فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۸ (بهار ۱۳۷۶)، صص. ۱۳ تا ۲۰

آشنایی با روش پوششِ تمام در آنالیز حقیقی

نرگس تولایی و محمد صال‌مصلحیان

پیشگفتار

مفهومِ پوشش تمام[1] توسط تامسن [۵] در مباحثِ مشتق معمولی[2]، مشتق تقریبی[3]، و مشتق متقارن[4] به‌کار برده شده است. در [۳] نیز از این مفهوم برای اثبات پاره‌ای از قضایای آنالیزِ کلاسیک استفاده شده است. در این مقاله سعی داریم ضمن ارائهٔ چند قضیهٔ مشهورِ آنالیزِ حقیقی شیوهٔ استفاده از مفهومِ پوشش تمام را به نمایش گذاریم.

۱. تعاریف مقدماتی و یک لم اساسی

۱.۱. تعریف. گردایهٔ C متشکل از زیربازه‌های بستهٔ یک بازهٔ $[a,b]$ را یک پوششِ تمام برای زیرمجموعهٔ C از $[a,b]$ می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x \in C$، $\delta_x > 0$ای وجود داشته باشد که هر زیربازهٔ بسته از $[a,b]$ که شامل x است و طولی کمتر از δ_x دارد متعلق به C باشد.

۱.۲. تعریف. یک افرازِ $[a,b]$ عبارت است از یک خانوادهٔ متناهیِ $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ از زیربازه‌های بستهٔ $[a,b]$ که به ازای هر $1 \leq k \leq n$، $I_k = [x_{k-1}, x_k]$، و به‌علاوه $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

۱.۳. قرارداد. اگر $I = [a,b]$ و f تابعی بر I باشد، طولِ I، یعنی $b-a$، را با $|I|$، تصویرِ I تحتِ f، یعنی $\{f(x) : x \in I\}$، را با $f(I)$، و بالاخره $f(b) - f(a)$ را با $f[I]$ نمایش می‌دهیم.

---

1) full cover(ing)   2) ordinary derivative   3) approximate derivative   4) symmetric derivative

۱.۴. لم تامسن [۵]. *هر پوششِ تمام برای یک بازه، شامل افرازی از آن بازه است.*

برهان. فرض کنیم C یک پوشش تمام برای $[a,b]$ باشد و به‌علاوه شامل هیچ افرازی از $[a,b]$ نباشد. اگر بازهٔ $[a,b]$ را به دو نیم تقسیم کنیم، لااقل یکی از این قسمتها دارای هیچ افرازی در C نخواهد بود؛ چنانچه این قسمت را نیز به دو نیم تقسیم کنیم، لااقل یکی از آنها دارای هیچ افرازی در C نخواهد بود. به کمک این فرآیندِ دو نیم کردن، می‌توانیم به دنبالهٔ $\{J_n\}$ای از زیربازه‌های $[a,b]$ دست یابیم که به ازای هر n، $J_{n+1} \subseteq J_n$ و C هیچ افرازی از J_n را شامل نباشد. بدیهی است که طولِ J_n برابر $|J_n| = (b-a)/2^n$ است. بنا به قضیهٔ ۳۸.۲ از [۱]، xای در $[a,b]$ وجود دارد که $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. فرض کنید δ_x همان باشد که تعریفِ پوششِ تمام آن را به‌دست می‌دهد. چون $\lim_n |J_n| = 0$، عدد طبیعیِ Nای موجود است که $|J_N| < \delta_x$، و لذا $J_N \in C$. پس C یک افراز (بدیهی) از J_N را شامل می‌شود، که تناقضی آشکار است. □

۲. بعضی کاربردهای پوشش تمام در آنالیزِ مقدماتی

اینک به کمک مفهوم پوشش تمام و لم فوق به اثبات تعدادی از قضایای آنالیز مقدماتی، نظیر قضیهٔ هاینه‌ـبورل و قضیهٔ بولتسانو‌ـوایرشتراس، می‌پردازیم.

۲.۱. قضیه (هاینه‌ـبورل). *بازهٔ $[a,b]$ فشرده است.*

برهان. فرض کنیم $\mathcal{G}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز باشد که $[a,b]$ را می‌پوشاند و

$C = \{I$: I یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ و نیز زیرمجموعهٔ عضوی از $\mathcal{G}$ است$\}$.

