چکیده

یک نگاه از صد بار شنیدن بهتر است. این جمله معنای تحت‌الفظی ضرب‌المثل‌های «شنیدن کی بود مانند دیدن» یا «چیزی که عیان است چه حاجت به بیان است» می‌باشد. استفاده از شکل‌ها و تصویرها نسبت به توضیحات کلامی و حتی نوشتاری، مزیت بیش‌تری دارد. مزیت استفاده از راهبرد رسم شکل برای مسایل مختلف در این است که در یک شکل، همه‌ی اطلاعات و ارتباطات می‌توانند به صورت یک **کل** نمایش داده شوند.

وقتی برای حل مسأله یک شکل می‌کشیم، در واقع اطلاعات ارایه شده در صورت مسأله را در قالب یک شکل سازمان‌دهی می‌کنیم و به این ترتیب، قسمت دیداری مغز (تصور و تجسم) با فرآیند حل مسأله بیش‌تر درگیر می‌شود. همان‌گونه که یک شکل می‌تواند از هزاران کلمه مهم‌تر باشد، رسم یک شکل که قابلیت انتقال مفاهیم مورد نظر را داشته باشد نیز بسیار مشکل است.

در این مقاله قصد داریم ابتدا با یک دید تاریخی به کارهای ریاضی‌دانان گذشته، مزایا و معایب استفاده از راهبرد رسم شکل را بررسی کنیم. در ادامه چگونگی به کارگیری راهبرد رسم شکل را به همراه چند راهبرد دیگر که ارتباط تنگاتنگ با راهبرد رسم شکل دارند، از جمله **تغییر بُعد شکل** و **رنگ‌آمیزی شکل**، در حل مسایل مختلف ذکر خواهیم کرد. علاوه بر این‌ها، در مورد **اثبات‌های بدون کلام** که از زمان بسیار قدیم مرسوم بوده است، بحث کرده و در پایان، چند توصیه در مورد استفاده از راهبرد رسم شکل بیان خواهیم کرد.

راهبرد رسم شکل در حل مسایل ریاضی

مرتضی بیات و زهرا خاتمی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان و خانه ریاضیات زنجان

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

شهرکرد ـ تابستان ۱۳۸۵

◆ مقدمه

یکی از اهداف آموزش ریاضی، پرورش انسان‌های فهیم، نقاد و تصمیم‌گیر است؛ انسان‌هایی که در برخورد با موقعیت‌های جدید، بتوانند تحلیل صحیحی از شرایط داشته باشند و بهترین عکس‌العمل را از خود بروز دهند. لازمه‌ی بروز رفتار صحیح، داشتن ذهنی منظم و آشنایی با مهارت‌های تفکر است و یکی از مهم‌ترین این مهارت‌ها، هنر حل مسأله است. باب بحث درخصوص حلِ مسأله را اولین بار جورج پولیا در کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم؟** در سال ۱۹۴۴ گشود و از آن پس، حل مسأله موضوع بحث و پژوهش بسیاری از متخصصان آموزش ریاضی قرار گرفت. تاکنون، تحقیقات زیادی مؤید آن بوده‌اند که مهارت‌های حل مسأله، قابل آموزش و یادگیری

هستند و از این رو برنامه‌ریزان، این مقوله را وارد برنامه‌های درسی سه دوره‌ی دبستان و راهنمایی و دبیرستان کرده‌اند.

یکی از مشکلات اصلی دانش‌آموزان این است که وقتی با یک مسأله مواجه می‌شوند، نمی‌دانند باید از کجا شروع کنند و یا چگونه به حل آن اقدام نمایند. مُدل ارایه شده توسط پولیا[1]، از یک سو می‌تواند الگویی برای شروع حل مسأله به دانش‌آموزان بدهد؛ اما از سوی دیگر ممکن است خودْ مانع خلاقیت و آزاداندیشی دانش‌آموزان شود. اما در هر حال، آموزش راهبردهای حل مسأله می‌تواند گام مفیدی برای توسعه‌ی توانایی حل مسأله باشد. دانش‌آموز در گام دوم حل مسأله، می‌تواند از بین راهبردهای مختلف که برای حل مسایل آموزش دیده است، راه‌حل مناسب برای مسأله‌ای که با آن مواجه شده است را انتخاب کند. بررسی راهبردهای مختلف و امکان حل مسأله با آن راهبردها در واقع اقدام مهمی برای حل مسأله است. یکی از راهبردهایی که در حل مسایل ریاضی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، راهبرد رسم شکل است. به کمک این راهبرد، همه‌ی اطلاعات و ارتباط‌های میان داده‌ها و خواسته‌های مسأله، به صورت یک **کل** در نظر گرفته می‌شود.

