اثبات برخی روابط ریاضی از طریق دوران و انتقال اشکال هندسی

زهره لآلی
مدرس دانشگاه شریعتی و دبیر ریاضی منطقه ی اسلام شهر

چکیده

در این مقاله می خواهیم با استفاده از اشکال هندسی، انتقال و دوران، بعضی از رابطه های جبری را به صورت مستدل توضیح دهیم. چهار مثلث از جسم صلبی (مانند مقوا) می سازیم و آن ها را به گونه ای در کنار هم قرار می دهیم تا شکل هندسی آشنایی مانند مربع، لوزی یا مستطیل ساخته شود. از آن جایی که دوران و انتقال یک شکل، مساحت و زوایای آن را تغییر نمی دهد، با انتقال و دوران، شکل هایی که مساحت آن ها محاسبه پذیر است حاصل می شود که با تفریق و جمع مساحت های شکل های ایجادشده، رابطه ی موردنظر به دست می آید.

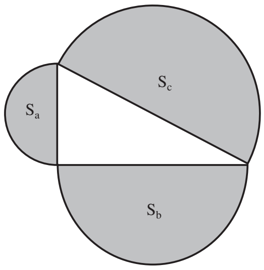
مقدمه

جورج پولیا (۱۹۶۵) معتقد است که وجود یک شکل، نقش مهمی در پیدا کردن راه حل مسأله و سرعت بخشیدن به حل آن دارد. اصولاً هندسه، ابزار مهمی برای حل مسایل است که با مشاهده ی شکل ها و استفاده از روش های آن، تصور و تفکر در مورد مسأله را تقویت می کند و مسیر رسیدن به حل مسأله را آشکار می سازد. با استفاده از تعبیرات هندسی، بسیاری از اطلاعات مسأله بلافاصله ظاهر می شود و دانش آموز با مشاهده ی آن، با سرعت بیش تری مفاهیم را درک می کند. رسم شکل، موجب تمرکز بیش تر می شود و اطلاعات یک مسأله و مفروضات آن با سرعت بیش تری منتقل می گردد. یک معلم مراحل اثبات یا حل یک مسأله را از ابتدا تا انتها در ذهن دارد، اما دانش آموز چنین دیدگاهی ندارد. برای پی گیری استدلال یک مسأله، معلم باید با یادآوری مطالب و مفاهیم مرتبط با آن و استفاده از وسایل کمک آموزشی، فرصت یادگیری را به دانش آموز بدهد. نکته ای که باید به آن توجه کرد این است که شکل، جایگزین استدلال نمی شود، بلکه شکل، ابزاری کمکی است که می تواند مفروضات را در ذهن بپروراند و ایده های جدیدی برای حل یک مسأله ایجاد کند. اینک، با طرح مسأله ی قدیمی فیثاغورس، موضوع مورد نظر را بیش تر باز می کنیم.

اثبات قضیه ی فیثاغورس

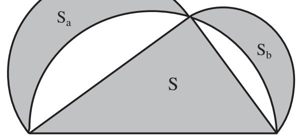
در سال ۲۰۰۰ میلادی آقای دارکو ولجان[۱] از دانشگاه زاگرب[۲] از کشور کروات[۳] در مجله ی ریاضی انجمن ریاضی آمریکا [۲]، مقاله ی جالبی تحت عنوان «۲۵۰۰امین سال قضیه ی فیثاغورس» نوشت. وی در آن مقاله متذکر شد که فیثاغورس در ۵۷۰ سال قبل از میلاد در جزیره ی ساموس[۴] به دنیا آمد و حدود ۴۹۰ سال پیش از میلاد، از این جهان چشم پوشید. پس از مرگ فیثاغورس، دانشمندان زیادی از تمدن های مختلف از جمله آسیای شرقی، چین و ایران روی قضیه ی فیثاغورس کار کردند. امروزه اگر مقاله ای تحت

عنوان «قضیه‌ی فیثاغورس» مشاهده کنید، با خود می‌گویید موضوع آن را می‌دانم و بلافاصله آن را رها می‌کنید. ولیکن به‌نظر می‌رسد هنوز این قضیه، موضوع جالبی برای پژوهش باشد و ریاضی‌دانان بزرگی، از زوایای مختلف، آن را مورد بحث و بررسی قرار داده و گسترش داده‌اند و از آن، نتایج زیبایی را به‌دست آورده‌اند. به‌عنوان نمونه، به رابطه‌های موجود در شکل‌های (۱ـ الف) و (۱ـ ب) نگاه کنید.



