر مجموعه ی نامتناهی S از اعداد اول، دو عدد صحیح مثبت $m \in A$ و $n \notin A$ وجود دارند که هر کدام حاصلضرب k عضو متمایز ($k > 2$) از S باشند.

مسأله های سی و ششمین المپیاد جهانی ریاضی (تورنتو، کانادا)،

1995

1. فرض کنیم A، B، C و D چهار نقطه ی متمایز به همین ترتیب روی یک خط باشند. دوایر به قطر AC و BD یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند. نقطه ی تقاطع XY را با BC، نقطه ی Z می نامیم. فرض کنیم P یک نقطه ی دلخواه به غیر از Z روی خط XY باشد. خط CP دایره ی به قطر AC را در نقاط C و M قطع می کند، همچنین خط BP دایره ی به قطر BD را در نقاط B و N قطع می کند. ثابت کنید خطوط AM، DN و XY از یک نقطه می گذرند.

2. فرض کنیم a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $abc = ۱$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{a^۳(b+c)}+\frac{۱}{b^۳(c+a)}+\frac{۱}{c^۳(a+b)}\geq\frac{۳}{۲}$$

3. همه ی اعداد صحیح $n>۳$ را پیدا کنید به طوری که n نقطه ی متمایز $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n روی صفحه و اعداد حقیقی $r_۱$، $r_۲$، ... و r_n وجود داشته باشند که در دو شرط زیر صدق کنند:

الف) هیچ سه نقطه از نقاط $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n روی یک خط واقع نباشند.

ب) به ازای هر سه تایی (i, j, k) $(۱\leq i\leq j<k\leq n)$ مساحت مثلث $A_iA_jA_k$ برابر $r_i+r_j+r_k$ باشد.

4. فرض کنیم ABCDEF یک شش ضلعی محدب (کوژ) باشد به طوری که

$$AB=BC=CD,\qquad DE=EF=FA,$$

$$\angle BCD=\angle EFA=۶۰^\circ$$

فرض کنیم G و H دو نقطه در درون این شش ضلعی باشند به طوری که

$$\angle AGB=\angle DHE=۱۲۰^\circ$$

نشان دهید

$$AG+GB+GH+DH+HE\geq CF$$

5. ماکزیمم مقادیر $x_۰$ هایی را پیدا کنید که برای آن ها دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت مانند «$x_۰$، $x_۱$، ...، $x_{۱۹۹۵}$» وجود داشته باشد که در دو شرط زیر صدق کند.

الف) $x_۰=x_{۱۹۹۵}$.

ب) به ازای هر $i=۱,۲,\cdots,۱۹۹۵$،

$$x_{i-۱}+\frac{۲}{x_{i-۱}}=۲x_i+\frac{۱}{x_i}$$

6. فرض کنیم p یک عدد اول فرد باشد. تعداد زیرمجموعه هایی مانند A از مجموعه ی $\{۱,۲,\cdots,۲p\}$ را پیدا کنید به طوری که

الف) زیرمجموعه ی A دقیقا دارای p عضو باشد.

ب) حاصلجمع اعضای A بر p قابل قسمت باشد.

مسأله های سی و هفتمین المپیاد جهانی ریاضی (بمبئی، هندوستان)،

1996

1. فرض کنیم **ABCD** مستطیلی به ابعاد $AB = ۲۰$ و $BC = ۱۲$ باشد. این مستطیل به ۱۲×۲۰ مربع به مساحت واحد تقسیم شده است. فرض کنید r عددی صحیح و مثبت باشد. یک مهره را از یک مربع به مربع دیگر می توان حرکت داد اگر و فقط اگر فاصله ی بین مرکز های دو مربع برابر $\sqrt{r}$ باشد. هدف ما پیدا کردن دنباله ای از حرکات مجاز است که مهره را از مربع به رأس **A** به مربع به رأس **B** ببرد.

الف) ثابت کنید اگر r بر **2** یا **3** بخش پذیر باشد این کار شدنی نیست.

ب) ثابت کنید اگر $r = ۷۳$ این کار شدنی است.

ج) آیا این کار وقتی $r = ۹۷$ شدنی است؟

2. فرض کنید **P** نقطه ای درون مثلث **ABC** باشد به گونه ای که

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

فرض کنید **D** و **E** به ترتیب مراکز دایره های محاطی مثلث های **APB** و **APC** باشند. نشان دهید خطوط **AP**، **BD** و **CE** در یک نقطه همرس اند.

3. فرض کنید $S = \{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$ مجموعه ی اعداد صحیح نامنفی باشد. همه ی توابعی مانند f را پیدا کنید که روی **S** تعریف شده باشد و مقادیرش را به روی **S** بگیرد و به ازای هر $m,n \in S$ داشته باشیم

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

4. اعداد صحیح و مثبت a و b طوری هستند که اعداد $۱۵a+۱۶b$ و $۱۶a-۱۵b$ هر دو مجذور اعدادی صحیح و مثبت اند. کمترین مقدار ممکن را که این دو مجذور اختیار می کنند پیدا کنید.