نقش استفاده از شکل در کشف و توسعه‌ی ریاضی، موضوعی است که برای برخی افراد، بسیار جذاب و برای برخی دیگر، غیر قابل قبول است. در این جا قصد نداریم به این موضوع بپردازیم. در عوض، می‌خواهیم درباره‌ی روش‌های عملی استفاده از رسم شکل در حل مسایل ریاضی، تحقیق کنیم. در این زمینه نکاتی وجود دارد که باید اصلاح شود:

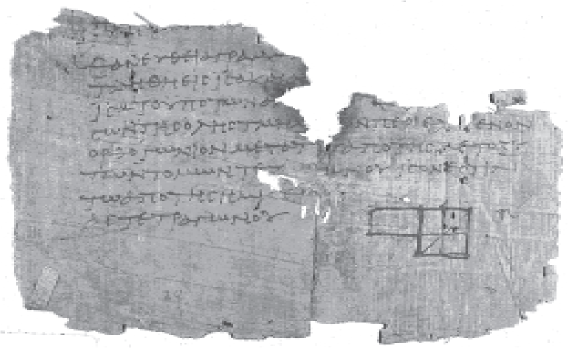
- اهمیت رسم شکل خوب در حل مسایل ریاضی نادیده گرفته شده است.
- کاربرد هر ایده، هر چند بسیار ساده، ممکن است کیفیت رسم شکل را بهبود بخشد.
- کامپیوترها می‌توانند کیفیت شکل‌ها را هر چند کم، بهبود ببخشند.
- تکنیک‌های مورد نیاز برای خلق یک شکل خوب، می‌توانند مبنای خوبی برای محاسبه و علاقه‌ی ریاضی باشد.

یکی از مسایل اساسی این است که وقتی شکل از هزاران کلمه باارزش‌تر است، پس تولید این شکل، نسبت به تولید یک متن، نیازمند دقت و زحمت بیش‌تری می‌باشد.

از زمانی که کامپیوترها ساخته شده‌اند، تولید یک شکل خوب ریاضی فوق‌العاده ساده و بدیهی شده است. با این حال، این موضوع قابل بحث است که نبود کیفیت در شکل‌هایی که دانش‌آموزان برای حل مسأله رسم می‌کنند، قبل از این‌که به ناتوانی‌های دانش‌آموزان مربوط باشد، بیش‌تر به قراردادها و نیز عادت‌های نادرستی مرتبط است که ما در حل مسایل ریاضی به دانش‌آموزان آموخته‌ایم.

◆ تاریخچه‌ی استفاده از شکل در ریاضیات

استفاده از شکل‌ها در ریاضیات، قدمتی بس طولانی دارد. قدیمی‌ترین شکل‌ها که از آن‌ها اطلاع داریم، مربوط به لوح‌های گلی بابلی هستند. در زمان اقلیدس، مطالب ریاضی روی پاپیروس (نوعی کاغذ که از نی ساخته می‌شد) نوشته می‌شد که متأسفانه به ماندگاری گِل نبود. یکی از قدیمی‌ترین تکه‌های پاپیروس به‌جا مانده از اَقلیدس، در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد در تپه‌های زباله اکسیرینکلوس کشف شد. این تکه، حاوی مطالب جالب ریاضی است (شکل ۱). به نظر می‌رسد که موضوع شکل (۱)، معادل هندسی اتحاد جبری $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ باشد.



شکل (۱)

این شکل از تمام تصاویر اقلیدس که همگی بدون نام‌گذاری هستند، برجسته‌تر است. بدین دلیل است که اقلیدس در اثبات‌های خود تنها به رسم یک شکل اکتفا می‌کرد، ولی در این شکل تجمع شکل و متن اندکی غیر عاقلانه به‌نظر می‌رسد.

ریاضی‌دانان هند باستان، برای تأیید و **اثبات** حکم یا گزاره‌ی

مورد نظر خود، اغلب شکلی رسم می‌کردند و در کنار آن می‌نوشتند: **می‌بینید**. هر دانشی و به‌ویژه ریاضیات، برای پیشرفت خود و برای دقیق‌تر شدن نتیجه‌گیری‌های خود، ناچار است مرحله به مرحله، پلکان انتزاع را بپیماید و دائماً خود را از تجربه و مشاهده دور کند. هندسه‌ی اقلیدسی، که پس از هزاران سال تجربه‌ی انسان روی اجسام واقعی و بر پایه‌ی انبوهی از این تجارب بشری به‌وجود آمد، با مفاهیم و شکل‌هایی سر و کار دارد که در دنیای واقع وجود ندارند. نه نقطه و نه خط راست بی‌پهنای نامتناهی را نمی‌توان مشاهده کرد و مثلثی که روی کاغذ رسم می‌کنیم، نظیری در دنیای واقع ندارد. با همه‌ی این‌ها، هندسه از جبر، **عینی‌تر** است. در هندسه همه چیز را از راه رسم شکل‌ها، می‌توان **مشاهده** کرد؛ در حالی که در جبر، تنها می‌توان با نمادها و قراردادها عمل کرد. به همین مناسبت، جبر در مرحله‌های نخستین پیدایش و تکامل خود، بیش‌تر بر هندسه تکیه می‌کرد و به‌عنوان نمونه، دانشمندان هندی را واداشت تا با رسم شکل، استدلال‌های ذهنی خود را به خواننده القاء کنند.