$S_a + S_b = S_c$

شکل (۱ـ الف)

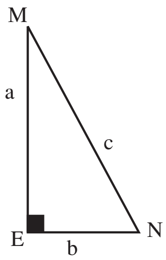


$S_a + S_b = S$

شکل (۱ـ ب)

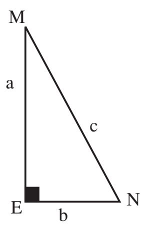
در ادامه‌ی این مقاله، سعی داریم با دید دیگری به اثبات قضیه‌ی فیثاغورس بپردازیم.

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع زاویه‌ی قائمه است. یعنی؛ طبق شکل (۲)، $c^۲ = a^۲ + b^۲$. این قضیه، به روش‌های مختلفی ثابت می‌شود. یکی از این روش‌ها، استفاده از شکل‌های هندسی است که خلاصه‌ی آن به شرح زیر است:

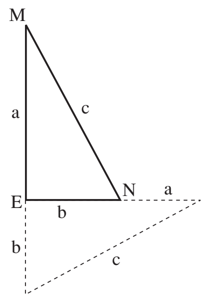


شکل ۲

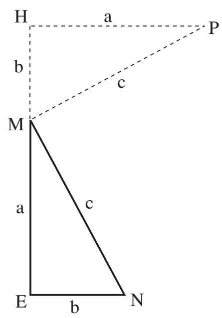
مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a و b و c را می‌سازیم (شکل ۳ـ الف). با دوران این مثلث در جهت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی ۹۰ درجه حول زاویه‌ی قائمه‌ی E (مثلث خط چین در شکل (۳ـ ب)) و سپس، انتقال آن به اندازه‌ی a+b در امتداد جهت مثبت محور yها، شکل (۳ـ پ) ایجاد می‌شود.



شکل (۳ـ الف)

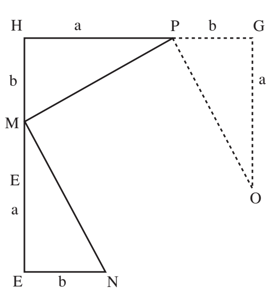


شکل (۳ـ ب)

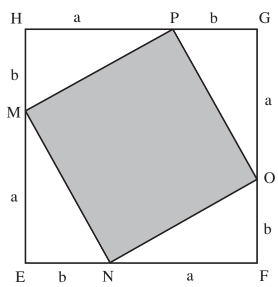


شکل (۳ـ پ)

با دو بار تکرار این عمل روی مثلث خط چین شکل (۳ـ پ) و سپس مثلث خط چین شکل (۳ـ ت)، شکلِ نهایی (۳ـ ث) ایجاد می‌شود.



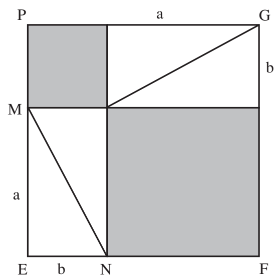
شکل (۳ـ ت)



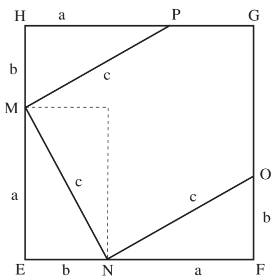
شکل (۳ـ ث)

با توجه به این‌که مجموع زوایای داخلی مثلث، ۱۸۰ درجه است، ثابت می‌شود چهارضلعی MNOP یک مربع به طول ضلع c است.

با انتقال مثلث سمت راست در بالای شکل (۳ـث) (یعنی مثلث OPG) در راستای ضلع MP از مربع MNOP، شکل خط‌چین (۳ـج) ایجاد می‌شود و با انتقال مثلث سمت چپ در بالا و سمت راست در پایین شکل (۳ـج) (یعنی مثلث‌های MHP و NFO)، شکل (۳ـچ) ایجاد می‌شود.



