شماره ۱۳ (بهار ۱۳۷۳) : ص‌ص ۱ تا ۱۲

ارتباطی بین نظریهٔ گروهها و نظریهٔ حلقه‌ها

نوشته: محمدرضا رجب‌زاده مقدم*

چکیده

دراین مقاله سعی می‌کنیم ارتباطی بین نظریهٔ گروهها ونظریهٔ حلقه‌ها برقرار کنیم. روش دستیابی به چنین ارتباطی بایستی طوری انجام پذیرد که اطلاعات موجود در یک مفهوم، قابل دستیابی در مفهوم دیگر باشد. به‌هرحال این ارتباط ازطریق گروههای پوچتوان امکان‌پذیر است که به حلقه‌های لی دسترسی پیدا می کنیم.

۱ مفاهیم اولیه و نتایج مقدماتی

فرض کنید G گروهی دلخواه باشد و $x, y \in G$. دراین صورت مزدوج x به وسیله y را با $x^y = y^{-1}xy$ نشان می‌دهیم و

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$$

را تعویضگر x, y می‌نامیم. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ آنگاه تعویضگر ساده

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

از وزن n $(n \geq 2)$ بطور استقرایی تعریف می‌شود، برای این منظور فرض می کنیم تمام تعویضگرهای از وزن کمتر از n تعریف شده باشند، تعویضگر از وزن n بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

*ـ گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

همچنین اگر X و Y دو زیرگروه از G باشند ، آنگاه زیرگروه تعویضگر $[X,Y]$ بوسیله تمام تعویضگرهای $[x,y]$ ، که $x \in X$ و $y \in Y$ تولید می‌شود؛ یعنی :

$$[X,Y] = \langle [x,y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

اگر $X = Y = G$ ، آنگاه

$$[G,G] = \langle [g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G \rangle$$

زیرگروه تعویضگر یا زیرگروه مشتق G نامیده می‌شود که آن را با $\gamma_2(G)$ نیز نشان می‌دهیم. به همین نحو می‌توان زیرگروه تعویضگر G از وزن c را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\gamma_1(G) = G$$

$$\gamma_c(G) = [\gamma_{c-1}(G), G] = \underbrace{[G, G, \dots, G]}_{c-\text{مرتبه}}$$

که در آن $c \geq 2$. در نتیجه سری پایین-مرکزی گروه G بصورت زیر به دست می‌آید:

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) = G' \supseteq \gamma_3(G) \supseteq \dots \supseteq \gamma_c(G) \supseteq \dots$$

حال گروه G را پوچتوان نامیم ، اگر بازای $c \in \mathbb{N}$ ، $\gamma_{c+1}(G) = \langle 1 \rangle$. کوچکترین عدد طبیعی c که در این خاصیت صدق کند، رده پوچتوانی گروه G نامیده می‌شود.
اگر از زیرگروه مشتق $G' = [G,G]$ مجدداً مشتق بگیریم ، دومین مشتق گروه G به‌دست می‌آید:

$$G'' = G^{(2)} = [G', G'] = \langle [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \mid x_i \in G \rangle$$

همانند فوق و به روش استقراء می‌توان nـامین مشتق گروه G را بصورت زیر تعریف کرد:

$$G^{(0)} = G$$

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$$

دراین صورت :

$$G = G^{(0)} \supseteq G' \supseteq G'' = G^{(2)} \supseteq G^{(3)} \supseteq \dots \supseteq G^{(n)} \supseteq \dots$$

سری مشتق گروه G نامیده‌می‌شود. اگر بازای عدد طبیعی $d \in \mathbb{N}$ ، $G^{(d)} = \langle 1 \rangle$ آنگاه G را گروه حل پذیر نامیم . و چنانچه d کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد G را گروه حل پذیر از طول مشتق d می‌نامیم. در حالت خاص، اگر $d = 2$ یعنی $G'' = \langle 1 \rangle$ ، آنگاه G را گروه دو آبلی نامیم.
لم زیر، که‌اثبات آن به آسانی انجام‌پذیر است، در محاسبات تعویضگرها بسیار مفید است و ما آن را در بخشهای بعدی مورد استفاده قرار می‌دهیم.