اگر $x \in [a,b]$ آنگاه $G \in \mathcal{G}$ و لذا $0 < \delta_x$ای وجود دارد که $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq G$. بنابراین به ازای هر بازهٔ بستهٔ I که شامل x باشد و $|I| < \delta_x$، رابطهٔ $I \subseteq (x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq G$ برقرار است و لذا $I \in C$. بنابراین C یک پوشش تمام برای $[a,b]$ است. پس C افرازی از $[a,b]$ را شامل می‌شود و چون هر عضوِ افراز زیرمجموعهٔ عضوی از $\mathcal{G}$ است، $[a,b]$ می‌تواند توسط تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{G}$ پوشانیده شود. □

۲.۲. قضیه. *اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه بر $[a,b]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.*

برهان. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد و

$C = \{I$: I یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است و به ازای هر y و z در I، $|f(y)-f(z)| < \frac{\epsilon}{2}\}$.

اگر $x \in [a,b]$، آنگاه بنا به پیوستگیِ f، $0 < \delta_x$ای وجود دارد که به ازای هر $t \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$، $|f(t)-f(x)| < \epsilon/4$. بنابراین اگر I زیربازهٔ بسته‌ای از $[a,b]$ باشد که $|I| < \delta_x$، آنگاه به ازای هر

y و z در I،

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(z) - f(x)| < \frac{\epsilon}{۲}.$$

بنابراین $I \in C$. درنتیجه C یک پوشش تمامِ $[a, b]$ است و لذا C افرازی از $[a, b]$ مانند $\{I_۱, I_۲, \ldots, I_n\}$ را شامل می‌شود. فرض کنیم $\delta = \min\{|I_k| : ۱ \leq k \leq n\}$. در این صورت به ازای هر x و y در $[a, b]$ که $|x - y| < \delta$، x و y در یک بازه یا در دو بازهٔ مجاور از افراز قرار دارند، که در هر صورت $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. □

۲.۳. قضیه. *اگر تابع حقیقیِ f روی زیرمجموعهٔ همبندِ E از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه $f(E)$ نیز همبند است.*

برهان. فرض کنیم $f(E)$ اجتماعِ دو مجموعهٔ بازِ جدا از هم مانندِ $G_۱$ و $G_۲$ باشد. نشان می‌دهیم $G_۱ = \varnothing$ یا $G_۲ = \varnothing$. نقطهٔ دلخواهِ $a \in E$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $b \in E$. چون $E \subseteq \mathbb{R}$ همبند است، پس به صورتِ یک بازه می‌باشد و لذا $[a, b] \subseteq E$. قرار می‌دهیم

$$C = \{I : f(I) \subseteq G_۱ \text{ یا } f(I) \subseteq G_۲ \text{ و } [a, b] \text{ یک زیربازهٔ بستهٔ } I \text{ است،}\}.$$

بنا به پیوستگیِ f گردایهٔ C یک پوشش تمامِ $[a, b]$ است و لذا افرازی مانند $\{I_۱, I_۲, \ldots, I_n\}$ از $[a, b]$ را شامل می‌شود. از طرفی به ازای هر $۱ \leq i \leq n - ۱$، $I_i \cap I_{i+۱} \neq \varnothing$، و لذا عددِ $۱ \leq j \leq ۲$ ای وجود دارد که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $f(I_i) \subseteq G_j$، و لذا $f([a, b]) \subseteq G_j$. به این ترتیب $f(a)$ و $f(b)$ یا هر دو در $G_۱$ و یا هر دو در $G_۲$ هستند. بنابراین $f(E)$ زیرمجموعهٔ $G_۱$ یا $G_۲$ است. پس $G_۱ = \varnothing$ یا $G_۲ = \varnothing$. □

۲.۴. قضیه. *اگر f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in [a, b]$، $f'(x) \geq ۰$، آنگاه f بر $[a, b]$ نزولی است.*