یونانی‌ها و به دنبال آن‌ها، ریاضی‌دانان خاورزمین (که بیش‌تر ایرانی بودند)، همین شیوه را پیش گرفتند و اغلب نتیجه‌گیری‌های خود در زمینه‌ی حساب و جبر را به هندسه و شکل‌های هندسی متکی ساختند. یونانی‌ها عدد را به کمک پاره‌خط راست نشان می‌دادند؛ مجموع دو عدد هم، به‌عنوان مجموع دو پاره‌خط، پاره‌خط بزرگ‌تری می‌شد. ولی حاصل ضرب دو عدد را چگونه باید نشان داد؟ یونانی‌ها، حاصل ضرب دو عدد a و b را، **مستطیل** ab می‌نامیدند و آن را برابر مساحت مستطیلی می‌دانستند که طول و عرض آن برابر a و b باشد و حاصل ضرب سه عدد a، b و c را، **مکعب** abc می‌نامیدند که برابر حجم مکعب مستطیلی با اضلاع a و b و c است و a^3 حجم مکعب به ضلع a می‌باشد.

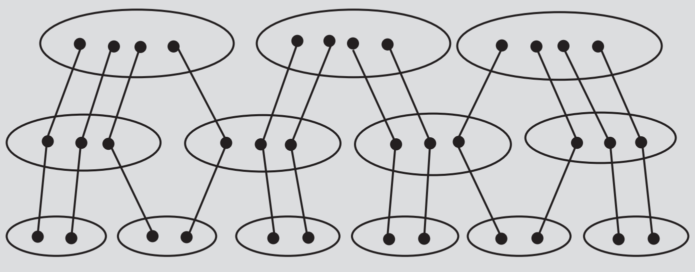
این شیوه‌ی برخورد با حساب و جبر، در حالی که موجب **عینی‌تر شدن** و **درک بهتر** موضوع می‌شد، خودْ به مانعی بزرگ برای پیشرفت جبر تبدیل شد و آن را به‌چنان تنگناهایی کشاند که برای نجات از آن جز رها کردن این **تکیه‌گاه**، چاره‌ی دیگری نبود.

◆ رسم شکل در حل مسایل ریاضی

یکی از راهبردهای کارا در حل مسایل ریاضی، راهبرد رسم شکل است. معمولاً نمایش یک مسأله به کمک یک شکل یا نمودار، موجب تسهیل جمع‌آوری و شکل دادن اطلاعات مرتبط با مسأله و توجه به ارتباط‌ها و وابستگی‌های موجود در آن‌ها می‌شود. برای درک بهتر موضوع چند مثال می‌آوریم.

مسأله‌ی ۱. در خانه‌ی آقای محمدی، مهمانی برپاست. برای هر ۴ نفر، یک ظرف پلو و برای هر ۳ نفر، یک ظرف خورشت و برای هر ۲ نفر، یک ظرف سالاد در نظر گرفته شده است. در روز مهمانی ۶۵ ظرف روی میز قرار دارد. تعداد مهمان‌ها در این مهمانی چقدر است؟

حل. یک نفر باید از پلو، خورشت و سالاد استفاده کند، پس شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل(۲)

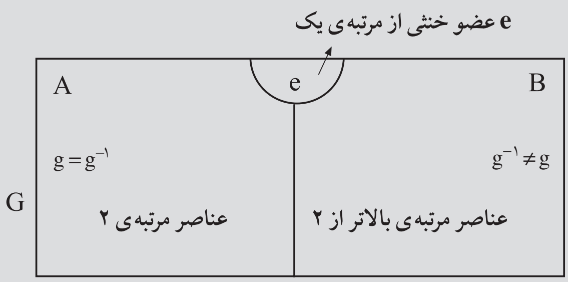
یک مسیر به صورت  نشان‌دهنده‌ی یک نفر است.

طبق شکل اخیر هر ۱۲ نفر جمعاً ۱۳ ظرف نیاز دارند. چون ۱۳×۵=۶۵، با ادامه‌ی شکل دیده می‌شود ۱۲×۵=۶۰ نفر در مهمانی شرکت داشتند.

در مثال بعدی، رسم شکل را در حل یک مسأله از نظریه‌ی گروه‌ها به کار می‌بریم.

مسأله‌ی ۲. ثابت کنید در یک گروه از مرتبه‌ی زوج، تعداد عناصر از مرتبه‌ی ۲، فرد است.

