باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)** رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : **۱۰ : ۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۱۵ نمره ای)		تاریخ امتحان : ۱۳۸۸ / ۱۰ /۱۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نیم سال اول** سال تحصیلی **۸۹ – ۱۳۸۸**		**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی** http://aee.medu.ir

ردیف	سؤالات	نمره
۱	اشتراک دو بازه‌ی $(-۳ , ۲)$ و $(-۱ , ۴)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته، مرکزو شعاع آن را تعیین‌کنید.	۰/۷۵
۲	اگر $۰ < a < b$ ، ثابت کنید $۰ < b^{-۱} < a^{-۱}$.	۰/۷۵
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها، ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۵n^۲+۴}{n^۲+۱} = ۵$	۱
۴	نشان دهید دنباله‌ی $\left\{\frac{n^۲}{۲^n}\right\}$ برای $n \geq ۳$ ، یکنوا و کراندار است.	۱
۵	همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی مقدار سری را به دست آورید. الف) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴k^۲+۱۶k+۱۵}$ ب) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۱+۲^k}{۳^{k+۱}}$	۲
۶	با استفاده از دنباله‌ها ثابت کنید $f(x) = \mathrm{Sin}(\frac{۱}{x-۲})$ در $x = ۲$ حد ندارد.	۱
۷	حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^۲+x+۱}-\sqrt{x^۲-x+۱})$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-۳x+۲}$	۲/۷۵
۸	تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}$ مفروض است. در صورتی که ناپیوستگی تابع f در $x_۰ = ۴$ رفع شدنی باشد ، با اختصاص مقدار مناسبی در نقطه‌ی داده شده ، ضابطه‌ی جدیدی برای f بنویسید.	۰/۷۵
۹	نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \mathrm{Cos}۲\pi x - ۲x^۳$ محور x ها را حداقل در یک نقطه در فاصله $[۰ , ۱]$ قطع می کند.	۰/۷۵
۱۰	معادله‌ی تمام خطوط مجانب منحنی $f(x) = x\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۱	تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a+x & , \quad x<۱ \\ b\sqrt[۳]{x} & , \quad x \geq ۱ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که f در $x_۰ = ۱$ مشتق پذیر باشد.	۱/۲۵
۱۲	اگر $f(۰) = ۰$ و $f(x) = \mathrm{Sin}(۴x - f(x))$ ، آنگاه $f'(۰)$ را به دست آورید.	۱
۱۳	اگر f و g هر دو در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند، آنگاه تابع $f.g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$	۰/۷۵
	«موفق باشید» جمع نمره	۱۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : **۱۰ : ۳۰ صبح**
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۱۵ نمره ای)		تاریخ امتحان : **۱۷/ ۱۰ / ۱۳۸۸**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نیم سال اول** سال تحصیلی **۸۹– ۱۳۸۸**		**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی** **http://aee.medu.ir**

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>راهنمای تصحیح</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>
$(-۳,۲)\bigcap(-۱,۴)=(-۱,۲)=\left\{x\in R: \left|x-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۳}{۲}\right\}$ (۰/۲۵)
مرکز $a=\frac{-۱+۲}{۲}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) و شعاع $r=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵)
</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>
a و $b>۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{ab}>۰$ (۰/۲۵)
$۰<a<b \underset{\times\frac{۱}{ab}}{\Rightarrow} ۰<a\times\frac{۱}{ab}<b\times\frac{۱}{ab}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۰<b^{-۱}<a^{-۱}$ (۰/۲۵)
</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>
$\lim_{n\to\infty}\frac{۵n^۲+۴}{n^۲+۱}=۵ \equiv \forall\varepsilon>۰,\exists M\in N\ ,\ n\ge M \Rightarrow \left|\frac{۵n^۲+۴}{n^۲+۱}-۵\right|<\varepsilon$ (۰/۲۵) $\equiv \frac{۱}{n^۲+۱}<\varepsilon$
$\equiv n^۲+۱>\frac{۱}{\varepsilon}$ (۰/۲۵) $\equiv n^۲+۱>n^۲>\frac{۱}{\varepsilon} \equiv n>\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}}$ (۰/۲۵)
کافی است $M\ge\left[\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+۱$ اختیار کنیم، تا استلزام فوق همواره برقرار باشد. (۰/۲۵)
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>
$a_n=\frac{n^۲}{۲^n}\ ,\ n\ge۳ \Rightarrow |a_n|<۲$ دنباله کراندار است (۰/۲۵)
$\frac{۹}{۸},۱,\frac{۲۵}{۳۲},\dots\to۰$ دنباله نزولی است (۰/۲۵)
$\underset{(۰/۲۵)}{a_{n+۱}\le a_n} \Leftrightarrow \frac{(n+۱)^۲}{۲^{n+۱}}\le\frac{n^۲}{۲^n}\Leftrightarrow n^۲+۲n+۱\le۲n^۲\Leftrightarrow n^۲-۲n\ge۱\Leftrightarrow \underset{(۰/۲۵)}{n(n-۲)\ge۱}$
رابطه‌ی اخیر به ازای $n\ge۳$ همواره برقرار است.
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>
الف) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۴n^۲+۱۶n+۱۵}=۰$ (۰/۲۵)
$S_n=\underset{(۰/۲۵)}{\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{(۲k+۳)(۲k+۵)}}=\frac{۱}{۲}\underset{(۰/۲۵)}{\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۲k+۳}-\frac{۱}{۲k+۵}\right)}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲n+۵}\right)$ (۰/۲۵)
$\Rightarrow\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴k^۲+۱۶k+۱۵}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{۱}{۱۰}$ (۰/۲۵) (سری همگراست)
ب) $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱+۲^k}{۳^{k+۱}}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۳^{k+۱}}+\underset{(۰/۲۵)}{}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲^k}{۳^{k+۱}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{۱-\frac{۱}{۳}}+\frac{\frac{۲}{۹}}{۱-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۶}+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۶}$ (۰/۵)
</td><td>۲</td></tr>
<tr><td></td><td>«ادامه در صفحه‌ی دوم»</td><td></td></tr>
</table>

