حل مسئله‌ی چالش‌برانگیز

در شماره‌ی ۸۶ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، ۴ مسئله‌ی چالش‌برانگیز به چاپ رسید که بهترین راه‌حل‌های ارسالی برای مسایل ۱ و ۲ و ۴ را در شماره‌ی ۸۹ همین مجله به چاپ رساندیم. اینک دو راه‌حل برای مسئله‌ی ۳ که از دو تن از خوانندگان به دستمان رسیده است.

لازم به ذکر است که آقای امین کشاورز از تهران نیز برای این مسئله، راه‌حلی ارسال کرده است که چون در آن، تابع f را مشتق‌پذیر فرض کرده است، مورد قبول نیست.

مسئله‌ی ۳. کلیه‌ی اعداد حقیقی $a > 0$ را تعیین کنید که به‌ازای آن‌ها، تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$ ای تعریف شده روی $[0,a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی $R = \{(x,y) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le f(x)\}$، دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به ازای یک عدد حقیقی k).

راه‌حل ارایه شده توسط خانم سلمه نجفی

اگر $a > 2$ باشد قرار می‌دهیم $k = \frac{2a^2}{a-2}$. تابع ثابت f را روی $[0,a]$ با ضابطه $f(x) = \frac{2a}{a-2}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت ناحیه‌ی R یک مستطیل است. اگر مساحت R را با $S(R)$ و محیط آن را با $P(R)$ نمایش دهیم داریم

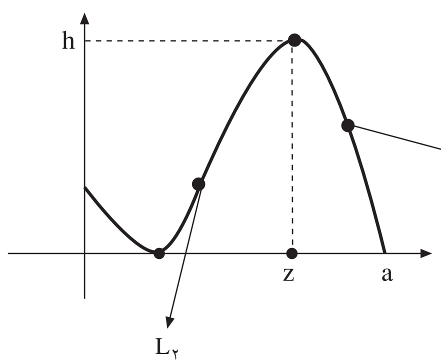
$$S(R) = a \times \frac{2a}{a-2} = \frac{2a^2}{a-2} = k$$

$$P(R) = 2(a + \frac{2a}{a-2}) = 2(\frac{a^2 - 2a + 2a}{a-2}) = 2(\frac{a^2}{a-2}) = \frac{2a^2}{a-2} = k$$

اگر $0 < a \le 2$ باشد نشان می‌دهیم برای هر تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$، تعریف شده روی $[0,a]$ داریم $S(R) < P(R)$. چون $f(x)$ روی بازه‌ی بسته $[0,a]$ پیوسته است بنابراین در نقطه‌ای مانند z که $0 \le z \le a$ و $f(z) = h$، دارای ماکزیمم مطلق است. پس ناحیه‌ی R مشمول در مستطیلی به ارتفاع h بر روی $[0,a]$ است. بنابراین داریم $S(R) \le ah \le 2h$؛ چون $0 < a \le 2$. پس $S(R) \le 2h$ $(\ast)$.

اکنون فرض کنیم L منحنی دور ناحیه‌ی R باشد. واضح است که طول آن برابر با $P(R)$ است و L از دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) می‌گذرد بنابراین L به دو منحنی به نام‌های L_1 و L_2 تقسیم می‌شود که هر دو، دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) را به هم متصل می‌کنند. چون h طول کوتاه‌ترین خط متصل کننده دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) است پس طول منحنی‌های L_1 و L_2 بزرگ‌تر یا مساوی h هستند. اما هر دو با هم نمی‌توانند مساوی با h باشند زیرا اگر چنین باشد، بازه‌ی بسته‌ی $[0,a]$ برابر با یک نقطه می‌شود، بنابراین $a > 0$ که نقطه مورد بررسی نیست. پس حداقل طول یکی از این منحنی‌ها اکیداً بزرگ‌تر از h است. بنابراین مجموع طول‌های منحنی‌های L_1 و L_2 از 2h اکیداً بزرگ‌تر است. اما مجموع طول‌های L_1 و L_2 برابر با $P(R)$ است پس $2h < P(R)$. اکنون با توجه به رابطه‌ی $(\ast)$ داریم $S(R) \le 2h < P(R)$ پس $S(R) < P(R)$، مگر این که $f(x) = 0$ را در نظر بگیریم (شکل ۱).