حل. عنصر g از مرتبه‌ی ۲ است هرگاه $g^{2}=e$ یا $g=g^{-1}$. حال شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل(۳)

بنابراین

$$|G|=|A|+|B|+1$$

از طرفی اگر g در B باشد، g^{-1} نیز در B است، لذا $|B|$ (تعداد اعضای B)، زوج است. چون $|G|$ و $|B|$ اعداد زوج هستند، بنابراین طبق تساوی $|A|=|G|-|B|-1$ نتیجه می‌شود که $|A|$ فرد است.

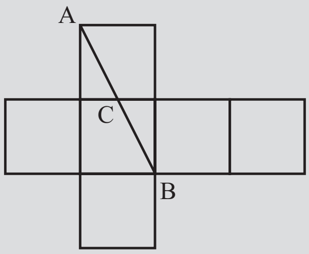
◆ روش تغییر بُعد شکل در حل مسایل ریاضی

روش تغییر بُعد در درک و فهم ساده‌ی مسایل و نیز ارائه‌ی توجیه شهودی برای آن‌ها و نیز حدس و تعمیم مسایل و قضایا، یک روش کارآمد است. لازم به ذکر است که این روش به‌صورت پنهان در کارهای اکثر ریاضی‌دانان به‌چشم می‌خورد. اما متأسفانه تاکنون به‌عنوان یک روش کارآمد معرفی نشده است.

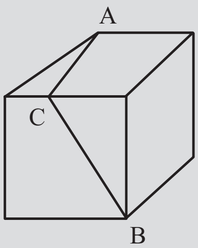
در ادامه، به چند مسأله که با این روش قابل حل هستند، می‌پردازیم.

مسأله‌ی ۳ (کوتاه‌ترین مسیر حرکت مگس). مکعبی با ابعاد واحد داده شده است. مگسی از رأس A بدون آن‌که پرواز کند روی سطوح جانبی این مکعب حرکت کرده و به B می‌رسد. کوتاه‌ترین مسیر حرکت این مگس را تعیین کنید.

حل. این مسأله به‌وسیله‌ی حساب دیفرانسیل با ساختن یک تابع یک بُعدی مناسب قابل حل است. اما به‌وسیله‌ی روش مگس می‌توان راه‌حل بسیار ساده و زیبایی برای آن ارائه کرد! برای این منظور مکعب را به‌صورت زیر باز می‌کنیم.



شکل (۴-الف). **AB** کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد



شکل (۴-ب). مسیر حرکت مگس روی سطوح مکعب

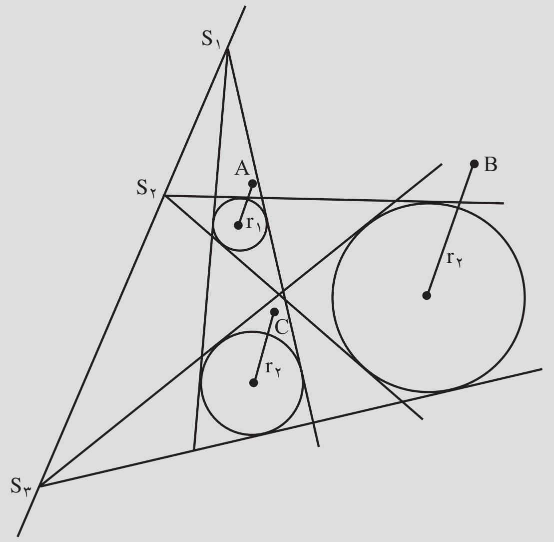
پاره‌خط AB، کوتاه‌ترین مسیر از A به B است (شکل ۴-الف). حال اگر گسترده‌ی شکل را به‌وضعیت اول برگردانیم، مسیر $AC+CB$ که در آن C وسط یک ضلع مکعب می‌باشد، جواب مسأله است.

مسأله‌ی ۴ (سه دایره‌ی متجانس). فرض کنید سه دایره یا سه شکل دیگر که دوبه‌دو با هم متجانس‌اند، داشته باشیم. آن‌گاه سه مرکز تجانس روی یک خط قرار دارند (سه مرکز تجانس خارجی روی یک خط و هم‌چنین دو مرکز تجانس داخلی و یک مرکز تجانس خارجی نیز روی یک خط هستند).

حل. اثبات چنین نتایجی معمولاً با قضیه‌ی منلائوس صورت می‌گیرد که برای آن، روابط زیادی باید نوشت و بسیار خسته‌کننده است. اما به روش زیر توجه کنید.

از مراکز دوایر بر صفحه عمودهایی خارج می‌کنیم و روی این عمودها به اندازه‌ی شعاع دایره‌ی مربوط جدا می‌کنیم تا نقاط

A و B و C به‌دست آید. آشکار است که AB از $S_۲$ و BC از $S_۳$ و AC از $S_۱$ می‌گذرد. اما صفحه‌ی ABC با صفحه‌ی دوایر، در یک خط فصل مشترک دارد؛ پس $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ روی این فصل مشترک است. (شکل ۵).