لم ۱.۱. فرض کنید G گروهی دلخواه باشد دراین صورت بازای هر $x, y, z \in G$ ،

$$x^y = x[x, y]$$

$$[x, y]^z = [x^z, y^z]$$

$$[x, y]^{-1} = [y, x]$$

$$\left.\begin{cases} [xy, z] = [x, z]^y [y, z] \\ [x, yz] = [x, z][x, y]^z \end{cases}\right. \text{اتحادهای ف. هال}$$

$$[x, y^{-1}] = ([x, y]^{-1})^{y^{-1}}$$

$$[x^{-1}, y] = ([x, y]^{-1})^{x^{-1}}$$

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [x, y^{-1}, z]^x = 1$$

یا بطور معادل

$$[y, x, z^y][z, y, x^z][x, z, y^x] = 1$$

که به اتحاد ویت موسوم است،

برهان. به [۲] یا [۵] مراجعه شود.

یک حلقه غیر شرکت پذیر L را که فاقد عنصر واحد (ضربی) است یک حلقه لی نامند اگر عمل ضرب آن ، که‌معمولاً با $[a, b]$ نشان داده می‌شود $(a, b \in L)$، در شرایط زیر صدق کند:

الف) بازای هر $a \in L$ ، $[a, a] = 0$

ب) بازای هر $a, b, c \in L$ ، اتحاد ژاکوبی برقرار باشد:

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

از خاصیت (الف)، شرط $[a, b] = -[b, a]$ نتیجه می‌شود، زیرا با توجه به خطی بودن عمل ضرب ، یا بعبارتی خاصیت توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع ، داریم :

$$0 = [a + b, a + b] = [a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b]$$
$$= [a, b] + [b, a]$$

که از آنجا $[a, b] = -[b, a]$.

تبصره. ملاحظه می‌شود که در حلقه‌های لی مفاهیم ایده‌آل چپ و راست بر هم منطبق‌اند و همچنین با استفاده از اتحاد ژاکوبی به آسانی می‌توان اثبات کرد که اگر $I, J \lhd L$ آنگاه مجموعه عناصر تولید شده (بطور جمعی) بوسیله مجموعه

$$\{[a,b] \mid a \in I, b \in J\}$$

ایده‌آلی از L خواهدبود، که آن را با $[I,J]$ نشان می‌دهیم . ایده‌آلها در حلقه‌های لی نقش زیرگروههای نرمال در گروهها را ایفا می‌کنند و به عنوان هستهٔ همریختی‌ها نیز ظاهر می‌شوند.

اگر B, A دو زیر حلقه از حلقهٔ لی L باشند. آنگاه

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

یک زیر حلقهٔ L خواهد بود. چنانچه B, A ایده‌آل باشند، واضح است که $A + B$ نیز یک ایده‌آل است.

سری پایین-مرکزی حلقهٔ لی L به وسیلهٔ استقراء و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma_1(L) = L, \gamma_{c+1}(L) = [\gamma_c(L), L]$$

و بدین ترتیب

$$L = \gamma_1(L) \supseteq \gamma_2(L) = L' \supseteq \ldots \supseteq \gamma_c(L) \supseteq \ldots$$

سری پایین-مرکزی L می‌باشد. همچنین سری مشتق L به طور استقرائی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$L' = \gamma_2(L), \qquad L'' = L^{(2)} = [L', L'], \qquad L^{(s+1)} = [L^{(s)}, L^{(s)}]$$

تبصره. به آسانی ملاحظه می‌شود که بازای هر $s \in N$ ،

$$L^{(s)} \subseteq \gamma_{2^s}(L)$$

برای اطلاعات بیشتر درباره خواص حل پذیری به کتاب [۱] مراجعه شود.

۲ نتایجی مشابه گروهها در حلقه‌های لی

همتای نتایجی که در این بخش می‌آوریم، در نظریهٔ گروهها نیز برقرارند.

قضیه ۱.۲.   فرض کنید L یك حلقه لی باشد، دراین صورت شرایط زیر معادلند:

الف) $\gamma_{c+1}(L) = 0$، که $c \geq 1$؛

ب) حلقهٔ لی دارای یك سری مرکزی از طول c به صورت زیر است

$$L = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_c \supseteq L_{c+1} = 0$$

که در آن بازای هر $1 \leq i \leq c$، $[L_i, L] \subseteq L_{i+1}$؛

ج) بازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1} \in L$، اتحاد زیر همواره برقرار است

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 0$$

برهان.   (الف) ← (ب) . واضح است که اگر بازای $c \geq 1$ داشته باشیم $\gamma_{c+1}(L) = 0$ آنگاه سری پایین-مرکزی حلقه لی L پایان پذیر است و با فرض $L_i = \gamma_i(L)$, $1 \leq i \leq c$ قسمت (ب) برقرار است.

