بخش‌پذیری بر اعداد اول ۱

اسماعیل بابلیان
دانشگاه تربیت معلم

در مورد بخش‌پذیری یک عدد داده شده بر اعداد اول، تاکنون مقاله‌های زیادی نوشته شده است [۲و۱]. در اکثر این مقاله‌ها، روش‌هایی ارایه شده است که بدون انجام عمل تقسیم، بخش‌پذیر بودن یا بخش‌پذیر نبودن یک عدد مفروض بر یک عدد اول مشخص شود.

آخرین مطلبی که در این خصوص به مجله‌ی رشد آموزش ریاضی ارسال شده است، توسط خانم مریم مخلصی از شهرستان تربت‌حیدریه و درباره‌ی بخش‌پذیری بر اعداد ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و ۳۱ می‌باشد که با استفاده از ضرب **یک عدد یک رقمی** در یکان عدد مفروض و جمع یا تفریق آن از بقیه‌ی عدد، و تکرار این اعمال تا رسیدن به صفر یا مضربی از عدد اول، بخش‌پذیری بر عدد اول مفروض، بررسی می‌شود. متأسفانه این‌که عدد یک رقمی مذکور چگونه به‌دست می‌آید و ارتباط آن با عدد اول مورد نظر (مقسوم‌علیه) چیست، در مطلب خانم مخلصی ذکری به میان نیامده است و این عدد به‌طور تجربی و احتمالاً با سیاه کردن چند کیلوکاغذ به‌دست آمده است! بدیهی است که با ذکر چند مثال، نمی‌توان حکم کلی در ریاضیات صادر کرد. در ادامه ی مقاله‌ی حاضر، توسط قضیه‌ای در کتاب ریاضیات گسسته دبیرستان [۳]، اثبات ساده‌ای برای قواعد بخش‌پذیری بر اعداد اول ارایه می‌شود که دربرگیرنده‌ی قواعد خانم مخلصی و مقاله‌های دیگر می‌باشد.

می‌دانیم که اگر p و q دو عدد طبیعی متباین باشند، یعنی $(p,q) = ۱$، در این صورت دو عدد صحیح n و m وجود دارند به‌طوری که

$$mq + np = ۱$$

در این مقاله، فرض می‌کنیم $q = ۱۰$ و p عدد اولی بزرگتر از ۱۰ باشد. پس اعداد صحیح m و n هست که

$$۱۰m + np = ۱$$

توجه کنید که m و p نیز نسبت به هم اول هستند و اگر $m > ۰$ آن‌گاه $m < \frac{p}{۳}$ (چرا؟)

در جدول زیر، مقادیر m و n برای pهای مختلف به‌دست آمده است. توجه کنید که با توجه به یکان عدد p (که یکی از رقم‌های ۱، ۳، ۷ یا ۹ است)، عدد n را چنان به‌دست می‌آوریم که np به رقم ۹ یا یک ختم شود، که در این صورت m به سادگی به‌دست می‌آید. ضمناً، برای بعضی pها، دو جفت (m,n) حاصل می‌شود.

p	m	n
۱۱	−۱	۱
۱۳	۴	−۳
۱۳	−۹	۷
۱۷	−۵	۳
۱۹	۲	−۱
۲۳	۷	−۳
۲۹	۳	−۱
۳۱	−۳	۱
۳۷	−۱۱	۳
۴۱	−۴	۱
۴۳	۱۳	−۳
۴۷	−۱۴	۳
۵۳	۱۶	−۳
۵۹	۶	−۱
۶۱	−۶	۱

ملاحظه کنید که برای اعداد اولی که یکان آن‌ها یک یا نُه است، اعداد m و n به سادگی به‌دست می‌آیند. ضمناً، جدول

بالا را می‌توان به همین منوال ادامه داد. اینک به چگونگی استفاده از این جدول می‌پردازیم.

فرض کنید N یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ باشد. اگر یکان N را با b و تعداد ده‌تایی‌های N را با A نمایش دهیم آن‌گاه $N = 10A + b$. مثلاً،

$$27 = 10 \times 2 + 7$$
$$1357 = 10 \times 135 + 7$$
$$2345 = 10 \times 234 + 5$$

قضیه‌ی زیر، تکلیف بخش‌پذیری N بر عدد اول p را مشخص می‌کند.

قضیه: فرض کنید $N > p > 10$، $N = 10A + b$ و $10m + np = 1$. شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر p بخش‌پذیر باشد آن است که A+mb بر p بخش‌پذیر باشد.