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ صبح**
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۱۵ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸/۱۰/۱۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نیم سال اول** سال تحصیلی **۸۹-۱۳۸۸**		**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی** http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۶	$\begin{cases} a_n = 2 + \dfrac{1}{2n\pi} \\ b_n = 2 + \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (0/25) \quad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0 \quad (0/25) \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 1 \quad (0/25) \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow$ تابع f در $x = 2$ حد ندارد	۱
۷	**کافی است نشان دهیم حد چپ و راست هر دو برابر ۱ است.** الف) $\dfrac{1}{x} - 1 < \left[\dfrac{1}{x}\right] \le \dfrac{1}{x} \quad (0/25)$ اگر $x \to 0^+$: $\begin{cases} 1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \le 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{cases} \overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1 \quad (0/5)$ اگر $x \to 0^-$: $\begin{cases} 1 \le x\left[\dfrac{1}{x}\right] < 1 - x \\ \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 - x = 1 \end{cases} \overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1 \quad (0/5)$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \underset{(0/25)}{\dfrac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \underset{(0/25)}{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{-2x} = -1 \quad (0/25)$ ج) $\lim\limits_{x\to 1} \underset{(0/25)}{\dfrac{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})}} = \lim\limits_{x\to 1} \underset{(0/25)}{\dfrac{(x-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})}} = \underset{(0/25)}{\dfrac{-1}{3}}$	۲/۷۵
۸	$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \dfrac{1}{4} \quad (0/25)$ **در صورتی که ناپیوستگی f در $x_0 = 4$ رفع شدنی باشد داریم:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & , \ x \neq 4 \\ \dfrac{1}{4} & , \ x = 4 \end{cases} \quad (0/5)$	۰/۷۵

«ادامه در صفحه‌ی سوم»

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : **۱۰ : ۳۰ صبح**
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۱۵ نمره ای)		تاریخ امتحان : **۱۳۸۸ / ۱۰ /۱۷**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نیم سال اول** سال تحصیلی **۸۹ – ۱۳۸۸**		**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	f بر $[0\ ,\ 1]$ پیوسته است (۰/۲۵) و علاوه بر آن داریم : $f(0)=1\ ,\ f(1)=-1$ $f(0).f(1)<0 \quad (0/25)$ پس بنابر نتیجه قضیه مقدار میانی ، نمودار f حداقل یکبار محور x ها را در بازه‌ی $(0\ ,\ 1)$ قطع می کند. (۰/۲۵)	۰/۷۵
۱۰	$f(x)=x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \qquad \dfrac{x+1}{x-1}\geq 0 \rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\ (0/25)$ $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=1\ (0/25)$ $h=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1\right)}=$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{2x}{x-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1\right)}=1\ (0/25)$ خط $y=x+1$ مجانب مایل تابع است . (۰/۲۵) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow$ خط $x=1$ مجانب قائم تابع است (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۱	f در $x_0=1$ پیوسته است $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow b=a+1\Rightarrow a-b=-1\ (0/25)$ $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b\sqrt[3]{x}-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{b}{3}\ (0/25)$ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a+x-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(a-b)+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1\ (0/25)$ $f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow\dfrac{b}{3}=1\Rightarrow b=3\ (0/25)$ و $a=2\ (0/25)$	۱/۲۵
	«ادامه در صفحه‌ی چهارم»	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : **۳۰ : ۱۰ صبح**
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۱۵ نمره ای)		تاریخ امتحان : ۱۷/ ۱۰ / ۱۳۸۸
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نیم سال اول** سال تحصیلی **۸۹– ۱۳۸۸**		**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	$f'(x) = (۴ - f'(x)).\cos(۴x - f(x))$ (۰/۵) $x = ۰ \Rightarrow f'(۰) = (۴ - f'(۰))\ .\ \cos(۰ - f(۰))$ (۰/۲۵) چون $f(۰) = ۰$ پس : $f'(۰) = (۴ - f'(۰))\ .\ ۱ \Rightarrow f'(۰) = ۲$ (۰/۲۵)	۱
۱۳	قضیه کتاب (۰/۷۵)	۰/۷۵
	جمع نمره	۱۵

مصححین محترم :

برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب منظور نمایید.