5. فرض کنیم **ABCDEF** یک شش ضلعی محدب باشد به طوری که **AB** موازی **ED**، **BC** موازی **FE** و **CD** موازی **AF** باشد. فرض کنید R_A، R_C و R_D به ترتیب شعاع دایره های محیطی مثلث های **FAB**، **BCD** و **DEF** باشند و **P** محیط شش ضلعی باشد. ثابت کنید

$$R_A + R_C + R_D \geq \frac{۱}{۲} P$$

6. فرض کنید n، p و q عددهایی صحیح و مثبت باشند و $n > p+q$. فرض کنید $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عدد هایی صحیح باشند که در شرایط زیر صدق می کنند:

الف) $x_۰ = x_n = ۰$

ب) به ازای هر i که $۱ \leq i \leq n$، $x_i - x_{i-۱} = p$ یا $x_i - x_{i-۱} = -q$.

نشان دهید یک زوج مرتب مانند (i,j) وجود دارد که $i < j$ و $(i,j) \neq (۰,n)$ به طوری که $x_i = x_j$

مسأله های سی و هشتمین المپیاد جهانی ریاضی (ماردل پلا تا، آرژانتین)،

1997

1. در صفحه ی مختصات نقاط با مختصات صحیح رأس های مربع های به مساحت واحدند. این مربع ها به طور یک در میان سیاه و سفید شده اند (مانند صفحه ی شطرنج).

به ازای هر زوج از اعداد صحیح مثبت m و n مثلث قائم الزاویه ای در نظر میگیریم که رأس های آن دارای مختصات صحیح باشند و اضلاع زاویه ی قائمه ی آن به طول m و n در امتداد اضلاع مربع های صفحه قرار گرفته باشند.

فرض می کنیم $S_۱$ مساحت کل قسمت های سیاه این مثلث و $S_۲$ مساحت کل قسمت های سفید آن باشد. قرار می دهیم

$$f(m,n) = |S_۱ - S_۲|$$

الف) $f(m,n)$ را برای وقتی که m و n یا هم زوج یا با هم فرد باشند حساب کنید.

ب) ثابت کنید به ازای هر m و n،

$$f(m,n) \le \frac{۱}{۲}\max\{m,n\}$$

ج) ثابت کنید که هیچ عدد ثابتی مانند C وجود ندارد که به ازای هر m و n، $f(m,n) < C$

2. در مثلث ABC زاویه ی A کوچکترین زاویه ی مثلث است. نقاط B و C محیط دایره ی محیطی مثلث را به دو کمان تقسیم می کنند. فرض کنید U یک نقطه از محیط دایره ی درون آن کمان BC باشد که شامل A نیست. عمود منصف های AB و AC خط AU را به ترتیب در V و W قطع می کنند. خطوط BV و CW یکدیگر را در T قطع می کنند. ثابت کنید

$$AU = TB + TC$$

3. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n اعداد حقیقی باشند که در شرایط

$$|x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n| = ۱,$$

$$|x_i| \le \frac{n+۱}{۲}, \quad i = ۱,۲,\cdots,n$$

صدق می کنند. ثابت کنید جایگشتی از $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n مانند $y_۱$، $y_۲$، ... و y_n وجود دارد که

$$|y_۱ + ۲y_۲ + \cdots + ny_n| \le \frac{n+۱}{۲}$$

4. ماتریسی $n \times n$ را که درایه های آن از مجموعه ی $S = \{۱,۲,\cdots,۲n-۱\}$ انتخاب شده اند ماتریس نقره ای می نامیم اگر به ازای هر $i = ۱,۲,\cdots,n$، سطر i ام و ستون i ام روی هم اعضای S را شامل شوند. نشان دهید

الف) هیچ ماتریس نقره ای برای $n = ۱۹۹۷$ وجود ندارد.

ب) ماتریس های نقره ای به ازای تعداد نا متناهی از n وجود دارد.

5. همه ی زوج های (a,b) از اعداد صحیح را که $a \ge ۱$ و $b \ge ۱$ پیدا کنید که در معادله ی زیر صدق کنند:

$$a^{b^۲} = b^a$$

6. به ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $f(n)$ تعداد نمایش های n به صورت مجموع توان های صحیح و نامنفی از عدد 2 باشد. نمایش هایی که فقط از نظر ترتیب نوشتن اعداد متفاوت اند یکی به حساب می آیند. مثلا $f(۴) = ۴$ زیرا که عدد 4 را به چهار شکل به صورت مجموع توان های 2 می توان نوشت یعنی 4، ۲+۲، ۱+۱+۲، ۱+۱+۱+۱. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n \ge ۳$،

$$۲^{\frac{n^۲}{۴}} < f(۲^n) < ۲^{\frac{n^۲}{۲}}$$

مسأله های سی و نهمین المپیاد جهانی ریاضی (تایپه، تایوان)،

1998

1. در چهارضلعی محدب ABCD قطر های AC و BD بر هم عمودند و اضلاع مقابل AB و DC موازی نیستند. فرض کنید نقطه ی P محل تلاقی عمود منصف های AB و DC درون چهارضلعی ABCD باشد. ثابت کنید چهارضلعی ABCD محاطی است اگر و فقط اگر مثلث های ABP و CDP مساحت های مساوی داشته باشند.