(ب) ← (ج) . با توجه به فرض $[L_i, L] \subseteq L_{i+1}$ و تعریف سری پایین-مرکزی L ملاحظه میشود که $\gamma_i(L) \subseteq L_i$ و بخصوص $\gamma_{c+1}(L) \subseteq L_{c+1} = 0$
و از طرفی $\gamma_{c+1}(L) = \langle [x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] \mid x_i \in L \rangle$.
از اینرو بازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1} \in L$،

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 0$$

(ج) ← (الف) . بنابه فرض بازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1} \in L$، $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 0$. درنتیجه $\gamma_{c+1}(L) = \langle [x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] \mid x_i \in L \rangle = 0$ و لذا حکم (الف) برقرار است. قضیه فوق ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۲.۲.   حلقه لی L پوچتوان نامیده می‌شود، اگر در یکی از شرایط قضیه ۱.۲ صدق کند. در این حالت کوچکترین عدد طبیعی c با این خاصیت را رده پوچتوانی L نامیم .

تبصره.   فرض کنید حلقه لی L به وسیله زیرمجموعه‌ای مانند M تولید شود، یعنی $L = \langle M \rangle$. دراین صورت به آسانی تحقیق می شود که L پوچتوان از رده کمتر یا مساوی c است اگر و فقط اگر بازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1} \in M$ داشته باشیم :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 0$$

تعریف ۳.۲. فرض کنید L یک حلقه لی باشد. دراین صورت بنابه تعریف ضرب لی داریم :

$$\delta_1 = [x_1, x_2]$$

بهمین نحو می‌توان تعویضگر دو تعویضگر را تعریف کرد، یعنی :

$$\delta_2 = [\delta_1, \delta'_1] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$$

در حالت کلی و به روش استقراء چنین تعریف می‌کنیم :

$$\delta_{2k} = [\delta_{2k-1}, \delta'_{2k-1}]$$

که بخاطر سادگی آن را با نماد $\delta_{2k} = \delta_k(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ نشان می‌دهیم. حال می‌توان سری مشتق حلقه لی را بصورت زیر تعریف کرد

$$L' = [L, L] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1, x_2 \in L \rangle$$

$$L'' = L^{(2)} = [L', L'] = \langle \delta_2 = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in L \rangle$$

$$L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] = \langle \delta_k(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}) \mid x_i \in L \rangle$$

واضح است که اگر $L = \langle M \rangle$ ، آنگاه kـامین مشتق L ، یعنی $L^{(k)}$ بوسیله تعویضگرهای $\delta_k(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ ، که $x_i \in M$، تولید می‌شود. بنابراین سری مشتق L بصورت زیرخواهدبود

$$\ldots \subseteq L^{(k)} \subseteq \ldots \subseteq L^{(3)} \subseteq L^{(2)} = L'' \subseteq L' \subseteq L$$

قضیه ۴.۲. فرض کنید L یک حلقه دلخواه لی باشد دراین صورت شرایط زیر معادلند:

الف) بازای $d \in \mathbb{N}$, $L^{(d)} = 0$ ؛

ب) حلقه لی دارای یک سری از ایده‌آلهای از طول d بصورت زیر است :

$$L_d \trianglelefteq L_{d-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq L_2 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq L_0 = L$$

که درآن عاملهای سری آبلی‌اند، یعنی بازای هر $\circ \leq i \leq d$،

$$[L_i, L_i] \subseteq L_{i+1} \quad .$$

برهان. فرض می‌کنیم (الف) برقرار باشد و قرار می‌دهیم $L^{(i)} = L_i$ $(\circ \leq i \leq d)$ که در آن $L^{(i)}$ ، iـامین مشتق حلقه لی L است. حال بنابه فرض (الف) ، $L^{(d)} = \circ$ و در نتیجه $L_d = \circ$.
از طرفی بنابه تعریف سری مشتق L داریم

