آزمون: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ — سال تحصیلی ۸۲ - ۱۳۸۱

رشته: ریاضی شبانه — نیمسال: ~~اول~~ - دوم

کلاس: پیش دانشگاهی — مدت: ۱۰۰ دقیقه

صفحه ۱

بارم	
۱	۱- معادله خط مماس بر نمودار تابع $2\sqrt{x}+y^2+3x^2y+x=1$ را در نقطه $(1,-1)$ بنویسید.
۱	۲- تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$ مفروض است. مقدار مشتق تابع f^{-1} را در نقطه‌ای به طول $b=2\in D_{f^{-1}}$ محاسبه کنید.
۱	۳- تابع هزینه x تن از کالایی برحسب تومان به صورت زیر می‌باشد $c(x)=12000+20x+2\sqrt{x}$ مطلوب است محاسبه الف) هزینه استخراج ۵ تن از کالا — ب) هزینه متوسط ۱۰۰ تن ج) هزینه نهایی ۱۰۰ تن — د) هزینه واقعی ۱۰۱ امین تن
۱	۴- قضیه: اگر نقطه c برای تابع f نقطه اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$.
۱٫۲۵	۵- ثابت کنید $|x_2-x_1|\geq|\sin x_2-\sin x_1|$ را به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید.
۱٫۵	۶- تابع $f(x)=|x^2-2x|+1$ را به صورت چند ضابطه‌ای نوشته و سپس نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را در بازه $[0,3]$ مشخص کنید.
۲	۷- جدول تغییرات و نمودار فقط یکی از دو تابع زیر را رسم کنید. I) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ — II) $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}$ $[0,2\pi]$
۲	۸- اولاً مقدار تقریبی $\sqrt[4]{17}$ را به کمک دیفرانسیل محاسبه کنید و ثانیاً مقدار $\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-2\cos^2 x}{\sin(2x-\pi/2)}$ را به کمک قاعده هوپیتال محاسبه کنید.
مجموع ۱۰٫۵	

بقیه سؤالات صفحه ۲

صفحه ۲

۹- مقادیر تقریب اضافی و نقصانی مساحت محدود به نمودار $y=1-\frac{1}{x^2}$ و محور x ها و دو خط $x=1$ و $x=3$ را برای $n=4$ بدست آورید. ۱ نمره

۱۰- اگر f و g دو تابع انتگرال پذیر روی $[a,b]$ باشند آنگاه ثابت کنید

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

۱ نمره

۱۱- بدون محاسبه انتگرال مطلوبست:

$$\frac{d}{dt}\int_t^{\sin^2 t}\frac{dx}{1+x^3}$$

۰٫۷۵ نمره

۱۲- مطلوبست محاسبه

I) $\int x^2\cos(1-x^3)\,dx$

II) $\int_1^2 \frac{[x]}{x^2}\,dx$

III) $\int_0^2 x|2x-1|\,dx$

۱٫۷۵ نمره

موفق باشید.

بسمه تعالی پاسخ آزمون درس ریاضی ۲ ...

1) $y' = -\dfrac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 6xy + 1}{2y + 3x^2}$ (۰/۵) $\xrightarrow[y=-1]{x=1}$ $m = -\dfrac{-4}{1} = 4$ (۰/۲۵)

$y + 1 = 4(x-1) \Rightarrow y = 4x - 5$ (۰/۲۵)

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3} = 2 \longrightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1$ (۰/۲۵)

$f'(x) = \dfrac{-x^4 - 3x^2}{x^6} \Rightarrow f'(1) = -7$ (۰/۲۵)

$(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{-7}$ (۰/۵)

3) $C(0) = 12000$ الف (۰/۲۵)

$\dfrac{C(100)}{100} = \dfrac{14020}{100} = 140/20$ ب (۰/۲۵)

(۰/۵)

$C'(x) = 20 + 2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x=100} C'(100) = 20 + \dfrac{1}{10} = 20/1$

$C(101) - C(100) = \dots$ (۰/۲۵)

4) قضیه کتاب الزاماً قابل ... تقسیم می‌شود

5) اگر $f(x) = \cos x$ را در $[x_1, x_2]$ در نظر بگیریم در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند (۰/۲۵)

$\exists\, c \in (x_1, x_2)\ ;\ f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (۰/۲۵)

$-\sin c = \dfrac{\cos x_2 - \cos x_1}{x_2 - x_1}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow |\sin c| = \dfrac{|\cos x_2 - \cos x_1|}{|x_2 - x_1|} \leq 1$ (۰/۲۵)

$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1|$ (۰/۲۵)

6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x + 1 & 2 \leq x \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ \text{ندارد} & x = 0 \\ -2x + 2 & 0 < x < 2 \\ \text{ندارد} & x = 2 \\ 2x - 2 & 2 < x \end{cases}$ (۰/۲۵)

نقاط بحرانی (۰/۵)

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 1$ → min مطلق (۰/۲۵)

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 4$ → Max مطلق

$A\,|^{1}_{2}$ Max نسبی

$B\,|^{2}_{1}$ min نسبی (۰/۲۵)

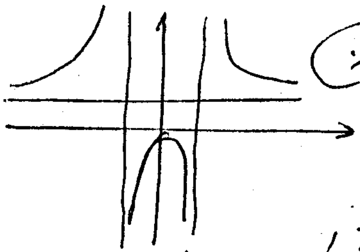
x	y
$\pm\infty$	$y=1$
$x=\pm 1$	$\pm\infty$
$y'=0$ ، 0	0

مجانب قائم $\begin{cases} y \to \pm\infty \\ x=\pm 1 \end{cases}$ (۰/۲۵)　مجانب افقی $\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y=1 \end{cases}$ (۰/۲۵)

$y' = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$		$+ \;\vdots\; -$		$-$
y	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1$

(۰/۷۵)



(۰/۵)

نمودار

$f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ مانند نمودار قبلی باید رسم شود

(۰/۲۵) $f(a+\Delta x) \simeq f(a) + f'(a)\Delta x$

$\begin{cases} f(x) = \sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - 8 \\ f'(16) = \dfrac{1}{4 \times 8} \end{cases}$ (۰/۲۵)

(۰/۵) $\sqrt[4]{17} \simeq 2 + \dfrac{1}{32} = \dfrac{65}{32}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - 2\sin 2x}{\sin(2x - \frac{\pi}{2})} = \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{4 \cos 2x}{2 \cos(2x - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{3}$ (۱)

(۹)

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{2}$ (۰/۲۵)

$x = 1 < \frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2} < 3$ (۰/۲۵)

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0$

مجموع پایین $= \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right)$ (۰/۲۵)

ترتیب نزولی

$= \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)$ (۰/۲۵)

ما توضیح کتاب: به هر ترتیب تقسیم کار شود

(۱۱)

$2\sin 2t \left(\dfrac{1}{1+\sin^2 2t}\right) - \left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

(۱۲)

الف) $-\frac{1}{3}\int -3x^2 \cos(1-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\sin(1-x^3) + C$

$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx = \frac{-1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (۰/۵)

$\int_0^{\frac{1}{2}} (-2x^2 + x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x^2 + x)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x\right)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}$ (۰/۷۵)