2. در یک مسابقه، a شرکت کننده و b داور وجود دارد که $b \geq ۳$ عددی فرد است. هر داور به هر شرکت کننده یا نمره ی « قبول » و یا نمره ی « رد » می دهد. فرض کنید k عددی باشد که هر دو داور حداکثر در مورد k شرکت کننده دارای نمره های یکسان باشند. ثابت کنید

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-۱}{۲b}$$

3. به ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $d(n)$ تعداد مقسوم علیه های مثبت n (شامل 1 و خود n) باشد. همه ی اعداد طبیعی مانند k را پیدا کنید به طوری که به ازای یک n داشته باشیم

$$\frac{d(n^۲)}{d(n)} = k$$

4. همه ی زوج های مرتب (a,b) از اعداد طبیعی را پیدا کنید که $a^۲b+a+b$ بر $ab^۲+b+۷$ قابل قسمت باشد.

5. فرض کنید I مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC باشد. فرض کنید دایره ی محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC، CA و AB به ترتیب در نقاط K، L و M مماس باشد. خطی که از B به موازات MK رسم می شود خطوط LM و LK را به ترتیب در R و S قطع می کند. ثابت کنید زاویه ی RIS حاده است.

6. همه ی توابعی مانند f از $\mathbb{N}$، مجموعه ی اعداد طبیعی، به خودش را در نظر می گیریم به طوری که به ازای هر m و n در $\mathbb{N}$ داشته باشیم

$$f\left(n^۲ f(m)\right) = m\left(f(n)\right)^۲$$

کمترین مقدار ممکن برای $f(۱۹۹۸)$ را پیدا کنید.

مسأله های چهلمین المپیاد ریاضی جهانی (بخارست، رومانی)،

1999

روز اول، 25 تیر ماه 1378

مدت 4 / 5 ساعت، هر مسئله 7 نمره

1. همه ی مجموعه های متناهی S را در صفحه مشخص کنید که دست کم سه نقطه داشته باشند و در شرط زیر صدق کنند:

به ازای هر دو نقطه ی متمایز **A** و **B** در S عمود منصف پاره خط **AB** یک محور تقارن برای S است.

2. فرض کنید n عدد صحیح مفروضی باشد که $n \ge 2$.

الف) کمترین مقدار برای عدد ثابت c را تعیین کنید به طوری که نامساوی

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \left(x_i^2+x_j^2\right) \le c\left(\sum_{1\le i\le n} x_i\right)^4$$

به ازای همه ی اعداد حقیقی $x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$ برقرار باشد.

ب) به ازای این عدد ثابت c مشخص کنید که تساوی چه وقت برقرار می شود.

3. جدول مربع شکل $n \times n$ را در نظر می گیریم که n یک عدد زوج است. این جدول به n^2 مربع واحد تقسیم شده است.

دو مربع متمایز را در جدول مجاور می نامیم چنانچه دارای یک ضلع مشترک باشند.

N مربع واحد را در جدول علامت می زنیم به طوری که هر مربع (علامت دار یا بی علامت) در جدول، مجاور دست کم یک مربع علامت دار باشد.

کمترین مقدار ممکن برای **N** را تعیین کنید.

روز دوم، 26 تیرماه 1378

مدت 4 / 5 ساعت، هر مسئله 7 نمره

4. همه ی زوج های (n,p) از عدد های صحیح مثبت را تعیین کنید که p عددی اول باشد و $n \le 2p$ و $(p-1)^n+1$ بر n^{p-1} بخش پذیر باشد.

5. دو دایره ی Γ_1 و Γ_2 درون دایره ی Γ قرار داشته و بر Γ در نقاط متمایز **M** و **N** به ترتیب مماس اند. Γ_1 از مرکز دایره Γ_2 می گذرد. خطی که از دو نقطه ی تقاطع دو دایره ی Γ_1 و Γ_2 می گذرد Γ را در **A** و **B** قطع می کند خطوط **MA** و **MB** دایره ی Γ_1 را به ترتیب در **C** و **D** قطع می کنند ثابت کنید **CD** بر Γ_2 مماس است.

6. همه ی توابع $f: \square \to \square$ را مشخص کنید به طوری که به ازای هر $x, y \in \square$ داشته باشیم

$$f\left(x-f(x)\right)=f\left(f(y)\right)+xf(y)+f(x)-1$$

(مربعهایی که میبینید-R)

مسایل چهل و یکمین المپیاد بین المللی ریاضیات

2000

روز اول

مسأله ی 1) دو دایره ی T_1 و T_2، یکدیگر را در نقطه های **M** و **N** قطع می کنند. فرض کنید خط l، مماس مشترک دایره های T_1 و T_2 باشد به طوری که **M** نسبت به **N** به **L** نزدیک تر است.

فرض کنید که **A** و **B** به ترتیب، نقاط تماس خط **L** با دایره های T_1 و T_2 باشد و همچنین، خط راستی که از **M** می گذرد و با خط l موازی است، دایره های T_1 و T_2 را به ترتیب در **C** و **D** قطع کند.

خط های **CA** و **DB** یکدیگر را در نقطه ی **P** قطع می کنند و همچنین خط های **BN** و **CD** یکدیگر را در نقطه ی **Q** قطع می نمایند. نشان دهید که $EP = EQ$.