برهان. فرض کنیم x و y $(x < y)$ متعلق به $[a, b]$ باشند و $J = [x, y]$. برای اثباتِ نزولی بودنِ f کافی است ثابت کنیم به ازای هر $\epsilon > ۰$، $f(y) - f(x) < \epsilon(y - x)$. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد و

$$C = \{I : f(z_۲) - f(z_۱) < \epsilon(z_۲ - z_۱) \text{ و } J \text{ زیربازهٔ بسته‌ای از } I = [z_۱, z_۲]\}.$$

می‌توان به کمک تعریفِ مشتق ثابت نمود که C یک پوشش تمام برای J است و لذا شامل افرازی از J مانندِ $\{J_۱, J_۲, \ldots, J_n\}$ می‌باشد. بنابراین اگر به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $J_i = [z_i, z_{i+۱}]$، آنگاه

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=۱}^{n} (f(z_{i+۱}) - f(z_i)) < \epsilon \sum_{i=۱}^{n} (z_{i+۱} - z_i) = \epsilon(y - x). \ \square$$

۲.۵. قضیه. *اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه بر $[a,b]$ کراندار است.*

برهان. گردایهٔ $C = \{I :$ یک زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ است و f بر I کراندار است $I\}$ یک پوشش تمام برای $[a,b]$ است و لذا شامل یک افراز از $[a,b]$ است. چون f بر هر بازهٔ موجود در این افراز کراندار است، f بر $[a,b]$ کراندار می‌باشد. □

۲.۶. قضیه. *اگر S یک مجموعهٔ نامتناهی و کراندار از اعدادِ حقیقی باشد آنگاه S دارای یک نقطهٔ حدی است.*

برهان. چون S کراندار است بازه‌ای مانند $[a,b]$ وجود دارد که $S \subseteq [a,b]$. فرض کنیم S دارای هیچ نقطهٔ حدی‌ای نباشد و

$$C = \{I : \text{زیربازهٔ بسته‌ای از } [a,b] \text{ است و } I \cap S \text{ متناهی است } I\}.$$

در این صورت C یک پوششِ تمام برای $[a,b]$ است و لذا C افرازی از $[a,b]$ مانند $\{I_1, \dots, I_n\}$ را در بر می‌گیرد. اینک

$$S = S \cap [a,b] = S \cap (\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} (S \cap I_k).$$

بنابراین S متناهی است، که متناقض با فرض است. □

۲.۷. قضیه. *اگر f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in [a,b]$، $f'(x) > 0$، آنگاه f بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.*

برهان. فرض کنیم $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. گردایهٔ

$$C = \{I : f[I] > 0 \text{ یک زیربازهٔ بستهٔ } [a_1, b_1] \text{ است و } I\}$$

یک پوشش تمام برای $[a_1, b_1]$ است. بنابراین C شامل افرازی مانند $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ از $[a_1, b_1]$ است. اینک

$$f(b_1) - f(a_1) = \sum_{k=1}^{n} f(I_k) > 0.$$

پس $f(b_1) > f(a_1)$. بنابراین f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی است. □

۲.۸. قضیه. *اگر f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر و با مشتقِ پیوسته باشد و $f(a) = f(b)$، آنگاه عددِ $x \in [a,b]$ای وجود دارد که $f'(x) = 0$.*

برهان. فرض کنیم به ازای هر $x \in [a,b]$، $f'(x) \neq ۰$، و نیز

$$\mathcal{C} = \{I : \text{یک زیربازهٔ بستهٔ } [a,b] \text{ است و تابعِ علامت بر } f'(I) \text{ تک‌مقداری است } I\}.$$

بنا به پیوستگیِ f'، $\mathcal{C}$ یک پوشش تمامِ $[a,b]$ است و لذا افرازی از $[a,b]$ مانند $\{I_۱, I_۲, \ldots, I_n\}$ وجود دارد که زیرمجموعهٔ $\mathcal{C}$ است. به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، تابع علامت بر $f'(I_i)$ تک‌مقداری است و چون به ازای هر $۱ \leq i \leq n-۱$، $I_i \cap I_{i+۱} \neq \varnothing$، پس علامتِ کلّیهٔ مقادیرِ f' بر $[a,b]$ یکی است. بنابراین f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و لذا $f(a) \neq f(b)$، که خلاف فرض است. □