اثبات: داریم

$$mN = 10mA + mb = (1 - np)A + mb = (A + mb) - npA$$

چون $(m, p) = 1$، بنابر تساوی بالا، شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر p بخش‌پذیر باشد آن است که A+mb بر p بخش‌پذیر باشد.

توجه. در صورتی که m منفی باشد، A+mb به مراتب از عدد $N = 10A + b$ کوچک‌تر است و با قرار دادن $N = A + mb$ و استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی بالا، در نهایت به مضربی از p یا عددی کوچک‌تر از p خواهیم رسید. امّا اگر $m > 0$، عدد A+mb وقتی از N کوچک‌تر است که $3p < N$. زیرا، وقتی m مثبت است، عدد n منفی است و این در حالتی اتفاق می‌افتد که یکان p عدد ۳ باشد و در نتیجه $n = -3$، که در این صورت داریم

$$10m = 1 - np \Rightarrow m = \frac{1 + 3p}{10}$$

در نتیجه، با توجه به این‌که $b \le 9$، اگر $3p < N$ داریم

$$A + mb = \frac{(10A + b) + 3pb}{10} = \frac{N + 3pb}{10} < \frac{N + bN}{10} \le N$$

در صورتی که $m > 0$ و $N \le 3p$، عدد A+mb ممکن است از N بزرگ‌تر باشد و در این حالت معمولاً باید بدون استفاده از قضیه‌ی بالا، بخش‌پذیر بودن یا بخش‌پذیر نبودن N بر p را مشخص کنیم!

مثال‌های زیر این مطلب را بیش‌تر روشن می‌کنند.

مثال۱. برای $p = 13$ داریم $m = 4$ و $n = -3$. اگر $N = 26$ داریم

$$N = 26 \to 2 + 4 \times 6 = 26$$

در این جا باید بدانیم که ۲۶ بر ۱۳ بخش‌پذیر است!

$$N = 29 \to 2 + 4 \times 9 = 38 \to 3 + 4 \times 8 = 35$$
$$\to 3 + 4 \times 5 = 23 \to 2 + 4 \times 3 = 14$$
$$\to 1 + 4 \times 4 = 17 \to 1 + 4 \times 7 = 29$$

برای $N = 29$ نیز باید بدانیم که ۲۹ بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست!

مثال۲. برای $p = 23$ داریم $m = 7$ و $n = -3$. اگر $N = 47$ داریم

$$N = 47 \to 4 + 7 \times 7 = 53 \to 5 + 7 \times 3 = 26$$
$$\to 2 + 7 \times 6 = 44 \to 4 + 7 \times 4 = 32$$
$$\to 3 + 7 \times 2 = 17$$

چون $17 < 23$ نتیجه می‌گیریم که ۴۷ بر ۲۳ بخش‌پذیر نیست! ملاحظه می‌کنید که وقتی $N = 47$، آن‌گاه $A + mb = 53$ و $47 < 53$ و بعد اعداد ۲۶، ۴۴، ۳۲ و ۱۷ به‌دست می‌آیند. مجدداً چون $N < 3p$، بهتر است از اطلاعات دیگری برای بخش‌پذیر نبودن عدد ۴۷ بر ۲۳ کمک بگیریم.

مثال‌های زیر نیز استفاده از قضیه‌ی بالا را نشان می‌دهند.

مثال۳. آیا عدد ۲۷۴۳ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد ۱۳ داریم $m = 4$. بنابراین

$$N = 2743 \to 274 + 4 \times 3 = 286 \to 28 + 4 \times 6 = 52$$
$$\to 5 + 4 \times 2 = 13$$

مثال۴. آیا عدد ۵۴۷۴ بر ۱۷ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد $p = 17$ داریم $m = -5$. بنابراین

$$N = 5474 \to 547 - 5 \times 4 = 527 \to 52 - 5 \times 7 = 17$$

مثال۵. آیا عدد ۴۴۹۵ بر ۲۹ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد $p = 29$ داریم $m = 3$. بنابراین

$$N = 4495 \to 449 + 3 \times 5 = 464 \to 46 + 3 \times 4 = 58$$
$$\to 5 + 3 \times 8 = 29$$

مثال۶. آیا عدد ۴۱۴۷۷ بر عدد ۳۷ بخش‌پذیر است؟

حل. برای $p = 37$ داریم $m = -11$. بنابراین

$$N = 41477 \to 4147 - 11 \times 7 = 4147 - 77 = 4070$$
$$\to 407 \to 40 - 11 \times 7 = -37$$

تذکر. اگر در مرحله‌ای، عدد A+mb به صفر ختم شود، می‌توان از صفر(های) جلوی آن صرف نظر کرد و مجدداً از قضیه