مسأله ی 2) فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبتی باشند که در تساوی $abc = ۱$ صدق می کنند، ثابت کنید:

$$(a-۱+\frac{۱}{b})(b-۱+\frac{۱}{c})(c-۱+\frac{۱}{a}) \le ۱$$

مسأله ی 3) فرض کنید $n \ge ۲$ عددی صحیح و مثبت باشد. در آغاز، n پشه روی یک خط راست قرار دارند، به طوری که همگی در یک نقطه نمی باشند. برای یک عدد حقیقی و مثبت λ، حرکتی را به شکل زیر تعریف می کنیم:

دو پشه را که در نقاط **A** و **B** قرار دارند انتخاب می کنیم. (**A** در سمت چپ **B** قرار دارد.) فرض کنید پشه ای که در نقطه ی **A** قرار دارد به نقطه ی **C** که روی خط مفروض و در سمت راست نقطه ی **B** می باشد بپرد، به طوری که

$$\frac{BC}{AB} = \lambda.$$

تمام λ هایی را پیدا کنید که برای هر نقطه ی **M** روی خط مفروض و هر گونه نشستن پشه ها، یک دنباله ی متناهی از حرکت ها وجود داشته باشد به طوری که پشه ها در سمت راست نقطه ی **M** قرار بگیرند.

روز دوم

مسأله ی 4) یک جادوگر ۱۰۰ کارت با شماره های 1 تا ۱۰۰ دارد. او کارت ها را درون سه جعبه به رنگ های قرمز، سفید و آبی قرار می دهد، به طوری که هر جعبه حداقل شامل یک کارت باشد.

یکی از تماشاگران دو جعبه را انتخاب کرده و از هر کدام یک کارت بر می دارد و سپس مجموع اعداد نوشته شده روی دو کارت را می خواند. جادوگر با شنیدن عدد خوانده شده می تواند جعبه ای را که از آن کارتی انتخاب نشده است، مشخص نماید.

جادوگر به چند روش می تواند کارت ها را درون جعبه ها قرار دهد، به طوریک ه همیشه موفق به انجام این کار شود؟ (دو روش را متفاوت گوییم، اگر حداقل یک کارت درون یک جعبه ی متفاوت قرار گرفته باشد.)

مسأله ی 5) آیا عدد صحیح و مثبت n وجود دارد به طوری که n دقیقا بر ۲۰۰۰ عدد اول متمایز بخش پذیر بوده و همچنین $۲^n + ۱$ بر n بخش پذیر باشد؟

مسأله ی 6) فرض کنید AH_1، BH_2 و CH_3 ارتفاع های مثلث حاده الزاویه ی **ABC** هستند. دایره ی محاطی مثلث **ABC** بر اضلاع **BC**، **CA** و **AB** به ترتیب در نقاط T_1، T_2 و T_3 مماس باشد.

فرض کنید خط های l_1، l_2 و l_3 به ترتیب متقارن های خطوط H_2H_3، H_3H_1 و H_1H_2 نسبت به خط های T_2T_3، T_3T_1 و T_1T_2 باشد.

ثابت کنید خطوط l_1، l_2 و l_3 مثلثی را تشکیل می دهند که رأس های آن روی دایره ی محاطی مثلث **ABC** قرار دارد.

مسایل چهل و دومین المپیاد بین المللی ریاضیات

(واشنگتن دی سی، ایالات متحده آمریکا، 8 الی 9 جولای 2001)

1) فرض کنید ABC یک مثلث حاده الزاویه است و O مرکز دایره ی محیطی آن و P پای ارتفاع وارد از رأس A روی ضلع BC. می دانیم که $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. ثابت کنید $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$

2) ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی مثبت a، b و c،

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

3) بیست و یک پسر و بیست و یک دختر در یک مسابقه ریاضی شرکت کرده اند.

- هر شرکت کننده حداکثر شش مسأله حل کرده است.
- هر پسر و هر دختر، حداقل یک مسأله مشترک حل کرده اند.

ثابت کنید مسأله ای وجود دارد که حداقل توسط سه پسر و سه دختر حل شده است.

4) n عددی فرد و بزرگ تر از 1 است و k_1، ... و k_n، و n عدد صحیح هستند. برای هر یک از $n!$ جای گشت مثل $a=(a_1,\cdots,a_n)$ از 1، ... و n تعریف کنید

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i$$

ثابت کنید دو جای گشت مختلف b و c وجود دارند که $S(b)-S(c)$ بر $n!$ بخش پذیر است.

5) در مثلث ABC، P تقاطع نیم ساز داخلی $\angle BAC$ با ضلع BC است و Q تقاطع نیم ساز داخلی $\angle ABC$ با ضلع CA. می دانیم که $\angle BAC = 60^\circ$ و $AB+BP=AQ+QB$. زوایای مثلث ABC چه مقادیری می توانند داشته باشند؟

6) a، b، c و d اعدادی صحیح هستند و $a>b>c>d>0$. فرض کنید

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

ثابت کنید $ab+cd$ اول نیست.

چهل و سومین المپیاد جهانی ریاضی

2002

1) S مجموعه ی تمام (h,k) هایی است که h و k اعداد صحیح نامنفی ای اند که $h+k<n$. هر عضو S با آبی یا قرمز رنگ شده است، طوری که اگر (h,k) قرمز باشد و $h'\le h, k'\le k$ آن گاه (h',k') نیز قرمز است. نوع اول زیرمجموعه ی S حاوی n عضو آبی با عنصر آغازین متفاوت است و نوع دوم زیرمجموعه از S حاوی n عنصر آبی است که عنصر دومی متفاوتی دارند. نشان دهید که به تعدادی مساوی از زیرمجموعه های نوع یک و از زیرمجموعه های نوع دوم داریم.