۲.۹. قضیه. *اگر α تابعی پیوسته و صعودی بر $[a,b]$ باشد و f بر $[a,b]$ یکنوا باشد آنگاه f روی $[a,b]$ نسبت به α به مفهومِ ریمان-استیلتیس انتگرال‌پذیر است.*

برهان. فرض کنیم f بر $[a,b]$ صعودی باشد و نیز $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. در این صورت چون α پیوسته است، گردایهٔ $\mathcal{C} = \{I : \alpha[I] < \epsilon/(f(b)-f(a))$ یک زیربازهٔ بستهٔ $[a.b]$ است و $I\}$ یک پوششِ تمامِ $[a.b]$ است و لذا افرازی مانندِ $\{I_۱, I_۲, \ldots, I_n\}$ از $[a,b]$ را در بر می‌گیرد. بنابراین اگر به ازای $۱ \leq k \leq n$، $I_k = [x_{k-۱}, x_k]$ و $P = \{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$، آنگاه

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{k=۱}^{n} f[I_k]\alpha[I_k] < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=۱}^{n} f[I_k] = \epsilon. \ \square$$

۳. بعضی از کاربردهای پوشش تمام در آنالیزِ پیشرفته

در این قسمت ابتدا دو لم بیان می‌کنیم:

۳.۱. لم. *فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ زیرمجموعه‌هایی از $[a,b]$ باشند. اگر $\mathcal{C}_۱$ یک پوشش تمامِ $E_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ یک پوشش تمامِ $E_۲$ باشد، آنگاه $\mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲$ یک پوشش تمامِ $E_۱ \cup E_۲$ است.*

برهان. $\mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲$ متشکل از زیرزیربازه‌های بسته‌ای از $[a,b]$ است. اگر $x \in E_۱ \cup E_۲$، آنگاه x در یکی از دو مجموعهٔ $E_۱$ یا $E_۲$ واقع می‌شود. بدون اینکه خللی به کلّیتِ مسأله وارد آید فرض می‌کنیم $x \in E_۱$. با توجه به اینکه $\mathcal{C}_۱$ یک پوشش تمامِ $E_۱$ است، $\delta_x > ۰$ای وجود دارد که هر زیربازهٔ بسته از $[a,b]$ که شامل x باشد و طولی کمتر از δ_x داشته باشد متعلق به $\mathcal{C}_۱$ و لذا متعلق به $\mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲$ است. پس $\mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲$ یک پوشش تمام برای $E_۱ \cup E_۲$ است. □

۳.۲. لم. *فرض کنید E یک زیرمجموعهٔ $[a.b]$ و $\mathcal{G}$ یک پوشش بازِ E باشد. در این صورت گردایهٔ $\mathcal{C}$ متشکل از تمام زیربازه‌های بسته‌ای از $[a.b]$ که هر یک مشمول در یک عضوِ $\mathcal{G}$ هستند یک پوششِ تمامِ E است.*

برهان. فرض کنیم x متعلق به E باشد. چون $\mathcal{G}$ یک پوشش باز E است، عضوی از $\mathcal{G}$ مانندِ O وجود دارد که x را در بر می‌گیرد. چون O باز است، $\delta_x > ۰$ای وجود دارد که $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq O$. حال اگر I زیربازهٔ بسته‌ای از $[a,b]$ باشد که شامل x است و طولی کمتر از δ_x دارد، آنگاه

$$I \subseteq (x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq O.$$

بنابراین $I \in \mathcal{C}$. پس $\mathcal{C}$ یک پوشش تمامِ E است. □

اینک به اثبات قضیهٔ زیر که تعمیمِ قضیهٔ ۲.۹ است می‌پردازیم:

۳.۳. قضیه. *اگر تابع کراندارِ f تعدادی شمارا نقطهٔ ناپیوستگی بر $[a,b]$ داشته باشد و به‌علاوه تابعِ صعودیِ α در هر نقطهٔ ناپیوستگیِ f پیوسته باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ نسبت به α به مفهومِ ریمان‌ـاستیلتیس انتگرال‌پذیر است.*

برهان. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد و f در هر نقطهٔ $[a,b]$ به‌جز در $E = \{c_۱, c_۲, \dots\}$ پیوسته باشد. در این صورت

$$\mathcal{C} = \left\{I : \sup_{t\in I} f(t) - \inf_{t\in I} f(t) < \frac{\epsilon}{۲(\alpha(b)-\alpha(a))} \text{ و } [a,b] \text{ است } \text{ یک زیربازهٔ بستهٔ } I\right\}$$