با توجه به مطالب بالا برای هر عدد حقیقی $a > 2$، تابع پیوسته غیرمنفی $f(x)$ ای تعریف شده روی $[0,a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی $R = \{(x,y) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le f(x)\}$ دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به ازای یک عدد حقیقی k). ■



شکل ۱

راه‌حل ارایه‌شده توسط خانم مریم شریفی از گلستان

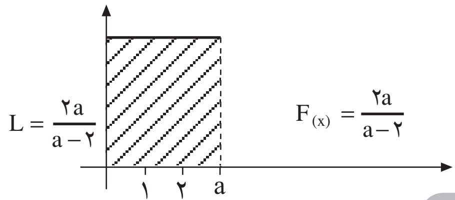
ابتدا سعی می‌کنیم با توجه به عدد حقیقی $a > ۰$، ناحیه‌ای را بسازیم که دارای مساحت و محیط برابر باشد. مستطیلی را در نظر می‌گیریم که طول یکی از اضلاع آن a باشد. حال ضلع دیگر، یعنی $L > ۰$ را برحسب a چنان می‌یابیم که محیط و مساحت مستطیل حاصله برابر شود. داریم

$$\text{محیط مستطیل} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$aL = ۲(a + L) \Rightarrow L = \frac{۲a}{a - ۲}$$

چون $L > ۰$، پس $a - ۲ > ۰$ و درنتیجه $a > ۲$.

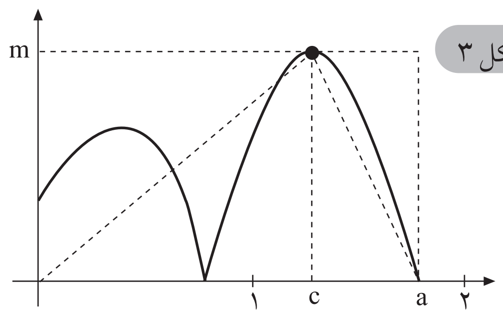
اکنون می‌توان برای $a > ۲$، تابع ثابت $f(x) = \frac{۲a}{a - ۲}$ را روی $[۰, a]$ معرفی نمود که شرایط مسئله را برآورده می‌کند، زیرا این تابع پیوسته و غیرمنفی است و واضح است که مساحت و محیط ناحیه‌ی تولیدشده با هم برابر است (شکل ۲).



شکل ۲

حال ادعا می‌کنیم برای $۰ < a \leq ۲$، هیچ تابع پیوسته، غیرمنفی و نامتحد با صفر روی $[۰, a]$ ناحیه‌ای با مساحت و محیط یکسان به‌وجود نمی‌آورد.

برای این منظور، تابع دلخواه f که پیوسته، غیرمنفی و نامتحد با صفر است را روی $[۰, a]$ در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



شکل ۳

این تابع پیوسته روی $[۰, a]$ مقدار ماکزیمم $m > ۰$ را اختیار می‌کند (چون تابع غیرمنفی است و متحد با صفر نیست پس $m > ۰$)، یعنی وجود دارد $۰ \leq c \leq a$ که $f(c) = m$. واضح است که ناحیه‌ی تولیدشده در مستطیلی به اضلاع a و m قرار می‌گیرد، بنابراین

$$\text{مساحت ناحیه} \leq \text{مساحت مستطیل} = ma$$

و چون $۰ < a \leq ۲$، پس

$$\text{مساحت ناحیه} \leq ma \leq ۲m \qquad (۱)$$

از طرفی به دلیل پیوستگی f، نقطه‌ی (c, m) باید توسط مسیری به‌هم پیوسته به دو سر بازه‌ی $[۰, a]$ برسد. می‌دانیم کمترین طول مسیر، مجموع طول خطوط مستقیمی است که نقطه‌ی (c, m) را به دو سر بازه‌ی مذکور وصل می‌کند. واضح است که طول هر خط، بزرگ‌تر یا مساوی m می‌باشد. بنابراین

$$\text{محیط ناحیه} > ۲m + a \qquad (۲)$$

حال با توجه به (۱) و (۲) و این‌که $۰ < a \leq ۲$ داریم مساحت ناحیه $<$ محیط ناحیه، یعنی

$$\text{مساحت ناحیه} \neq \text{محیط ناحیه}$$

اکنون تابع پیوسته، غیرمنفی و متحد با صفر، یعنی $f(x) = ۰$ را برای $۰ < a \leq ۲$ معرفی می‌کنیم. چون k مقداری حقیقی است پس صفر را می‌پذیرد و ناحیه‌ی تولیدشده توسط تابع صفر روی بازه‌ی $[۰, a]$ محیط و مساحت برابر صفر را به‌دست می‌دهد.

درنتیجه، برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ تابعی با مشخصات خواسته‌شده در مسئله وجود دارد. ■