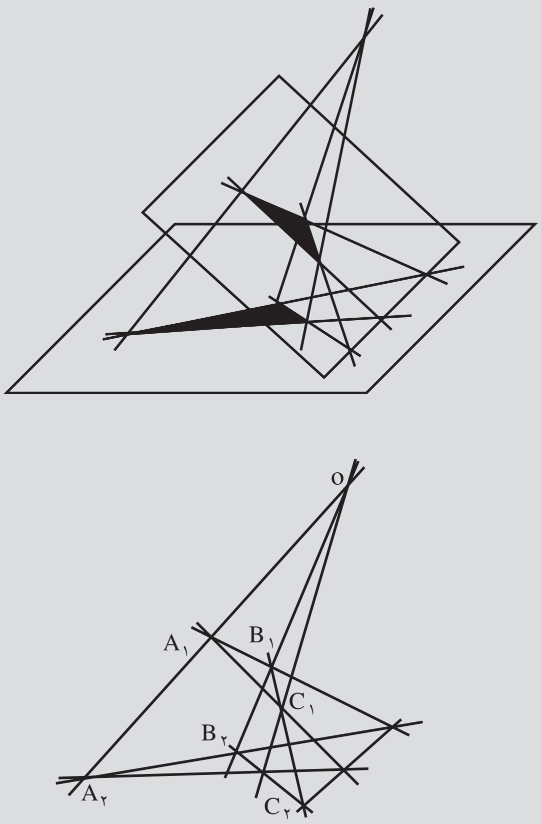


شکل (۵) مراکز تجانس دو به‌دوی دایره‌ها بر یک خط واقع‌اند

مسأله‌ی ۵ (قضیه‌ی دزارگ). دو مثلث $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خطوط $A_۱A_۲$ و $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$ از نقطه‌ای مانند O می‌گذرد. در این صورت سه نقطه‌ی برخورد مثلث‌های نظیر (یعنی نقطه‌ی برخورد $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ و نقطه‌ی برخورد $B_۱C_۱$ و $B_۲C_۲$ و نقطه‌ی برخورد $A_۱C_۱$ و $A_۲C_۲$) روی یک خط راست قرار دارد.

حل. برگه‌ی شفافی را در نظر بگیرید که مثلث $A_۱B_۱C_۱$ روی آن رسم شده است. این برگه را طوری کج می‌کنیم که یک ضلعش روی صفحه‌ی افقی باقی بماند. سپس لامپی را طوری قرار می‌دهیم که روی برگه‌ی شفاف نور بیفکند و سایه‌ی مثلث $A_۱B_۱C_۱$ روی صفحه بیفتد.

می‌توان فرض کرد این سایه، همان مثلث $A_۲B_۲C_۲$ است. (از کلیت استدلال چیزی کم نشده است. زیرا هر دو مثلث را می‌توان به این طریق برهم نگاشت.) ضلع‌های این مثلث، سایه‌ی ضلع‌های مثلث اصلی‌اند و آن‌ها را در جایی که برگه‌ی شفاف با صفحه‌ی افقی تماس پیدا می‌کند (یعنی جایی که این دو صفحه با یکدیگر برخورد می‌کنند) قطع می‌کنند. (شکل ۶)



شکل(۶)

◆ رنگ‌آمیزی شکل در حل مسایل ریاضی

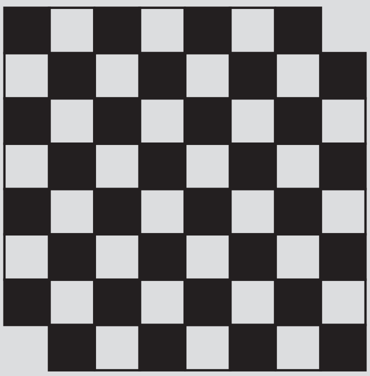
در سال ۱۹۶۱، فیزیک‌دان نظری، ام. ا. فیشیر اهل انگلیس، مسأله‌ی بسیار معروفی را حل کرد. صورت مسأله چنین بود:

به چند طریق می‌توان صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ را به‌وسیله‌ی دومینوها (قطعات مستطیل شکل ۱×۲) پوشاند؟

او نشان داد که این کار را به $۹۰۱^۲ \times ۲^۴$ یا ۱۲۹۸۸۱۶ راه مختلف می‌توان انجام داد. این مسأله را اندکی تغییر می‌دهیم و به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

مسأله‌ی ۶. در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸، خانه‌های گوشه‌ی سمت راست بالا و سمت چپ پایین را حذف کرده‌ایم. آیا می‌توان این صفحه را با دومینوهای ۱×۲ پوشاند؟ چرا؟

حل. نمی‌توان سطح مفروض را با دومینوهای ۱×۲ پوشاند. برای اثبات این مطلب، مربع‌ها را یک در میان سیاه می‌کنیم (شکل ۷). روشن است که برای فرش کردن سطح مفروض، هر مستطیل باید دو مربع را بپوشاند - یک مربع سفید و یک مربع سیاه. بنابراین ۳۱ مستطیل ۱×۲، به تعداد ۳۱ مربع سفید و ۳۱ مربع سیاه را می‌پوشاند. اما شکل ما ۳۲ مربع سیاه و ۳۰ مربع سفید دارد. بنابراین پوشاندن کل سطح ممکن نیست.