2) BC قطر دایره ای به مرکز O است. A نقطه ای دلخواه روی دایره است که $\angle AOC>۶۰^\circ$. EF وتری است که عمود منصف AO می باشد. D نقطه ی وسط قوس کوچکتر AB است. خط گذرا از O که موازی AD رسم می شود AC را در J قطع می کند. نشان دهید که J مرکز دایره ی محاطی مثلث CEF است.

3) تمام جفت های اعداد صحیح $m>۲, n>۲$ را بیابید که بی نهایت عدد صحیح مثبت k وجود دارد که $k^n+k^۲-۱$ بر $k^m+k-۱$ بخش پذیر باشد.

4) مقسوم علیه های مثبت عدد صحیح $n>۱$، عبارت اند از: $d_۱<d_۲<\cdots<d_k$، طوری که $d_۱=۱, d_k=n$. فرض کنید $d=d_۱d_۲+d_۲d_۳+\cdots+d_{k-۱}d_k$. نشان دهید که $d<n^۲$ و تمام مقادیر n را بیابید که d مقسوم علیه $n^۲$ است.

5) تمام توابع حقیقی مقدار f بروی اعداد حقیقی را بیابید که برای هر x، y، u و v داشته باشیم:

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v))=f(xu-yv)+f(xv+yu)$$

6) $n>۲$ دایره به شعاع 1 روی صفحه رسم شده اند طوری که هیچ خطی بیشتر از دو دایره را قطع نمی کند. مراکز آن ها $O_۱$، $O_۲$، ... و O_n اند. نشان دهید که $\sum_{i<j}\frac{۱}{O_iO_j}\le\frac{(n-۱)\pi}{۴}$

جهل و چهارمین المپیاد بین المللی ریاضی

13 و 14 جولای 2003، ژاپن، توکیو

1. فرض کنید **A** زیرمجموعه ای ۱۰۱ عضوی از مجموعه ی $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$ باشد. ثابت کنید عدد هایی مانند t_1، t_2، ... و t_{100} در S وجود دارند، به طوری که هیچ دو تایی از مجموعه های

$$A_j=\{x+t_j : x\in A\},\quad j=1,2,\cdots,100$$

اشتراک ندارند.

2. همه ی زوج ها از عدد های طبیعی مانند (a,b) را طوری پیدا کنید که

$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$

عددی طبیعی باشد.

3. شش ضلعی ای مفروض است و در آن هر دو ضلع رو به رو این ویژگی را دارند که فاصله ی وسط ها یشان $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مجموع طول ها یشان است. ثابت کنید همه ی زاویه های این شش ضلعی برابرند.

4. فرض کنید **ABCD** چهارضلعی ای محدب باشد. فرض کنید **P**، **Q** و **R** پای عمود های وارد از **D** به ترتیب بر **BC**، **CA** و **AB** باشند. ثابت کنید $PQ=QR$ اگر و فقط اگر نیمساز زاویه های **ABC** و **ADC** روی پاره خط **AC** به هم برسند.

5. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و x_1، x_2، ... و x_n عدد هایی حقیقی باشند که $x_1<x_2\le\cdots\le x_n$.

الف) ثابت کنید

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\le\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$$

ب) ثابت کنید در نابرابری قسمت (الف) تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می آید که x_1، x_2، ... و x_n تصاعدی حسابی تشکیل دهند.

6. فرض کنید p عددی اول باشد. ثابت کنید عددی اول مانند q وجود دارد که به ازای هر عدد طبیعی مانند n، n^p-p بر q بخش پذیر نیست.

چهل و پنجمین المپیاد جهانی ریاضی

2004

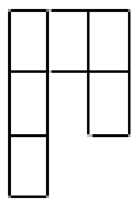
روز اول

1) فرض کنید ABC مثلثی حاده الزاویه باشد که $AB \neq AC$. دایره ی به قطر BC اضلاع AB و AC را ، به ترتیب، در M و N قطع می کند. فرض کنید که O نقطه ی وسط ضلع BC باشد. نیمساز های زوایای BAC و MON در R یکدیگر را قطع می کنند. ثابت کنید که دایره ی محیطی های مثلث های BMR و CNR نقطه ی مشترکی بر روی ضلع BC دارند.

2) تمام چندجمله ای های f با ضرایب حقیقی را بیابید که برای همه اعداد حقیقی a، b و c که $ab+bc+ca=0$ رابطه ی زیر را داشته باشیم:

$$f(a-b)+f(b-a)+f(c-a)=2f(a+b+c)$$

3) فرض کنید به شکلی مانند شکل زیر که از شش مربع واحد تشکیل شده است یا هر شکلی که از دوران آن بدست می آید، یک « قلاب » بگوییم



تمام مستطیل هایی را مشخص کنید که می توانند با قلاب ها پوشیده شوند طوری که هیچ رخنه ای نباشد و هیچ پوششی اضافه نیاید و هیچ قسمتی توسط دو قلاب پوشیده نشود.

روز دوم

4) فرض کنید $n \geq 2$ عددی صحیح باشد و t_1، t_2، ... و t_n اعداد حقیقی مثبتی باشند که

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$$

ثابت کنید که به ازای هر i، j و k که $1 \leq i < j < k \leq n$ درست است که t_i، t_j و t_k می توانند طول ضلع های یک مثلث باشند.