$$[L^{(i)}, L^{(i)}] \subseteq L^{(i+1)}$$

از اینرو بازای هر $\circ \leq i < d$, $[L_i, L_i] \subseteq L_{i+1}$ و بنابر این هر عامل L_i/L_{i+1} آبلی خواهد بود.
به‌عکس ، ازفرض (ب) نتیجه میشود که L/L_1 آبلی است و لذا $L' \subseteq L_1$. از اینرو به روش استقراء روی i عمل می‌کنیم و فرض می‌کنیم حکم بازای i برقرارباشد، یعنی $L^{(i)} \subseteq L_i$. ملاحظه می‌شود که $(L^{(i)})' \subseteq (L_i)'$ یعنی $L^{(i+1)} \subseteq (L_i)'$.
ولی بنابه فرض (ب) $(L_i)' \subseteq L_{i+1}$ ، در نتیجه $L^{(i+1)} \subseteq L_{i+1}$. حال چون $L_d = \circ$ نتیجه می‌شود که $L^{(d)} = \circ$.

قضیه فوق مارا به تعریف زیرهدایت می‌کند.

تعریف ۵.۲. حلقه لی L که دریکی از شرایط قضیه ۴.۲ صدق کند ، یک حلقه لی حل پذیر نامیده می‌شود وکوچکترین عدد طبیعی d راکه در شرایط قضیه صدق کند طول مشتق L نامند.

۳ ساختن حلقه لی به کمک یک گروه

دراین بخش ساختار حلقه لی وابسته که برحسب سری پایین‌ـمرکزی یک گروه بنا می‌شود مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم .

تعریف ۱.۳. فرض کنید G گروهی دلخواه و بازای $k \in \mathbb{N}$ ، $\gamma_k = \gamma_k(G)$ ، kـامین جمله سری پایین‌ـمرکزی G باشد. در این صورت حلقه لی وابسته $L(G)$ از گروه G به صورت حاصلجمع مستقیم

$$L(G) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\gamma_{k+1}}$$

تعریف می‌شود، که در آن گروه آبلی γ_k/γ_{k+1} را بطور جمعی در نظر می‌گیریم. بازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، جمعوند γ_k/γ_{k+1} را مؤلفه همگن $L(G)$ از وزن k نامند. عمل ضرب در $L(G)$ را نخست روی عناصر مؤلفه‌های همگن تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از خطی بودن عمل ضرب می‌توان آن را به $\mathrm{L(G)}$ تعمیم داد. بازای هر

$$a + \gamma_{i+1} \in \gamma_i/\gamma_{i+1} \quad , \quad b + \gamma_{j+1} \in \gamma_j/\gamma j + 1$$

که $a \in \gamma_i$, $b \in \gamma_j$ ، داریم

$$[a + \gamma_{i+1}, b + \gamma_{j+1}] = [a, b] + \gamma_{i+j+1}$$

که در آن $[a, b] \in \gamma_{i+j}$ و تعویضگر در گروه G است.

تبصره . بایستی توجه داشت که ممکن است در $L(G)$ داشته‌باشیم $[a + \gamma_{i+1}, b + \gamma_{j+1}] = 0$، در حالی که در گروه G، $[a, b] \neq 1$ ، زیرا فقط کافی است $[a, b] \in \gamma_{i+j+1}$.

در لم زیر نشان می‌دهیم که تعریف فوق یک ساختار حلقه لی روی $L(G)$ بنا می‌کند.

لم ۲.۳. تعریف ۱.۳ یک ساختار حلقه لی روی $L(G)$ می سازد.

برهان . نخست نشان می‌دهیم که عمل ضرب خوش تعریف است . فرض کنید

$$a + \gamma_{i+1} = a' + \gamma_{i+1} \in \gamma_i/\gamma_{i+1}$$

$$b + \gamma_{j+1} = b' + \gamma_{j+1} \in \gamma_j/\gamma_{j+1}$$

در این صورت (با درنظرگرفتن محاسبات در گروه G) داریم

$$a = a'a_1 \quad , \quad b = b'b_1$$

که $a_1 \in \gamma_{i+1}$ و $b_1 \in \gamma_{j+1}$. حال به کمک اتحادهای هال ،

$$[a, b] = [a'a_1, b'b_1] \equiv [a', b'] (\text{به پیمانه } \gamma_{i+j+1})$$

زیرا $\gamma_{i+j+1} \geq [\gamma_i, \gamma_{j+1}][\gamma_{i+1}, \gamma_j]$.