شکل (۷)

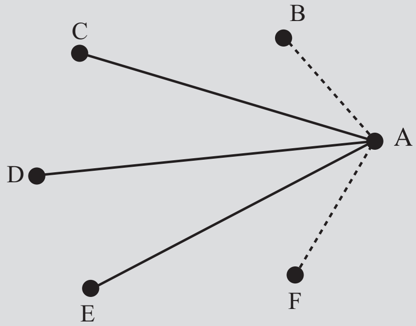
مسأله‌ی ۷. ثابت کنید در هر جمع ۶ نفره از افراد، همیشه می‌توان سه نفر را یافت که یا هر سه نفر با هم دوبه‌دو آشنا و یا هر سه با هم دوبه‌دو ناآشنا باشند.

حل. یک مُدل گرافیکی مناسب برای حل مسأله این است که افراد را رئوس یک گراف با شش رأس در نظر بگیریم. یال آشنایی را با یک رنگ و یال ناآشنایی را با رنگ دیگر در نظر می‌گیریم (در شکل (۸)، یال آشنایی را توپر و یال ناآشنایی را با نقطه‌چین نمایش داده‌ایم.)

در این صورت، چون هر دو نفر دل‌خواه با هم یا آشنا هستند و یا ناآشنا، پس هر دو رأس این گراف با یکی از این دو نوع یال (توپر یا نقطه‌چین) به هم مربوط می‌شوند و یک گراف کامل به دست می‌آید.

روشن است که برای یک رأس دلخواه (مانند A) پنج یال خروجی از دو نوع داریم؛ بنابراین الزاماً حداقل سه تای آن‌ها از یک نوع می‌باشند.

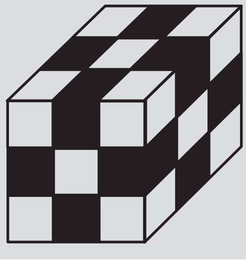
دو حالت در نظر می‌گیریم:



شکل (۸)

حالت اول آن‌که، سه یال خروجی توپر داشته باشیم (یعنی شخص A با سه نفر آشنا باشد). مطابق شکل، واضح است که دو رأس از سه رأس C، D و E یا حداقل با یک یال توپر به هم مربوط می‌شوند که در این صورت، با یال توپر دیگر خارج شده از A، تشکیل یک مثلث با یال‌های توپر می‌دهند (مثلاً مثلث ACE)؛ یا این‌که هیچ‌کدام از آن‌ها با یال توپر به‌هم وصل نمی‌شوند، که در این صورت، یک مثلث با یال‌های نقطه‌چین تشکیل می‌شود (مثلث CDE)؛ یعنی در هر حال، ما یا یک مثلث با سه یال توپر و یا یک مثلث با سه یال نقطه‌چین خواهیم داشت که معادل آن است که در هر حال، سه نفر یافت می‌شوند که دوبه‌دو با هم آشنا باشند یا سه نفر یافت می‌شوند که دوبه‌دو با هم ناآشنا باشند. حالت دیگر را که در آن حداقل سه یال نقطه‌چین از رأس A خارج می‌شود، به‌طریق مشابه می‌توان بررسی کرد و به‌همین نتیجه رسید.

مسأله‌ی ۸. مکعبی چون به ابعاد ۳×۳×۳ سانتی‌متر مکعب داریم که از ۲۷ مکعب کوچک‌تر ۱×۱×۱ تشکیل شده است (شکل ۹). آیا ممکن است موریانه‌ای طوری این قطعه چوب را بخورد که از هر مکعب کوچک‌تر بیرونی فقط یک‌بار بگذرد و در پایان، به مکعب مرکزی برسد؟



شکل (۹)

حل. چنان‌چه مکعب‌های ۱×۱×۱ را به‌طور متناوب با

رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم به‌طوری که رنگ مکعب مرکزی سیاه باشد، در این صورت رنگ مکعب‌های گوشه‌ای سفید خواهد بود. طبق شرایط مسأله، رنگ مکعبی که موریانه در آن قرار دارد، در هر حرکت عوض می‌شود و لذا اگر موریانه کار خود را از مکعب به رنگ سفید شروع کند، رنگ آخرین مکعب، یعنی مکعب ۲۷ ام نیز باید سفید باشد و لذا موریانه نمی‌تواند کار خود را در مکعب مرکزی تمام کند.

