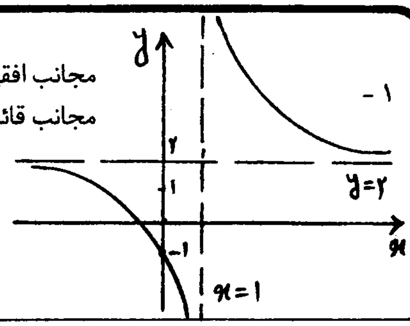
بسمه تعالی

سئوالات امتحان کلاسهای پیش‌دانشگاهی هماهنگ کشوری	درس : ریاضی عمومی(۲) رشته : علوم تجربی	تاریخ امتحان : ۱۳۷۵/۱۰/۱۳ مدت : ۱۲۰ دقیقه	آزمون شماره ۱۰

۱ - منحنی نمایش تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ را رسم کنید ؟	۱
۲ - نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بیابید که از نقطه $(4 و 0)$ کمترین فاصله را داشته باشد .	۱
۳ - ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$ را با استفاده از آزمون مشتق اول به دست آورید،آیا این تابع ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد؟ چرا؟	۱/۵
۴ - تابع $y=ax^3+bx^2+4$ مفروض است مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نقطه (۲ و۱) نقطه‌عطف منحنی‌نمایش تابع باشد.	۱/۵
۵ - با استفاده از دومین قضیه اساسی حساب انتگرال، انتگرالهای معین زیر را محاسبه کنید. الف) $\int_{-2}^{2} x\,\lvert x-3\rvert\,dx$ ب) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(5\sin x-3\cos x)dx$	۲
۶ - اولین قضیه اساسی حساب انتگرال را بیان کنید.	۰/۵
۷ - تابع $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-3$ داده شده است : الف) نقاط بحرانی f را بیابید. ب) بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی یا نزولی هستند مشخص کنید. پ) تقعر منحنی f در چه بازه‌ای به طرف بالا و درچه بازه‌ای به طرف پایین است؟	۱/۵
۸ - $\int_{1}^{7}\frac{\lvert x-3\rvert-4}{2}dx$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۹ - $\int(3x^2+2x+1)dx$ را حساب کنید و درستی پاسخ خود را با مشتق‌گیری مقایسه آن با تابع تحت علامت انتگرال، نشان دهید.	۱/۵
۱۰ - مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=x^2$ و $x=y^2$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۱ - نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را رسم کنید. آیا می‌توان برای محاسبه انتگرال تابع f روی بازه [۱ و ۱-] از دومین قضیه اساسی حساب انتگرال استفاده کرد؟ چرا؟	۱/۵
جمع	۱۵

۱۰	پاسخ آزمون شماره ده — درس ریاضیات عمومی (۲) — کلاسهای پیش دانشگاهی هماهنگ کشوری — رشته: علوم تجربی — تاریخ امتحان: ۷۵/۱۰/۱۳	تشریح از: فرشته بهروزی

۱- 

مجانب افقی / مجانب قائم $\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x\to\pm\infty \Rightarrow y=2 \\ x\to\pm\infty \Rightarrow x=1 \end{cases}$

تابع اکیدا نزولی است $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		−		−		−	‖	−	
y	2	↘	0	↘	−1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

۲- فاصلهٔ دو نقطه AB را $M(x)$ می‌نامیم:

$B(4,0)$

$$A(x,\sqrt{x}) \Rightarrow M(x)=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2-7x+16} \Rightarrow M'(x)=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

۳- $y'=x^2-5x+6 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x=2 \quad , \quad x=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		+		−		+	
y		↗		↘		↗	

در $x=2$ تابع یک ماکزیمم نسبی و در $x=3$ مقدار می‌نیمم نسبی است مقدار ماکزیمم نسبی آنها برابر $\frac{14}{3}$ و مقدار می‌نیمم نسبی آن $\frac{9}{2}$ می‌باشد.
این تابع فاقد ماکزیمم و می‌نیمم مطلق است چون $\lim_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$

۴- $y'=3ax^2+2bx \Rightarrow y''=6ax+2b \Rightarrow y''=0 \Rightarrow 6ax+2b=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow b=-3a$ ، $a+b=2$ $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

۵- $|x-3|$ در بازهٔ $[-2,2]$ همواره منفی است پس خواهیم داشت: $|x-3|=-x+3$

الف) $\int_{-2}^{2} x\,|x-3|\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+3x)\,dx=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)\Big|_{-2}^{2}=-\frac{16}{3}$

ب) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(5\sin x-3\cos x)\,dx=(-5\cos x-3\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=5-(-3)=8$

۶- فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ و برای هر x که $a\le x\le b$ ، $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ در نتیجه برای هر x که $a<x<b$ داریم که $A'(x)\,f(x)$

۷- الف) $f'(x)=3x^2-9x+6=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x=2 \Rightarrow \{1,2\}$ مجموعه نقاط بحرانی $\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{2}\,,\, f(2)=-1$

ب)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+		−		+	
y		↗		↘		↗	

$f''(x)=6x-9=0 \to x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f''(x)		−	0	+	
		تقعر روبه پایین		تقعر روبه بالا	

نقطهٔ عطف $f(\frac{3}{2})=\frac{-3}{4}$

۸- $\int_1^3 \frac{|x-3|-4}{2}\,dx=\frac{1}{2}(1+2)(2)=3$

$\int_3^7 \frac{|x-3|-4}{2}\,dx=\frac{4\times 2}{2}=4$

$\Rightarrow -3-4=-7$

۹- $\int(3x^2+2x+1)\,dx=x^3+x^2+x+c \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3+x^2+x+c)=3x^2+2x+1$

۱۰- $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{تقاطع}]{\text{محل}} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

۱۱- خیر چون تابع f در فاصله $[-1,1]$ پیوسته نیست.

$y'=\frac{-2x}{x^4} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$

x	y
$\pm\infty$	0
0	$\pm\infty$
1	1
−1	1

x	$-\infty$		−1		0		1		$+\infty$
y'		+		+	‖	−		−	
y	0	↗	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↘	1	↘	0