a چه خوشمزه است!*

امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی
مریم عبدالله پور
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی دبیرستان در بیجار

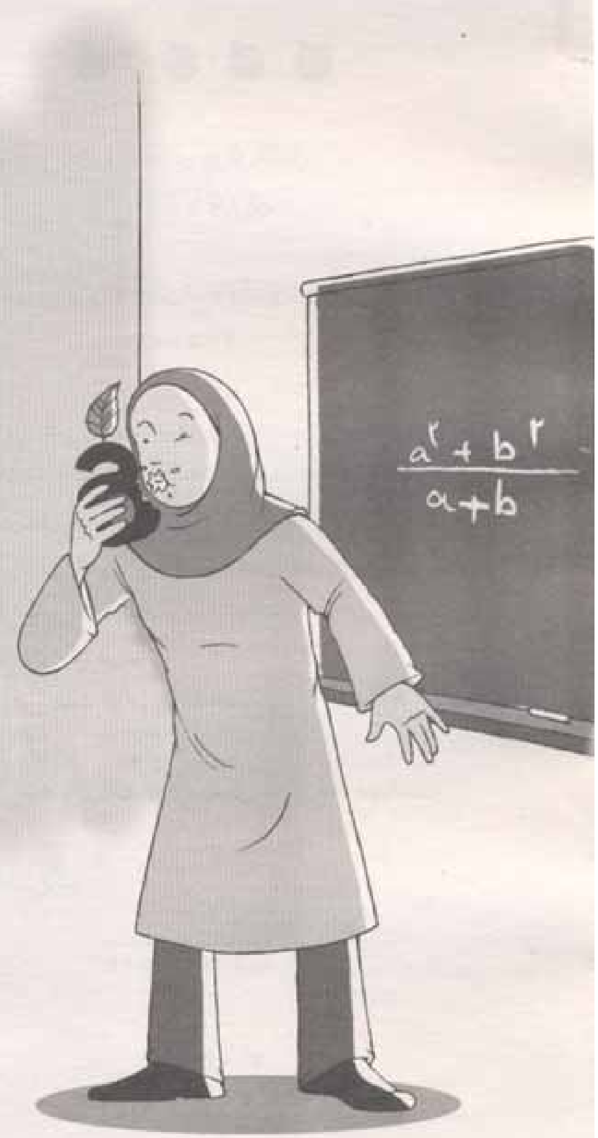
$$\frac{c}{ac+bc}=\frac{\quad}{ac+b}$$

با دیدن عبارت‌های بالا، حدس اغلب ریاضی خوانده‌ها این است که این، یکی از تمرین‌های بی‌مزه و سر راست جبر است که باید صورت کسر دوم را چنان پیدا کرد که تساوی برقرار شود. متأسفیم! حدس شما اشتباه است. اگر شما یک بار ریاضیات سال اول دبیرستان را درس داده بودید، احتمالاً حدس بهتری می‌زدید و می‌گفتید: خُب، طرف چپ و راست تساوی بالا توسط دو فرد مختلف نوشته شده است؛ طرف چپ تمرینی «ساده» در ساده‌کردن کسرهای جبری با عنوان عمومی «ساده کنید» است که توسط معلمی (یا مؤلفی یا محققی) نوشته شده است، و طرف راست پاسخ دانش‌آموزی به این تمرین ساده است.

حدس دوم شما چیست؟ به طور طبیعی، همیشه دانش‌آموزان «ضعیفی» پیدا می‌شوند که همه‌ی زحمت‌های «ما» را بر باد می‌دهند، یکی $\frac{c}{ac+bc}$ را می‌نویسد $\frac{\quad}{ac+b}$، دیگری $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ را می‌نویسد $a+b$ و ...؛ ولی وقتی یک سوم از صد و چهل و هفت[1] دانش‌آموز شما چنین می‌کنند: احتمالاً اندکی در درستی بی‌کم و کاستِ حدس دوم خود نیز شک می‌کنید و به خود می‌گویید:

شاید من جایی در پاسخ به سؤال دانش‌آموزی که از من پرسیده «چرا وقتی جمع باشد حذف نمی‌شود ولی وقتی ضرب باشد حذف می‌شود؟»، گفته‌ام، «دلیلی نداره، وقتی ما درس می‌خوندیم به ما این طوری درس دادند، حالا ما هم همین طور به شما درس می‌دهیم.»