یک پوشش تمام برای $[a,b] - E$ است. همچنین فرض کنیم به ازای هر n،

$$\mathcal{C}_n = \{J : c_n \in J \text{ و } \alpha[J] < \frac{\epsilon}{۲^{n+۳}M} \text{ و } [a,b] \text{ است } \text{ یک زیربازهٔ بستهٔ } J\},$$

که در آن $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. به‌وضوح $\bigcup_{n=۱}^{\infty} \mathcal{C}_n$ یک پوشش تمام برای E خواهد بود و لذا بنا به لم ۳.۱، $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup (\bigcup_{n=۱}^{\infty} \mathcal{C}_n)$ یک پوشش تمام برای $[a,b]$ است و بنابراین شامل یک افرازِ $\{I_۱, I_۲, \dots, I_t\}$ از $[a,b]$ است. اینک اگر $I_k = [x_{k-۱}, x_k]$ و $P = \{x_۰, x_۱, \cdots, x_t\}$، آنگاه

$$\begin{aligned}
U(P,t.\alpha) - L(P,t,\alpha) &= \sum_{k=۱}^{t} (M_k - m_k)\alpha[I_k] \\
&= \sum_{I_k\in\mathcal{C}} (M_k - m_k)\alpha[I_k] + \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{I_k\in\mathcal{C}_n} (M_k - m_k)\alpha[I_k] \\
&< \frac{\epsilon}{۲(\alpha(b)-\alpha(a))} \sum_{I_k\in\mathcal{C}_k} \alpha[I_k] + \sum_{n=۱}^{\infty}(۲M \sum_{I_k\in\mathcal{C}_n} \alpha[I_k]) \\
&< \frac{\epsilon}{۲(\alpha(b)-\alpha(a))}(\alpha(b)-\alpha(a)) + \sum_{n=۱}^{\infty}(۲m \cdot ۲ \cdot \frac{\epsilon}{۲^{n+۳}M}) \\
&< \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon.
\end{aligned}$$

توجه داریم که در هر $\mathcal{C}_n$ حداکثر دو تا از I_kها واقع می‌شود. □

۳.۴. تعریف. زیرمجموعهٔ E از $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ صفرـاندازه نامیده می‌شود هرگاه

$$\inf\left\{\sum_n |I_n| : E \subseteq \bigcup_n I_n \text{ و } \{I_n\} \text{ گردایه‌ای شمارا از بازه‌های باز است}\right\} = ۰.$$

۳.۵. قرارداد. می‌گوییم خاصیتِ p تقریباً همه‌جا روی مجموعهٔ A برقرار است (یا تقریباً هر $x \in A$ خاصیتِ p دارد) هرگاه مجموعهٔ تمام اعضای $x \in A$ که خاصیت p ندارند یک مجموعهٔ صفرـاندازه باشد.

۳.۶. تابع حقیقیِ f روی $[a,b]$ پیوستهٔ مطلق نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، δای وجود داشته باشد که به ازای هر گردایهٔ متناهیِ $\{(x_i, x'_i)\}$ از بازه‌های جدا از هم که $\sum_i |x_i - x'_i| < \delta$،

$$\sum_i |f(x_i) - f(x'_i)| < \epsilon.$$

۳.۷. *اگر به ازای تقریباً هر* $x \in [a,b]$،

$$\underline{D}f(x) = \sup_{\delta > ۰} \inf_{۰ < |y-x| < \delta} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq ۰$$

و f روی $[a,b]$ پیوستهٔ مطلق باشد، آنگاه f روی $[a,b]$ صعودی است.