شکل (۳ـچ)



شکل (۳ـج)

با توجه به این‌که شکل (۳ـچ) از انتقال مثلث‌های شکل (۳ـث) به‌وجود آمده است، لذا مساحت این دو شکل برابر است. علاوه بر آن، مثلث‌های موجود در این دو شکل نیز با هم برابر هستند. اگر مساحت‌های مساوی را از این دو شکل حذف کنیم، مساحت‌های باقی‌مانده از دو شکل نیز با هم برابر خواهند بود. یعنی مساحت مربع به اندازه‌ی ضلع c از شکل (۳ـت) با مساحت دو مربع به اضلاع a و b از شکل (۳ـچ) برابر است؛ لذا

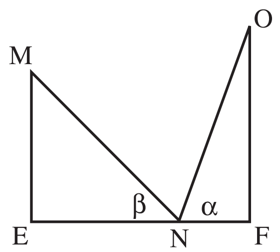
$$c^2 = a^2 + b^2$$

اثبات اتحاد سینوس مجموع دو زاویه

مشابه روش فوق را می‌توان برای اثبات رابطه‌ی زیر به‌کار برد:

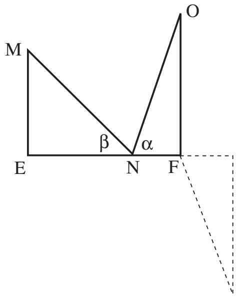
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$$

برای این کار، دو مثلث قائم‌الزاویه یکی به اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ و دیگری با اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی $\sin\beta$ و $\cos\beta$ مطابق شکل (۴ـالف) کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. به سادگی ثابت می‌شود که طول وتر دو مثلث برابر با یک واحد است (چرا؟)

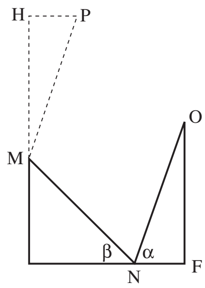


شکل (۴ـالف)

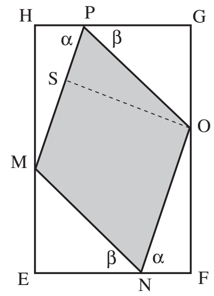
با دوران مثلث سمت راست حول زاویه‌ی قائمه به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت، مثلث خط‌چین در شکل (۴ـب) و سپس انتقال آن در راستای مستطیلی به ابعاد $\cos\alpha+\cos\beta$ و $\sin\alpha+\sin\beta$، مثلث خط‌چین شکل (۴ـپ) حاصل می‌شود. مجدداً همین عمل را برای مثلث سمت چپ در پایین شکل (۴ـپ) انجام می‌دهیم تا مثلث خط‌چین شکل (۴ـت) حاصل شود.



شکل (۴ـب)



شکل (۴ـپ)



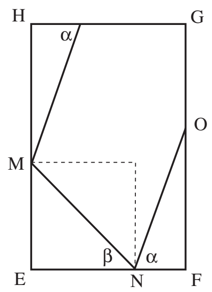
شکل (۴ـت)

در چهارضلعی MNOP، زوایای روبه‌رو برابر است و طول ضلع‌های این چهارضلعی، برابر با یک واحد است. این چهارضلعی یک لوزی است که مساحت آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

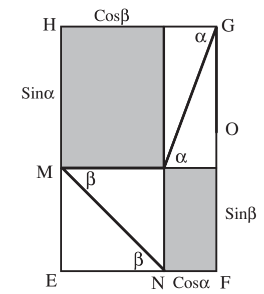
قاعده × ارتفاع = مساحت لوزی

$$= OS\times PM = ۱\times\sin(\alpha+\beta) \quad = \sin(\alpha+\beta)$$

مشابه اثبات قسمت قبل، با انتقال مثلث سمت راست در بالای شکل (۴ـت) (یعنی مثلث OPG) در راستای ضلع MP، شکل خط‌چین (۴ـث) ایجاد می‌شود. مجدداً، از انتقال مثلث سمت چپ در بالا و سمت راست در پایین شکل (۴ـث) در راستای اضلاع مستطیل EFGH، شکل نهایی (۴ـج) به‌وجود می‌آید.



شکل (۴ـث)



شکل (۴ـج)

با توجه به این که شکل (۴ـج) از انتقال مثلث‌های شکل (۴ـت) به‌وجود آمده است، لذا مساحت این دو شکل برابر است. اگر مساحت‌های مساوی را از این دو شکل حذف کنیم، مساحت‌های باقی‌مانده از دو شکل نیز با هم برابر خواهد بود. یعنی؛ مساحت لوزی از شکل (۴ـت) با مساحت دو مستطیل از شکل (۴ـج) برابر است. بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

زیرنویس‌ها

1. Darko Veljan
2. Zagreb
3. Croatia
4. Samos

منابع

1. Poo-sung Par. *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No.5, December 1999.
2. Darko Veljan, The 2500 – Year – Old Pythagorean Theorem, *Mathematics Magazine*, Vol. 73, No.4, December 2000.