شاید همه‌ی تمرین‌های «ساده کنید»ی که به او داده‌ام، واقعاً ساده می‌شده‌اند و او هیچ‌گاه هیچ نیازی به پرسیدن این سؤال ساده پیدا نکرده که «خُب، آیا این یکی ساده می‌شود؟» پس عجیب نیست که با دیدن $\frac{a^2+b^2}{a+b}$، او به طور خودکار شروع به ساده‌کردن کند.



شاید هم، هیچ گاه خود و او را درگیر مفهوم تساوی دو کسر جبری نکرده‌ام و هر بار فقط روی جواب غلط او ضرب‌در کشیده‌ام، یک بار روی $\frac{c}{ac+bc}=\frac{\quad}{ac+b}$ بار دیگر روی $\frac{ac+bc}{c}=ac+b$ و بار دیگر روی...

اکنون، کمی به خود می‌آید و با خود می‌گوید: «نه، من این حرف را نزده‌ام»، «نه، من گاهی هم درباره‌ی *امکان ساده‌کردن* بحث کرده‌ام» (اگرچه همه‌ی عناوین کتاب درسی «ساده کنید» است)، و بالاخره می‌گوید «من تا آن‌جایی که می‌شد، درگیر مفهوم تساوی هم شدم. غوطه‌ور در این افکار، ناگهان مقصر[۲] را می‌یابد: معلم سال قبل! حتماً معلم سال قبل و سالِ قبل از آن، متغیر را با «روش میوه‌های فصل» درس داده که حالا بچه‌ها «a را می‌خورند»!

روش میوه‌های فصل

همه‌ی شما با «روش میوه‌های فصل» برای معرفی متغیرها آشنایید، اگرچه شاید آن را به این نام نشناسید. اگر هنوز حدس نزده‌اید که ما از چه صحبت می‌کنیم «تساوی‌ها را مانند نمونه کامل کنید.» از کتاب ریاضی، سال دوم دوره‌ی راهنمایی را ببینید:

...

$۵+۵+۵=$

$a+a+a=$

به بسیاری از ما با این روش درس داده‌اند و بسیاری از ما با این روش درس داده‌ایم، و شاید از آن برای «ساده کردن» عبارتی مانند $۲a+۳b+۳a$ استفاده کرده باشیم: $۲a+۳b+۳a$ مثل این است که ما دو سیب داریم، سه گلابی هم بر می‌داریم، بعد سه سیب دیگر هم می‌گیریم

پس میوه‌های ما پنج سیب *به اضافه‌ی* سه گلابی می‌شود

و این یعنی $۵a+۳b$.

در این صورت خدا می‌داند تکلیف $۲a+۳b-۳a$ چیست؟ آیا می‌توان «۱- سیب داشت»؟ «۵ سیب به توان دو» چی ($۵a^{۲}$)؟ (بازنویسی شده از تال، ۱۹۹۲).

اجازه دهید که برای رفع این مشکلات، از داشتن چند میوه‌ی مختلف صرف‌نظر کنیم و فقط به چند تا از یک میوه بسنده کنیم. حالا داریم:

حالا سیب را بردار و به جای آن ۵ بگذار:

$۵+۵+۵=$

و حالا ۵ را بردار و به جای آن a بگذار:

$a+a+a=$

و حالا این تصور خیلی ناقص را به دانش‌آموز خود القاء کرده‌ایم که «a، خودِ شئ را نشان می‌دهد و نه تعداد آن را» (تیروش، ایون و رابینسون؛ ۱۹۹۸)، و اگر هنوز هم اندک امیدی برای رهایی دانش‌آموز از این تصور باقی است، با گفتن این جمله از پانوشت کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان (ص ۳۶) آن را از بین ببریم:

متغیر حرفی است که می‌تواند جانشین هر عدد یا هر عضو یک مجموعه گردد.

و اکنون زمینه برای ظهور «پدیده‌ی عدد یک» مهیاست.

پدیده‌ی عدد یک

$$\frac{c}{ac+bc}=\frac{\quad}{ac+b}$$

و

$$\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a+b}=a+b$$

دو نمونه از «پدیده‌ی عدد یک» است؛ پدیده‌ای که در آن اشیای یکسان از صورت و مخرج کسر حذف می‌شود و «هیچ چیز جای آن‌ها نمی‌ماند.»

گاهی هیچ چیز، واقعاً هیچ چیز است:

$$\frac{۲a+۲b}{a+b}=۲+۲$$

و این یکی که «بعد از زدن همه‌ی حروف مشابه، چون چیزی در صورت نداریم، پس مخرج به صورت می‌آید»:

$$\frac{c}{ac+bc}=a+b$$

گاهی هیچ چیز، صفر است:

$$\frac{۲a+۲b}{a+b}=\frac{۲+۲}{۰}$$

البته، گاهی اگر خوش‌شانس باشید، هیچ چیز باقی نماندن، با *باقی ماندن عامل یک*، نتیجه‌ی یکسان دارد:

$$\frac{ac+bc}{c}=a+b$$

و

$$\frac{a^۲-b^۲}{a+b}=a-b$$

و فقط در این حالت است که خوشمزگی aای که خورده شده است تا بعد از امتحان هم زیر دندان‌ها می‌ماند!

a زدنی است نه خوردنی

انتظار «ما» چیست؟ ما انتظار داریم که دانش‌آموزان، ابتدا *عامل* (یا عامل‌های) مشترک در صورت و مخرج کسر را پیدا کرده و سپس آن‌ها را بزنند (حذف کنند) نه این‌که *اشیاً* یکسان را بخورند. آیا این انتظاری طبیعی است؟ از دیدگاه یک ریاضی‌دان، بله، چرا که

«مطالب ریاضی کاملاً به‌هم پیوسته هستند، یعنی ریاضیات دوره‌های ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان با هم ارتباط نزدیک و منطقی دارند. مثلاً شما اگر در محاسبه با کسرهای عددی مهارت پیدا کنید، مسلماً در محاسبات کسرهای جبری نیز توفیق به‌دست خواهید آورد.»

(مقدمه‌ی کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان)

برای یک ریاضی‌دان، کسرهای عددی و کسرهای جبری از ساختار یکسانی برخوردارند. ولی نباید فراموش کرد که دانش‌آموزان ما در شروع کار با کسرهای جبری، این یکسانی ساختار را نمی‌بینند. اگر خوش‌بین باشیم، می‌توانیم با این فرض شروع کنیم که در شروع کار با کسرهای جبری، کسرهای عددی در فضای تجربه‌ی آن‌ها قرار دارد، اگرچه برای خیلی از آن‌ها هنوز $\frac{۱}{۲}$ فقط می‌تواند $\frac{۱}{۲}$ از چیزی باشد. و این‌چنین است که $\frac{۱}{۲}$ برای آن‌ها «معنی» دارد ولی $\frac{x}{۲}$ ندارد.

اگر ما در جهت معنی‌بخشی به $\frac{x}{۲}$ (و به طور کلی، کسرهای جبری) هیچ تلاشی نکنیم. دانش‌آموزان ما خود چنین خواهند کرد: ۱ را از صورت $\frac{۱}{۲}$ برمی‌دارند.

به‌جای آن سیب می‌گذارند  و سپس  را برمی‌دارند و به‌جای آن x می‌گذارند. و این تنها شروع ماجرا است، ماجرایی که ما تنها بخش کوچکی از آن را در این «مقاله» روایت کردیم.

زیرنویس‌ها

* مقاله‌ی حاضر از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد «مریم عبداله‌پور» (با عنوان مشکلات دانش‌آموزان در ساده‌کردن کسرهای جبری و بررسی علل آن) استخراج شده است. مسئول زبان انتخاب‌شده برای مقاله‌ی حاضر، «اصغری» است. توجه به نکات زیر به بهتر خوانده شدن مقاله کمک خواهد کرد:

ـ در انتخاب ضمایر، از ایهام استفاده شده است. بنابراین من، ما و شما هر یک می‌تواند جای دیگری به کار رود.

ـ همه‌ی عبارت‌های جبری و نقل قول‌هایی که در گیومه («...») قرار گرفته، «واقعی» است.

۱. تعداد شرکت کنندگان در تحقیق «عبدالله‌پور».

۲. این قضاوت، نظر ما نگارندگان نیست. ما فقط از روال معمول پیروی کرده‌ایم.

منابع

1. Tirosh, Dina and Even Ruhama and Robinson Naomi: (1998), Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches, Educational Studies in mathematics, 35:51-64, Kluwer Academic Publisher.

2. Tall, David: (1992), The Transition From Arithmetic To Algebra: Number Patterns, Or Proceptual Programming? For The Research Workshop on Mathematics Teaching and Learning "From Numeracy To Algebra".

۳. کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی (۱۳۸۵)، دکتر مسعود فرزان، صفر با همت شیروانه ده، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. کتاب ریاضی سال اول دبیرستان (۱۳۸۵). گروه مؤلفان، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.