5) در چهارضلعی محدب ABCD قطر BD نه زاویه ی ABC و نه زاویه ی CDA را نصف می کند. نقطه ی P درون ABCD قرار دارد و

$$\widehat{PBC}=\widehat{DBA} \quad \text{و} \quad \widehat{PDC}=\widehat{BDA}$$

ثابت کنید که ABCD چهارضلعی ای محیطی است اگر و تنها اگر $AP=CP$

6) به عدد صحیح مثبتی می گوییم متناوب که هر دو رقم متوالی در نمایش دهدهی آن متمایز باشند.

تمام اعداد صحیح مثبت n را بیابید که n دارای مضربی باشد که متناوب است.

Naser farhadi

چهل و ششمین المپیاد جهانی ریاضی

2005

(مریدا، یوتاکن، مکزیک)

روز اول- 13 ژوئیه ی 2005

1) شش نقطه روی اضلاع مثلث متساوی الاضلاع **ABC** داده شده اند: A_1 و A_2 روی **BC**، B_1 و B_2 روی **CA** و C_1 و C_2 روی **AB**، طوری که آن ها رئوس شش ضلعی محدب $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ اند که اضلاع هم طولی دارد.

ثابت کنید که خطوط A_1B_2، B_1C_2 و C_1A_2 همرس اند.

2) a_1، a_2، ... دنباله ای از اعداد صحیح است که بی نهایت جمله ی مثبت و بی نهایت جمله ی منفی دارد. فرض کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n اعداد a_1، a_2، ... و a_n در تقسیم به n، n باقیمانده ی متمایز را تولید کنند.

ثابت کنید هر عدد صحیح دقیقا یک بار در دنباله ی a_1، a_2، ... ظاهر می شود.

3) فرض کنید x، y و z سه عدد حقیقی مثبت باشند که $xyz \geq 1$. ثابت کنید

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0$$

روز دوم 14 ژوئیه ی 2005

4) تمام اعداد صحیح مثبتی را بیابید که نسبت به تمام عناصر دنباله ی زیر اول اند:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, n \geq 1$$

5) **ABCD** یک چهارضلعی محدب ثابت باشد که $BC = DA$ و **BC** با **DA** موازی نیست. فرض کنید دو نقطه ی ثابت **E** و **F** ، به ترتیب، روی اضلاع **BC** و **DA** قرار دارند و $BE = DF$. خطوط **AC** و **BD** در **P** همرس اند، خطوط **BD** و **EF** در **Q** متقاطع اند و خطوط **EF** و **AC** در **R** یکدیگر را قطع می کنند.

ثابت کنید دایره های محیطی مثلث های **PQR**، که **E** و **F** متغیر اند، نقطه ی مشترکی بجز نقطه ی **P** دارند.

6) در یک مسابقه ی ریاضی، که 6 مساله داده شده است، هر دو مساله از این سوالات توسط بیشتر از $\frac{2}{5}$ مسابقه دهندگان حل شده است. علاوه بر این، هیچ مسابقه دهنده ای هر 6 مساله را حل نکرده است. نشان دهید که لااقل 2 مسابقه دهنده وجود دارند که هر یک دقیقا 5 مساله را حل کرده اند.

۱۲ جولای ۲۰۰۶

مساله ۱. فرض کنید I مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. نقطه P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می کنیم که

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB \ .$$

نشان دهید $AP \geq AI$ و تساوی برقرار می شود اگر و تنها اگر $P=I$.

مساله ۲. فرض کنید P یک ۲۰۰۶ـ ضلعی منتظم باشد. قطری از P را **خوب** گوییم هر گاه نقاط انتهایی این قطر، اضلاع P را به دو قسمت تقسیم کند که هرقسمت تعداد فرد ضلع دارد. اضلاع P نیز قطر **خوب** به حساب می‌آیند. فرض کنید P را با ۲۰۰۳ قطر که هیچ دو تای آن ها درون P تقاطع ندارند به ناحیه های مثلث شکل تقسیم کرده ایم. بیشترین تعداد مثلث های متساوی الساقین با دو ضلع خوب را بیابید که می توانند در این ناحیه بندی ظاهر شوند.

مساله ۳. کمترین مقدار عدد حقیقی M را بیابید به طوری که نامساوی

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

برای هر a ، b و c حقیقی برقرار باشد.

۱۳ جولای ۲۰۰۶

مساله ۴. همه زوج های صحیح (x, y) را بیابید که

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 \ .$$

مساله ۵. فرض کنید $P(x)$ یك چند جمله ای از درجه $1<n$ با ضرایب صحیح و k یك عدد صحیح مثبت باشد. چند جمله ای $Q(x)= P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ را در نظر بگیرید که P در آن k بار ظاهر می شود. ثابت کنید حداکثر n عدد صحیح t وجود دارد به طوری که $Q(t)=t$.

مساله ۶. به هر ضلع b از یک چند ضلعی محدب P، بیشترین مساحت مثلثی را نسبت می دهیم که b را به عنوان ضلع دارد و در P قرار گرفته است. نشان دهید مجموع مساحت های نسبت داده شده به اضلاع P، حداقل دو برابر مساحت P است.