چون خاصیتهای پاد تعویضپذیری واتحاد ژاکوبی خطی‌اند، از اینرو کافی است آنها را بازای عناصر همگن تحقیق کنیم. بنابراین فرض کنید

$$\bar{a} = a + \gamma_{i+1} \in \gamma_i/\gamma_{i+1}$$
$$\bar{b} = b + \gamma_{j+1} \in \gamma_j/\gamma_{j+1}$$
$$\bar{c} = c + \gamma_{k+1} \in \gamma_k/\gamma_{k+1}$$

دراین صورت بنا به لم ۲.۱ (ج) ، در گروهها داریم

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [a, b] + \gamma_{i+j+1} = -[b, a] + \gamma_{i+j+1} = -[\bar{b}, \bar{a}]$$

از طرفی با استفاده از لم ۲.۱ (الف) برای گروهها خواهیم داشت

$$[a, b^{-1}, c]^b = [a, b^{-1}, c][[a, b^{-1}, c], b] \equiv [a, b^{-1}, c] \equiv [[a, b]^{-1}, c]$$
$$\equiv [a, b, c]^{-1} (\text{به پیمانه } \gamma_{i+j+k+1})$$

حال با توجه به رابطه فوق وبنا به اتحاد ویت برای گروهها به آسانی تحقیق می‌شود که

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}] + [\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}] = [a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] + \gamma_{i+j+k+1} = 0$$

در قضیه زیرنشان میدهیم که رده‌های پوچتوانی گروه G و حلقه لی وابسته به آن ، یعنی $L(G)$ برای گروههای پوچتوان یکی است.

قضیه ۳.۳. فرض کنید G گروهی دلخواه باشد، دراین صورت بازای هر $k \geq 1$ شرایط زیردرحلقه لی وابسته ، $L = L(G)$ ، برقرارند:

الف) $\gamma_k(L)/\gamma_{k+1}(L) = \langle [a_1, a_2, \ldots, a_k] \mid a_i \in \gamma_1/\gamma_2 \rangle$

ب) $\gamma_k(L(G)) = \bigoplus_{i=k}^{\infty} \gamma_i/\gamma_{i+1}$

برهان. (الف) بدیهی است که گروه خارج قسمت $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ به وسیله تصاویر تمام تعویضگرهای $[g_1, g_2, \ldots, g_k]$، که $g_i \in G$ ، تولید می‌شود، با استفاده از تعریف ضرب در حلقه لی به آسانی دیده می‌شود که تصویر چنین تعویضگری از وزن k همان تعویضگر حلقه لی یعنی

$$[\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_k]$$

است که $\bar{g}_i = g_i\gamma_2$. بنابراین با در نظر گرفتن نماد جمعی داریم :

$$\gamma_k(L)/\gamma_{k+1}(L) = \langle [\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_k] \mid \bar{g}_i \in \gamma_1/\gamma_2 \rangle$$

(ب) چون $[\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_k] \in \gamma_k(L)$ ، از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که

$$\gamma_k(L) \supseteq \bigoplus_{i=k}^{\infty} \gamma_i/\gamma_{i+1}$$

شمولیت طرف دیگر با استفاده از $[\gamma_s, \gamma_t] \subseteq \gamma_{s+t}$ به دست می‌آید.

تبصره. اگر G گروهی متناهی و پوچتوان از رده c باشد، آنگاه $\mid G \mid = \mid L(G) \mid$ ، زیرا بنابه خاصیت پوچتوانی گروه G

$$\mid G \mid = \prod_{i=1}^{c} \mid \gamma_i/\gamma_{i+1} \mid$$

وبنابه قضیه فوق

$$\mid L(G) \mid = \prod_{i=1}^{c} \mid \gamma_i/\gamma_{i+1} \mid$$

از طرف دیگر اگر G حل پذیر از طول مشتق s باشد، یعنی در اتحاد $\delta_s(x_1, x_2, \ldots, x_{2^s}) = 1$ صدق کند. آنگاه بنابه تعریف ضرب درحلقه لی وابسته، اتحاد فوق برای عناصر همگن $L(G)$ برقرار است و چون این اتحاد چند خطی است ، درنتیجه بازای تمام عناصر $L(G)$ نیز صادق می‌باشد؛ یعنی $L(G)$ حل پذیر با طول مشتق کمتر یا مساوی s است.