برهان. فرض کنیم c و d دو نقطهٔ دلخواهِ $[a,b]$ باشند و $c < d$. ثابت می‌کنیم $f(c) \leq f(d)$. ابتدا توجه می‌کنیم که تحت شرایطِ مسأله، به ازای تقریباً هر $x \in [c,d]$، $\underline{D}f(x) \geq ۰$، و نیز f روی $[c,d]$ پیوستهٔ مطلق است. اینک فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. چون f روی $[c,d]$ پیوستهٔ مطلق است پس $\delta > ۰$ای وجود دارد که در تعریفِ پیوستگیِ مطلق صدق می‌کند. اما اگر $A = \{x \in [c,d] : \underline{D}f(x) \geq ۰\}$، آنگاه بنا به فرض $[c,d] \setminus A$ صفرـاندازه است و لذا یک گردایهٔ $\{I_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از فاصله‌ها در $[c,d]$ وجود دارد که $[c,d] \setminus A \subseteq \bigcup_{i=۱}^{\infty} I_i$ و $\sum_{i=۱}^{\infty} |I_i| \leq \delta$.

فرض کنیم

$$\mathcal{C} = \{J : \text{یک زیربازهٔ بستهٔ } [c,d] \text{ است و } f[J] > -\epsilon|J| \ J\}$$

و

$$\mathcal{D} = \{J : J \subseteq I_i \text{ ،} i \text{ یک زیربازهٔ بستهٔ } [c,d] \text{ است و به ازای لااقل یک } J\}.$$

در این صورت $\mathcal{D}$ بنا به لمِ ۳.۱ یک پوششِ تمامِ $[c,d] \setminus A$ است. همچنین $\mathcal{C}$ یک پوشش تمامِ A است (زیرا اگر $x_۰ \in [c,d]$ آنگاه، چون $\underline{D}f(x_۰) \geq ۰$، $\eta > ۰$ای وجود دارد که به ازای هر y که $|y - x_۰| < \eta$، $(f(y) - f(x_۰))/(y - x_۰) > -\epsilon$؛ لذا اگر J یک بازهٔ شاملِ $x_۰$ باشد که $|J| < \eta$، آنگاه $f[J] > -\epsilon|J|$، و لذا $J \in \mathcal{C}$). پس بنا به لم ۳.۲، $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ یک پوشش تمام برای $[c.d]$ است و

لذا یک افرازِ $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ از $[c,d]$ وجود دارد که به ازای هر k، $I_k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. بنابراین

$$f(d) - f(c) = \sum_{k=1}^{m} f[I_k] = \sum_{I_k \in \mathcal{C}} f[I_k] + \sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k].$$

چون $\sum_{I_k \in \mathcal{D}} |I_k| < \delta$، بنا به تعریفِ پیوستگیِ مطلق، $|\sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k]| \le \sum_{I_k \in \mathcal{D}} |f[I_k]| < \epsilon$، و لذا $\sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k] > -\epsilon$. همچنین $\sum_{I_k \in \mathcal{C}} f[I_k] > -\epsilon \sum_{I_k \in \mathcal{C}} |I_k| > -\epsilon(d-c)$. بنابراین $f(d) - f(c) > -\epsilon(d-c+1)$. حال اگر $\epsilon \to 0$، آنگاه $f(d) \ge f(c)$. □

البته توجه داریم که اثباتِ دیگری از قضیهٔ فوق می‌تواند به کمک لم پوششیِ ویتالی انجام گیرد (فصلِ پنجمِ مرجع [۲] را ملاحظه فرمایید.)

در خاتمه، قضاوت در مورد اینکه «آیا استفاده از روشِ پوششِ تمام اساساً برهانهای قضایای آنالیز را ساده‌تر می‌نماید یا خیر؟» و، در صورت مثبت بودنِ جواب، پاسخِ این را که «آیا می‌توان در دروس آنالیزِ ریاضیِ دورهٔ کارشناسیِ ریاضی از این شیوه کمک گرفت؟» به خواننده واگذار می‌کنیم.

مراجع

[۱] والتر رودین. اصول آنالیز ریاضی، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده. انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۲.

[۲] اچ. ال. رویدن. آنالیز حقیقی، ترجمهٔ نوروز ایزددوستدار. انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۶۶.

[3] M.W. Botsko. A Unified Treatment of Various Theorems in Elementary Analysis. *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987), 450-452.

[4] M.W. Botsko. The Use of Full Covers in Real Analysis. *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989), 328-333.

[5] B.S. Thomson. On Full Covering Properties. *Real Analysis Exchange*, **6** (1980-81), 77-93.

نرگس تولایی و محمد صال‌مصلحیان

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی