قضیه‌ی دریکله همراه با شرط اضافه

فرض کنید اعداد طبیعی c و d نسبت به هم اول باشند و به‌علاوه فرض کنید حداقل یک عدد اول به صورت $ck + d$ وجود دارد. حال فرض کنید a و b، دو عدد مثبت و نسبت به هم اول هستند. ثابت می‌کنیم که بی‌نهایت عدد اول به شکل $ak + b$ وجود دارد.

اثبات. می‌توان فرض کرد $a > ۱$ زیرا اگر $a = ۱$ آن‌گاه دنباله‌ی $ak + b$ به‌صورت $b+۱, b+۲, \dots$ می‌باشد که به روشنی شامل بی‌نهایت عدد اول است زیرا قسمتی از اعداد طبیعی متوالی است.

از این‌که $(a, b) = ۱$، داریم $(a^n, b) = ۱$. لذا با توجه به فرض مسأله، حداقل یک عدد اول مانند p وجود دارد به‌طوری که

$$p = a^n k + b$$

درنتیجه با انتخاب $k_۱ = a^{n-۱}k$ داریم $p = ak_۱ + b$ و چون $p > a^n$، این بدان معنی است که به ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول مانند p وجود دارد که $p = ak_۱ + b$. بنابراین بی‌نهایت عدد اول به صورت فوق وجود دارد.

حتی اگر این اثبات عاری از اشکال نباشد، به هر حال قضیه‌ی دریکله اثبات شده است و نتایج آن حائز اهمیت است. یکی از نتایج قضیه‌ی دریکله همین است که بی‌نهایت عدد اول به شکل $۴k + ۱$ وجود دارد.

تذکر. می‌توان اثبات کرد نسبت اعداد اول به شکل $۴k + ۱$ در بین تمام اعداد اول، از نظر حدی برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پی‌نوشت‌ها

* این ایده توسط نگارنده ارایه شده است تا بتوان از برهان خلف که روندی آشنا برای حل این گونه مسایل است استفاده کرد. اثبات زیر برای درج در کتاب **اصول مقدماتی نظریه‌ی اعداد** که توسط استاد محترم، آقای **علی محمد کارپرور** و با هماهنگی دانشگاه آزاد اسلامی واحد استهبان در اسفندماه سال ۱۳۸۶ به چاپ رسید، فرستاده شده است و با درج نام نیز از آن استفاده گردیده است. (همکاران علاقه‌مند به بررسی مسایل زیبا و جذاب در این شاخه از ریاضیات را به مطالعه‌ی این کتاب نفیس و ارزشمند تشویق می‌کنم.)

** مراتب تشکر خود را از دانش‌آموزان کلاس اول و سوم دبیرستان نمونه دولتی ابن‌سینای ناحیه‌ی ۱ شیراز برای سعی و تلاششان در رابطه با یافتن مقالات و روش‌های متفاوت اثبات نامتناهی بودن اعداد اول ابراز می‌دارم.

اعداد قالب

چکیده

گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵)، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوران جدید که در شاخه‌های کاملاً متفاوتی از ریاضیات پژوهش کرده است، چنان‌که معروف است، عقیده‌اش درباره‌ی نظریه‌ی اعداد را با این عبارت بیان کرده است: «ریاضیات ملکه‌ی علوم است و نظریه‌ی اعداد ملکه‌ی ریاضیات» [۱]. با این که نظریه‌ی اعداد از مباحث شیرین ریاضیات است اما زمانی که دانش‌آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته‌ی ریاضی در درس ریاضیات گسسته به این مبحث می‌رسند، اغلب با حالتی کسل‌کننده می‌پرسند: نظریه‌ی اعداد چه کاربردی دارد؟ در این مقاله تجربه‌ی یکی از این کلاس‌ها ارایه شده است که در آن معلم با اشاره به کاربرد اعداد اول در رمزنگاری، طرح حدس گلدباخ [۱] و مسایل مشابه آن‌که برای حل آن‌ها جایزه‌ی نقدی تعیین شده است و معرفی اعداد تاکسی [۴]، در دانش‌آموزان ایجاد انگیزه نموده تا آن‌جا که آن‌ها خود به بررسی شگفتی‌های جدیدی از اعداد بپردازند. ماحصل نهایی این تجربه‌ی به‌یاد ماندنی، معرفی اعداد قالب است. عدد قالب عددی است که مقلوب مربع آن با مربع مقلوبش برابر است مانند ۱ و ۲ و ۳ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۰ و ۲۱ و... در ادامه ویژگی‌هایی از این اعداد بررسی می‌شود.

مقدمه

در یکی از کلاس‌های پیش‌دانشگاهی در درس ریاضیات گسسته وقتی به مبحث نظریه‌ی اعداد رسیدم، با سؤالات مکرر دانش‌آموزان روبه‌رو شدم که این مبحث چه کاربردی دارد؟ نوشته‌ای را که از طریق سایت خانه‌ی ریاضیات اصفهان[۳]، درباره‌ی شکار اعداد اول و کاربرد این اعداد در رمزنگاری تهیه کرده بودم، برای آن‌ها خواندم. حدس گلدباخ و این که حل این حدس و مسایل مشابه آن دارای جایزه‌ی نقدی است را برایشان بیان کردم. عده‌ای از آن‌ها با توجه و علاقه به

صحبت‌هایم گوش می‌دادند. از فرصت استفاده کردم و به آن‌ها گفتم شگفتی‌های اعداد، فراوان است و شما نیز می‌توانید خواص جدیدی در مورد اعداد بیابید. داستان اعداد تاکسی و خواص دومین عدد تاکسی یعنی ۱۷۲۹ (کوچکترین عددی که به دو طریق مختلف می‌توان به صورت مجموع مکعب‌های دو عدد مثبت نوشت، یعنی $9^3+10^3=1^3+12^3=1729$) را روی تابلو نوشتم و این موضوع را که حاصل ضرب مجموع ارقام این عدد در مقلوبش (یعنی ۹۱×۱۹) برابر خود ۱۷۲۹ می‌شود و ما می‌توانیم این خاصیت را بررسی کنیم، برای آن‌ها بیان کردم. هم‌چنین یادآوری کردم که متأسفانه معلوم شده است تنها اعداد ۱، ۸۱، ۱۴۵۸ و ۱۷۲۹ دارای این ویژگی هستند (زیرا برای این که عدد حاصل از مجموع ارقام عددی، یک عدد n رقمی $(n \geq 3)$ باشد آن عدد باید حداقل $\frac{100}{9}(10^{n-3}-1)+12$ رقم داشته باشد و عدد حاصل از ضرب دو عدد n رقمی حداکثر $2n$ رقمی است و حال آن که $\left(\frac{100}{9}(10^{n-3}-1)+12 > 2n\right)$ و ما باید دنبال ویژگی‌هایی باشیم که گروه بزرگ‌تری از اعداد را شامل شود. یکی از دانش‌آموزان متوسط کلاس با خوشحالی گفت: آقا ما یک خاصیت برای اعداد ۱۳ و ۱۶ کشف کردیم؛ مجموع ارقام مربع ۱۳ برابر ۱۶ است و مجموع ارقام مربع ۱۶ برابر ۱۳ است. ($169=13^2$، $16=9+6+1$ و $256=16^2$، $13=6+5+2$). او را با شعف تشویق کردم، کمی بعد از آن گفتم به همان دلیلی که قبلاً بیان شد این خاصیت نیز فقط برای زوج‌های (۱و۱)، (۹و۹) و (۱۳ و ۱۶) برقرار است. در همین جلسه بود که ایده‌ی بررسی اعدادی که مقلوب مربع آن‌ها با مربع مقلوبشان برابر است به ذهنم خطور کرد و بعد از مدتی با کمک همکاران محترم گروه ریاضی متوسطه‌ی استان اصفهان و یکی از دانش‌آموزان خوب توانستیم مطالب زیر را در مورد این اعداد به‌دست آوریم. این اعداد را اعداد قالب نامیدیم.

امان اله غفارپور گل سفیدی
گروه آموزشی ریاضی متوسطه‌ی استان اصفهان
مرکز تحقیقات معلمان اصفهان

اعداد قالب

تعریف. فرض کنید a یک عدد طبیعی و a' مقلوب آن باشد، a را یک عدد قالب گوییم هرگاه $(a^2)' = (a')^2$.