به نام او

Iranian Version — *July 25, 2007* — روز اول

۱) اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داده شده است. برای هر i صحیح که $1 \leq i \leq n$ تعریف کنید:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

و قرار دهید

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

الف) برای هر دنباله دیگر $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ از اعداد حقیقی ثابت کنید

$$* \max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}.$$

ب) نشان دهید اعداد حقیقی $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ یافت می شود که نامساوی * به تساوی تبدیل شود.

۲) پنج نقطه A, B, C, D, E در صفحه به گونه ای قرار دارند که $ABCD$ متوازی الاضلاع و چهار ضلعی $BCED$ محاطی است. فرض کنید خط l گذرا از A درون پاره خط DC را در نقطه F و خط BC را در نقطه G قطع می کند. اگر $EF = EG = EC$ ثابت کنید l نیم ساز زاویه DAB است.

۳) در یک مسابقه ریاضی بعضی شرکت کننده ها دوست هستند. دوستی همواره دو طرفه فرض می شود. یک گروه از شرکت کننده ها را کلیک گوییم هر گاه هر دو تا از آن ها دوست باشند. (به ویژه هر گروه با کم تر از دو عضو یک کلیک است.) به تعداد افراد یک کلیک اندازه آن کلیک می گوییم.

فرض کنید شرکت کنندگان در این مسابقه به گونه ای هستند که حداکثر اندازه کلیک ها زوج است. ثابت کنید شرکت کننده ها را می توان در دو اتاق جداگانه به گونه ای قرار داد که حداکثر اندازه کلیک های اتاق اول برابر حداکثر اندازه کلیک های اتاق دوم باشد.

به نام او

Iranian Version — *July 26, 2007* — روز دوم

۴) در مثلث ABC نیم ساز زاویه BCA دایره محیطی را در R، عمود منصف BC را در P و عمود منصف AC را در Q قطع می کند. اگر K وسط ضلع BC و L وسط ضلع AC باشد ثابت کنید مثلث های RPK و RQL مساحت برابر دارند.

۵) فرض کنید a و b اعداد صحیح مثبت باشند. نشان دهید اگر $(4a^2-1)^2$ بر $4ab-1$ بخش پذیر باشد آن گاه $a = b$.

۶) فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. مجموعه $(n+1)^3 - 1$ نقطه ای زیر را از فضای سه بعدی در نظر بگیرید

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

کم ترین تعداد صفحاتی را بیابید که اجتماع آن ها اجبارا همه نقاط S را در بر دارد ولی مبدا را شامل نمی شود.

چهارشنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۸ به نام او

مساله۱. در مثلث حاده الزاویه ABC، H مرکز ارتفاعی است. دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط BC، خط BC را در A_1 و A_2 قطع می‌کند. به طور مشابه دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AC، خط AC را در B_1 و B_2 قطع می‌کند و دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AB، خط AB را در C_1 و C_2 قطع می‌کند. نشان دهید A_1، A_2، B_1، B_2، C_1 و C_2 روی یک دایره هستند.

مساله۲. الف) نشان دهید نامساوی $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$ برای هر سه عدد حقیقی x,y,z مخالف یک و با شرط $xyz=1$ برقرار است.

ب) نشان دهید تساوی برای بینهایت سه تایی x,y,z از اعداد ***گویای*** مخالف یک با شرط $xyz=1$ رخ می دهد.

مساله ۳. نشان دهید تعداد اعداد طبیعی مانند n به طوری که n^2+1 عامل اولی بزرگتر از $2n+\sqrt{2n}$ دارد نامتناهی است.

پنج شنبه، ۱۷ جولای ۲۰۰۸ به نام او

مساله ۴. تمام توابع $f:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ را بیابید به طوری که برای هر w,x,y,z مثبت با شرط $wx=yz$ داشته باشیم

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

مساله ۵. دو عدد طبیعی n و k با زوجیت یکسان و شرط $k\geq n$ داده شده اند. فرض کنید $2n$ لامپ با شماره های $1,2,...,2n$ داریم که هر کدام می توانند روشن یا خاموش باشند و در ابتدا همه لامپ ها خاموش هستند. منظور از دنباله، دنباله ای متشکل از چند مرحله است که در هر مرحله دقیقا یکی از لامپ ها را تغییر وضعیت می دهیم (از روشن به خاموش یا از خاموش به روشن).

N را تعداد دنباله های k_مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد. متناظرا M را تعداد دنباله های k_مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد با این محدودیت که وضعیت لامپ های $n+1$ تا $2n$ را در هیچ مرحله ای تغییر ندهیم. حاصل $\frac{N}{M}$ را بیابید.

مساله ۶. فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب با شرط $AB\neq BC$ باشد. دایره های محاطی مثلث های ABC و ADC را به ترتیب با ω_1 و ω_2 نشان می دهیم. فرض کنید دایره‌ی ω وجود داشته باشد به طوری که بر امتداد BA از طرف A و بر امتداد BC از طرف C مماس باشد و همچنین بر خطوط AD و CD نیز مماس باشد. ثابت کنید مماس های خارجی مشترک دو دایره ω_1 و ω_2 با یکدیگر روی ω برخورد می کنند.