◆ اثبات‌های بدون کلام

گاهی می‌توان تمام جنبه‌های یک قضیه یا یک عبارت ریاضی را روی یک شکل ساده طوری پیاده کرد که با دقت در آن شکل و روابط موجود در آن، به‌راحتی به درستی آن قضیه یا عبارت ریاضی پی برد و این همان **اثبات بدون کلام** است؛ یعنی درک شهودی مفاهیم ریاضی و استفاده از شهود بصری در اثبات که زیباترین و عمیق‌ترین یادگیری را به‌ویژه برای دانش‌آموزان در بر دارد. مارتین گاردنر درباره‌ی اثبات‌های بدون کلام، چنین می‌گوید:

«در بسیاری از حالت‌ها، یک اثبات کسالت‌آور را می‌توان با یک شبیه‌سازی هندسی چنان به سادگی و زیبایی تکمیل کرد که درستی قضیه تقریباً در یک نگاه دیده شود.»

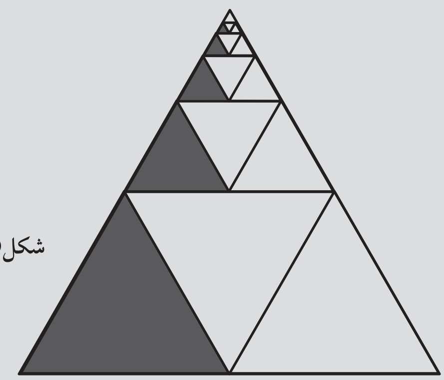
البته اکثر دانشمندان بر این باور هستند که اثبات بدون کلام، درواقع اثبات به معنای واقعی و متداول آن نیست و قابل قبول نمی‌باشد؛ ولی این، از اعتبار چنین عبارت‌های شهودی نمی‌کاهد و این نوع اثبات‌ها، بهترین روش برای پرورش شهود در دانش‌آموزان هستند. ولی پاسخ به این سؤال که «اگر اثبات بدون کلام اثبات نیست پس واقعاً چیست؟» ساده نیست. راجر ب. نلسن، نویسنده‌ی کتاب اثبات بدون کلام ([۷ و ۸])، بر این باور است که **عموماً** اثبات‌های بدون کلام، تصاویر یا نمودارهایی هستند که به بیننده کمک می‌کنند تا ببینند چرا یک عبارت خاص ممکن است درست باشد و نیز ببیند که چگونه اثبات درستی آن را آغاز کند و تأکید اصلی در این امر بر راهنمایی‌های بصری به بیننده به‌منظور تحریک تفکر ریاضی است.

اثبات بدون کلام، ابداع جدیدی نیست و تاریخی طولانی دارد به‌طوری که شواهد و نمونه‌هایی از آن‌ها در زمان چین باستان، یونان قدیم، ایران و ایتالیای رنسانس موجود است و امروزه نیز در مجلات انجمن ریاضی آمریکا، به‌ویژه در متمتیکس مگزین و کالج متمتیکس ژورنال، به بخش منظمی تبدیل شده است و در لا به لای مجلات ریاضی کشورمان نیز به چشم می‌خورد. هر چند در ابتدا از اثبات بدون کلام، مانند کاریکاتورها و سخنان بزرگان ریاضی و اشعار ریاضی و... برای پر کردن فضاهای خالی انتهای مقاله‌ها استفاده می‌شد، اما اکنون این گونه اثبات‌ها، اهداف و جایگاه خاص خود را پیدا کرده‌اند و طرفداران مخصوص دارند. معمولاً محتوای اثبات بدون کلام در مورد، هندسه، جبر، مثلثات، حسابان، هندسه‌ی تحلیلی، نامساوی‌ها، مجموعه‌های صحیح، سری‌های نامتناهی، جبر خطی و گراف، ... می‌باشد ([۷]، پیشگفتار و پشت جلد).

در ادامه، چند مسأله از جلد دوم کتاب **اثبات بدون کلام** می‌آوریم [۸].

مسأله‌ی ۹. مجموع سری هندسی

$$\frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۴}+\dots=\frac{۱}{۳}$$



شکل(۱۰)

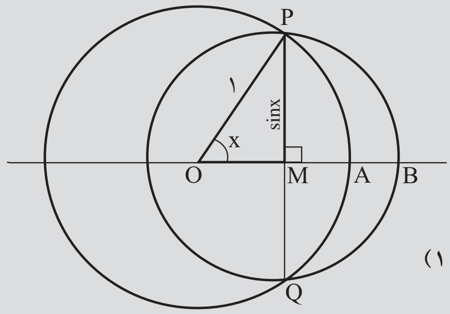
مسأله‌ی ۱۰. نامساوی ژوردن

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲x}{\pi}\le\sin x\le x$$

$$OB=OM+MP\ge OA\Rightarrow PBQ\ge PAQ\ge\overline{PQ}$$

$$\Rightarrow\pi\sin x\ge ۲x\ge ۲\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{۲x}{\pi}\le\sin x\le x$$



شکل (۱۱)

◆ جمع‌بندی
(توصیه‌هایی در به کارگیری راهبرد رسم شکل)

در این قسمت چند پیشنهاد تجربی که در به‌کارگیری راهبرد رسم شکل می‌تواند مثمرثمر باشد، ارائه می‌دهیم.