مثال. عدد ۱۲ یک عدد قالب است زیرا $144=12^2$، $441=21^2$ و $441=(144)'$. ولی ۳۲ یک عدد قالب نیست زیرا $1024=32^2$، $529=23^2$ و $529 \neq (1024)'$. در زیر اعداد قالب از ۱ تا ۱۰۰۰۰ آمده است.

۱,۲,۳,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۲۰,۲۱,۲۲,۳۰,۳۱,۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,۱۱۰,
۱۱۱,۱۱۲,۱۱۳,۱۲۰,۱۲۱,۱۲۲,۱۳۰,۲۰۰,۲۰۱,۲۰۲,۲۱۰,۲۱۱,۲۱۲,
۲۲۰,۲۲۱,۳۰۰,۳۰۱,۳۱۰,۱۰۱۰,۱۰۱۱,۱۰۱۲,۱۰۱۳,۱۰۲۰,۱۰۲۱,
۱۰۲۲,۱۰۳۰,۱۰۳۱,۱۱۰۰,۱۱۰۱,۱۱۰۲,۱۱۰۳,۱۱۱۰,۱۱۱۱,۱۱۱۲,
۱۱۱۳,۱۱۲۰,۱۱۲۱,۱۱۲۲,۱۱۳۰,۱۲۰۰,۱۲۰۱,۱۲۰۲,۱۲۱۰,۱۲۱۱,
۱۲۱۲,۱۲۲۰,۱۳۰۰,۱۳۰۱,۲۰۰۰,۲۰۰۱,۲۰۰۲,۲۰۱۰,۲۰۱۱,۲۰۲۱,
۲۰۲۲,۲۱۰۰,۲۱۰۱,۲۱۰۲,۲۱۱۰,۲۱۱۱,۲۱۲۰,۲۱۲۱,۲۲۰۰,۲۲۰۱,
۲۲۰۲,۲۲۱۰,۲۲۱۱,۳۰۰۱,۳۰۱۰,۳۰۱۱,۳۱۰۰,۳۱۰۱,۳۱۱۰,۳۱۱۱,
۱۰۰۰۰

لم۱. عدد طبیعی a قالب است اگر و تنها اگر a' قالب باشد.

اثبات.

$$\text{a قالب است} \Leftrightarrow (a^2)' = (a')^2$$
$$\Leftrightarrow \left[(a^2)'\right]' = \left[(a')^2\right]'$$
$$\Leftrightarrow \left[(a')'\right]^2 = \left[(a')^2\right]' \Leftrightarrow \text{a}' \text{ قالب است}$$

لم۲. عدد طبیعی a قالب است اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی k، $10^k \times a$ قالب باشد.

اثبات.

$$\left[(10^k \times a)^2\right]' = \left[10^{2k} \times a^2\right]' = \left[a^2\underbrace{00\cdots0}_{2k}\right]' = (a^2)'$$

$$\left[(10^k \times a)'\right]^2 = \left[(a\underbrace{00\cdots0}_{k})'\right]^2 = [a']^2 = (a')^2$$

درنتیجه

$$[a']^2 = (a')^2 \Leftrightarrow \left[(10^k \times a)^2\right]' = \left[(10^k \times a)'\right]^2$$

و اثبات تمام است.

اما در حالت کلی در مورد این اعداد چه می‌توان گفت؟

فرض کنید a یک عدد n رقمی باشد یعنی $a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ ، $(n \in N)$ در این صورت داریم

$$a^2 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j 10^{i+j}$$

و

$$(a')^2 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^{n-i})^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j 10^{2n-(i+j)}$$

وقتی i+j ثابت باشد، مجموع $a_i . a_j$ ها ضریب 10^{i+j} در a^2 می‌شوند که البته همین مجموع، ضریب $10^{2n-(i+j)}$ در $(a')^2$ است و این دو وقتی با هم برابرند که حاصل، کوچک‌تر از ده باشد. به بیان دیگر عدد طبیعی a قالب است هرگاه