چهارشنبه، ۱۵ جولای ۲۰۰۹

سوال ۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و a_1 ، … ، a_k ($k \geq 2$) اعدادی صحیح متمایز از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشند که برای $i = 1, \dots, k-1$، $a_i(a_{i+1} - 1)$ بر n بخش‌پذیر است. ثابت کنید که $a_k(a_1 - 1)$ بر n بخش‌پذیر نیست.

سوال ۲. فرض کنید ABC یک مثلث با مرکز دایره محیطی O باشد. نقاط P و Q به ترتیب نقاط داخلی اضلاع AC و AB می‌باشند. همچنین فرض کنید K ، L و M به‌ترتیب وسط‌های BP ، CQ و PQ باشند و Γ دایره‌ای باشد که از نقاط K ، L و M می‌گذرد. فرض کنید خط PQ بر دایره Γ مماس باشد. ثابت کنید $OP = OQ$.

سوال ۳. فرض کنید که $s_1, s_2, s_3, \dots$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری‌که زیر دنباله‌های

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{و} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

هر دو تصاعد حسابی هستند. ثابت کنید که دنبالهٔ $s_1, s_2, s_3, \dots$ نیز یک تصاعد حسابی است.

پنج‌شنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۹

سوال ۴. فرض کنید ABC یک مثلث باشد که $AB = AC$. نیمسازهای $\angle CAB$ و $\angle ABC$ اضلاع BC و CA را به ترتیب در D و E را قطع می‌کنند. فرض کنید K مرکز دایره محاطی مثلث ADC باشد. فرض کنید $\angle BEK = 45^\circ$. تمام مقادیر ممکن برای زاویه $\angle CAB$ را بیابید.

سوال ۵. تمام توابع f از مجموعه اعداد صحیح مثبت به مجموعه اعداد صحیح مثبت را بیابید که برای هر دو عدد صحیح و مثبت a و b، یک مثلث ناتبهگون با اضلاع

$$a, \ f(b), \ f(b + f(a) - 1)$$

وجود داشته باشد. (یک مثلث *ناتبهگون* مثلثی است که رئوس آن هم‌خط نیستند)

سوال ۶. فرض کنید که a_1 ، a_2 ، … ، a_n اعداد صحیح مثبت و متمایز باشند و M مجموعه‌ای از $n - 1$ عدد صحیح مثبت است که شامل عدد $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ نیست. یک ملخ قرار است که با شروع از نقطه ۰ در مسیر محور اعداد حقیقی بپرد و n پرش به طول‌های a_1 ، a_2 ، … ، a_n به سمت راست و با یک ترتیب خاص انجام دهد. ثابت کنید این ترتیب را می‌توان طوری انتخاب کرد که ملخ هیچ‌گاه روی نقطه‌ای از M فرود نیاید.

چهار شنبه ۷ جولای

سوال ۱. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که تساوی

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ برقرار باشد. (در این جا منظور از $\lfloor z\rfloor$ بزرگترین عدد کوچکتر یا مساوی با z است.)

سوال ۲. فرض کنید I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و Γ دایرهٔ محیطی آن باشد. خط AI دایرهٔ Γ را بار دیگر در D قطع می کند. فرض کنید E نقطه ای روی کمان $\widehat{BDC}$ و F نقطه ای روی ضلع BC باشند به طوری که

$$\angle BAF=\angle CAE<\tfrac{1}{2}\angle BAC$$

همچنین G را نقطهٔ وسط پاره خط IF بگیرید. ثابت کنید خطوط DG و EI روی دایرهٔ Γ یکدیگر را قطع می کنند.

سوال ۳. $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. تمام توابع $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ یک مربع کامل باشد.

پنج شنبه ۸ جولای ۲۰۱۰

سوال ۴. فرض کنید P نقطه ای درون مثلث ABC باشد. خطوط AP، BP و CP به ترتیب دایرهٔ محیطی Γ از مثلث ABC را بار دیگر در نقاط K، L و M قطع می کنند. خط مماس بر دایرهٔ Γ در نقطهٔ C خط AB را در S قطع می کند. فرض کنید $SC=SP$. ثابت کنید $MK=ML$.

سوال ۵. در هر یک از شش صندوق B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 در ابتدا یک سکه قرار دارد. دو نوع حرکت زیر مجاز است:

حرکت نوع ۱: یک صندوق B_j را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1\le j\le 5$. یک سکه از B_j بردارید و دو سکه به B_{j+1} اضافه کنید.

حرکت نوع ۲: یک صندوق B_k را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1\le k\le 4$. یک سکه از B_k بردارید و محتوای صندوق های B_{k+1} و B_{k+2} (که می توانند خالی هم باشند) را با هم عوض کنید.

آیا می توان با دنباله ای متناهی از حرکات بالا به وضعیتی رسید که صندوق های B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 خالی باشند و در صندوق B_6 دقیقاً $2010^{2010^{2010}}$ سکه باشد؟ (توجه کنید که $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.)

سوال ۶. فرض کنید $a_1,a_2,a_3,\ldots$ دنباله ای داده شده از اعداد حقیقی مثبت باشد. فرض کنید به ازای یک عدد طبیعی s، تساوی

$$a_n=\max\{a_k+a_{n-k}\mid 1\le k\le n-1\}$$

برای هر $n>s$ برقرار باشد. ثابت کنید اعداد طبیعی l و N وجود دارند که $l\le s$ و برای هر $n\ge N$ داشته باشیم $a_n=a_l+a_{n-l}$.