الف) کاهش شلوغی و درهم‌ریختگی بصری در شکل‌ها که موجب حواس‌پرتی می‌شوند. تنها باید نکاتی که واقعاً مورد نیاز هستند درون شکل یا نمودار گنجانده شود. هم‌چنین باید جزئیاتی را که به زمینه‌ی تصویر یا نمودار اضافه می‌شوند، کاهش دهیم.

ب) قسمت‌هایی را که در مسأله، مهم‌تر هستند، پررنگ کنید. اگر لازم بود یک شکل یا نمودار را چندین بار، با جزئیات مهم و متفاوت بکشید.

پ) باید خود شکل‌ها و نمودارها بتوانند جریان مسأله را برای ما بازگو کنند. هماهنگی بین متن و شکل به‌طور شگفت‌آوری همراه با ترفند است و حالت ایده‌آل آن است که هر کدام از این دو، در صورت امکان، مستقل از هم باشند.

ت) مقاله‌های ریاضی که در آن‌ها تصور و تجسم وجود داشته باشد، بسیار کمیاب‌اند. به خاطر داشته باشید که تجسم و تصور در شفاف‌سازی اهداف و مسایل ریاضی، خدمت بزرگی انجام می‌دهند. به‌عنوان مثال، شما اگر مقاله‌ای را مطالعه کنید که شکل‌های فراوانی داشته باشد، با یک نگاه حتی گذرا به تصاویر متوجه می‌شوید که موضوع کلی مقاله، چیست یا بعد از مطالعه‌ی متن مقاله، بهتر متوجه مطلب خواهید شد. درواقع شکل‌ها برای مرور سریع مقاله هستند و معمولاً از قسمت‌های مهم متن گرفته می‌شوند.

ث) در کشیدن شکل‌ها باید فکر کنید که چگونه باید موضوعات مربوط به بحث گفته شده در مسایل را در شکل نشان دهید. شکل‌ها را طوری بکشید که کاملاً منطبق بر جریان مسأله باشند. حتی اگر لازم باشد چند بار شکل را از نو بکشید تا به شکل مناسبی دست پیدا کنید. کامپیوتر می‌تواند در این مورد به شما کمک کند.

ز) دائماً از خود سؤال کنید که آیا این شکل کاملاً منطبق بر هدف مسأله است یا نه؟ و اگر لازم بود، شکل را از نو رسم کنید. اگر در صورت مسأله تغییری داده شود، باید شکل دوباره کشیده شود تا شکلی کامل و صحیح به‌دست آید.

ج) از قدرت تصور و ابتکار خود استفاده کنید. گاهی یک تغییر کوچک و ظریف در مسأله ممکن است تأثیر فوق‌العاده‌ای در حل مسأله داشته باشد. تجربه در این زمینه به شما کمک می‌کند.

چ) اثبات و استدلال نکات مسأله، وظیفه‌ی تصاویر نیست؛ زیرا تفسیر افراد مختلف از شکل‌ها واقعاً غیرقابل پیش‌بینی است. آزمایش‌های روان‌شناسی این موضوع را ثابت کرده است. همیشه یک شکل را در حضور تعداد مختلفی از افراد، امتحان و بررسی کنید.

زیرنویس

۱. این مدل، شامل چهار گام است: ۱. فهم و درک مسأله؛ ۲. یافتن راهبرد مناسب؛ ۳. اقدام به حل مسأله؛ ۴. بازنگری و وارسی راه‌حل.

منابع

۱. لورن سی. لارسن، **حل مسأله از طریق مسأله**، ترجمه‌ی علی ساوجی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷.

۲. استیون ج. کرانتس، **فنون مسأله حل کردن**، ترجمه‌ی مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۹.

۳. ا. ج. باربو و دیگران، **پانصد مسأله‌ی ریاضی پیکارجو**، ترجمه‌ی مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۱.

۴. یحیی تابش و دیگران، **آموزش هنر حل مسأله**، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، ۱۳۷۹.

۵. علی روزدار، **نقش رهیافت‌ها در آموزش ریاضیات متوسطه از طریق حل مسأله**، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی (دانشگاه شهید بهشتی)، ۱۳۸۳.

۶. سید عباس موسوی، **حل مسأله و رهیافت‌ها**، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، (دانشگاه شهید بهشتی)، ۱۳۸۴.

۷. راجر ب. نلسن، **اثبات بدون کلام**، ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۵.

8. R. B. Nelsen, **Proofs Without Words II**, The Mathematical Association of America, 2000.

9. B. Casselman, Pictures and Proofs, **Notices the AMS**, **47** (2000) 1257- 1266.

10. A. Shen, Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problems, **The Mathematical Intelligencer**, **19** (1997) 44-47.