به ازای هر عدد طبیعی k که $0 \le k \le 2n$ و هر i و j که $i, j = 0, 1, 2, \cdots, n$ ؛ اگر $i + j = k$ ، آن‌گاه داشته باشیم

$$s = \sum_i \sum_j a_i . a_j < 10$$

مثال: آیا عدد ۱۲۳ قالب است؟

$$123 = \overline{a_2 a_1 a_0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow i + j = 0 \Rightarrow i = 0, j = 0 \Rightarrow s = a_0 . a_0 = 3 \times 3 < 10 \\ k = 1 \Rightarrow i + j = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} i = 0, j = 1 \\ i = 1, j = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow s = 2 \times 3 + 3 \times 2 > 10 \end{cases}$$

بنابراین ۱۲۳ یک عدد قالب نیست یعنی $[(123)^2]' \neq [(123)']^2$. نتیجه‌ی جالب الگوریتم بالا به صورت زیر است.

نتیجه‌ی(۱). اگر عدد طبیعی a قالب باشد و بیش از ۹ رقم داشته باشد آن‌گاه رقم ۰ را دارد.

اثبات. فرض کنید عدد طبیعی a عددی با حداقل ۱۰ رقم باشد که رقم ۰ ندارد، پس کوچک‌ترین رقم آن یک است. حال اگر $i + j = 10$ باشد، برای i+j حداقل ۱۱ حالت وجود دارد که حاصل ضرب هر کدام حداقل یک است و درنتیجه مجموع، بزرگ‌تر از ده است. پس a قالب نیست و این تناقض است.

نتیجه‌ی(۲). هر عدد قالب، رقمی بیش از ۳ ندارد.

اثبات. فرض کنید $a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ قالب باشد و $0 \le t \le n$ وجود داشته باشد که $a_t > 3$ باشد. در این صورت برای حالت $i + j = 2t$ داریم

$$s = \sum_i \sum_j a_i . a_j > a_t . a_t > 9 \Rightarrow s \ge 0$$

که این تناقض است.

جمع بندی

آب کم جوی، تشنگی آور به دست
تا بجوشد آبت از بالا و پست

دانش به مفهوم خاص خود، به مجموعه‌ای از آگاهی‌ها گفته می‌شود که نوعی از قانون‌مندی را پذیرفته باشند و بنابراین بتوان آن‌ها را به یاری استدلال یا مشاهده و تجربه به دیگران انتقال داد. به این ترتیب دانش را می‌توان یاد گرفت و یاد داد، ولی هر دانشی و از آن جمله ریاضیات در هر زمانی توانسته است تا مرز معینی پیش رود و از آن به بعد ابهام‌ها و تاریک روشنی‌ها آغاز می‌شود. از یک طرف باید راه‌هایی برای ادامه‌ی تکامل آن پیدا کرد [برای مثال مسأله‌های جدید طرح کرد] و از طرف دیگر باید مسأله‌هایی را حل کرد که اگرچه مدت‌هاست در برابر بشر طرح شده‌اند، اما هنوز راهی برای حل آن‌ها پیدا نکرده‌اند [۲]. معلم ریاضی با طرح مسأله‌های جالب و اشاره به کاربرد شاخه‌های مختلف ریاضی به تناسب موضوع تدریس که البته نیازمند تحقیق از جانب خود اوست می‌تواند در دانش‌آموزان ایجاد انگیزه و رغبت کند و به آن‌ها جرأت دهد که خود نیز به دنبال کشف جدید یا حل مسأله‌های حل نشده بروند و در این حین با علاقه‌ی بیش‌تری به فراگیری موضوعات درسی بپردازند. موضوع این مقاله بهانه‌ای است تا به دانش‌آموزان که ذاتاً افرادی فعال و جست‌وجوگرند، فرصت داده شود تا بپرسند، کنجکاو باشند، کشف کنند و به مشکل گشایی بپردازند.

مراجع

[۱] کورانت، ر. رابینز، ه. **ریاضیات چیست؟** ویرایش: یان استیوارت، ترجمه‌ی سیامک کاظمی، نشر نی، ۱۳۷۹، صفحه‌های ۲۳ و ۳۵-۳۳.

[۲] جورج پولیا. **خلاقیت ریاضی**، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۶، صفحه‌ی ۳.

[3] www.mathhouse.org

[4] www.euler.free.fr/taxicab.htm