می‌دانیم که هر گروه پوچتوان ، حل پذیر نیز هست ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست، که در این مورد نظر خواننده را به مثال نقض گروه متقارن S_3 جلب می کنیم . گروه S_3 حل پذیر است ولی چون مرکز آن بدیهی است ، از اینرو نمی تواند پوچتوان باشد . البته با قائل شدن یک شرط می‌توان این مطلب را اثبات کرد و حتی کرانی بالا برای ردهٔ پوچتوانی گروه G نسبت به ردهٔ حل پذیری آن به دست آورد. **همچنین می‌توان نتیجه مشابهی را برای حلقه‌های لی L نیز اثبات کرد.**

تعریف ۴.۳. فرض کنید F گروهی آزاد باشد که بطور آزاد بوسیله مجموعه $X = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$ تولید شود ، همچنین فرض کنید

$$V = \{v = v(x_۱, x_۲, \ldots, x_r) \in F\}$$

زیر مجموعه‌ای از کلمات تحویل یافته از F باشد. دراین صورت اگر $\mathcal{V}$ خانواده‌ای از گروهها باشد به قسمی که بازای هر گروه $G \in \mathcal{V}$ ، هر کلمه $v \in V$ و هر $g_۱, g_۲, \ldots, g_r \in G$ ،

$$v(g_۱, g_۲, \ldots, g_r) = ۱$$

آنگاه $\mathcal{V}$ را یک واریته گروهها تعریف شده به وسیله مجموعه کلمات V نامیم .
واریته‌های گروهها نسبت به زیرگروه ، گروه خارج قسمت و حاصلضرب دکارتی بسته هستند. برای کسب اطلاعات بیشتر دراین زمینه به کتاب ه.نویمن [۴] مراجعه شود.

تبصره . اگر $v = [[x_۱, x_۲], [x_۳, x_۴]]$ کلمه‌ای از گروه آزاد F باشد آنگاه واریته $\mathcal{V}$ تعریف شده به وسیله کلمه v را واریتهٔ گروههای دو آبلی نامند.

قضیه ۵.۳. فرض کنید $\mathcal{V}$ واریته‌ای از گروهها باشد که در آن هر گروه دو آبلی ، پوچتوان از ردهٔ حداکثر c باشد. در این صورت هر گروه حل پذیر G در $\mathcal{V}$ با طول مشتق d ، پوچتوان بوده و از رده حداکثر $\frac{c^d-۱}{c-۱}$ می‌باشد.

برهان . بعلت طولانی بودن برهان، روش اثبات را به اختصار توضیح می‌دهیم. نخست شرطی را می‌یابیم که حاصلضرب نیم مستقیم دو گروه به واریتهٔ مفروض $\mathcal{V}$ متعلق باشد. سپس می‌توان نشان داد که اگر $G \in \mathcal{V}$ ، آنگاه بازای هر زیر گروه نرمال A از G و هر زیر گروه نرمال B از $C_G(A)$ ، مرکزساز A در G ، حاصلضرب نیم‌مستقیم A در G/B نیزبه $\mathcal{V}$ متعلق است. حال با بکار بردن مطلب فوق، به روش استقراء روی طول مشتق d ازگروه $G \in \mathcal{V}$ به اثبات قضیه می‌پردازیم. ملاحظه می‌شود که حکم بازای $d = ۱$ بطور بدیهی برقرار است، وحالت $d = ۲$ (یعنی گروههای دوآبلی) بنابه فرض قضیه برقرار می‌باشد. برای اثبات کامل به [۳] رجوع شود.

حال اگر روش اثبات قضیه ۵.۳ را دقیقاً در مورد حلقه‌های لی به کار ببریم ، به اثبات قضیه زیر دست می‌یابیم.

قضیه ۶.۳. فرض کنید U واریته‌ای از حلقه‌های لی باشد که در آن تمام حلقه‌های لی با طول مشتق ۲ ، پوچتوان از رده حداکثر c باشند، در این صورت هر حلقه لی حل پذیر با طول مشتق d در U ، پوچتوان و از رده حداکثر $\frac{c^d-1}{c-1}$ می‌باشد،

مراجع

[۱] Doerk, K. & Hawkes, T., *Finite soluble Groups*, Walter de Gruyter, Berlin (1992).

[۲] Hall, P., *Nilpotent Groups*, Edmonton Notes, (1957) & Queen Mary college Math. Notes, London (1970).

[۳] Khukhro, E. I., *Nilpotent Groups and their Automorphism*, Walter de Gruyter, Berlin (1993).

[۴] Neumann, H., *Varieties of Groups*, Springer-Verlag, Berlin (1967).

[۵] Robinson, D. J. S., *A Course in Group Theory*, Springer-Verlag, GTM Vol. 80 (1982).