هرم پاسکال

رباب حدادیان
دبیر ریاضی زنجان

مقاله‌ای که پیش رو دارید، حاوی مطلبی است درباره‌ی روش یافتن ضرایب بسط سه جمله‌ای $(a+b+c)^n, n \in W=\{0\}\cup N$ با استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال. هم‌چنین در ادامه، به ضرایب بسط $(a+b+c+d)^n, n \in W$ با استفاده از همین مثلث اشاره‌ای خواهیم داشت.

مثلث خیام ـ پاسکال، یکی از زیباترین مثلث‌های عددی است. این مثلث سحرآمیز پر از نکته‌های ریاضی است و سال‌هاست که ریاضی‌دانان را به خود مشغول داشته است. اعداد مثلث را در شکل زیر می‌بینید.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

شکل(۱)
۵ سطر اول مثلث خیام ـ پاسکال

یکی از خواص موجود در این مثلث این است که اعداد هر سطر آن را می‌توان از اعداد سطر قبل به‌دست آورد. به‌این ترتیب که هر عدد داخل مثلث، برابر است با مجموع دو عدد بلافاصله بالای آن. هم‌چنین اگر دو جمله‌ای $(a+b)^n$ را در نظر بگیریم، با توجه به اعداد سطر nـام این مثلث، می‌توانیم ضرایب آن را به‌دست آوریم. (جدول زیر)

n	بسط دو جمله‌ای	ضرایب
۰	$(a+b)^0=1$	$\binom{0}{0}$
۱	$(a+b)^1=1a+1b$	$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$
۲	$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$	$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$
۳	$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$	$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$

پس در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، ضرایب بسط به صورت زیر خواهند بود

(سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام ـ پاسکال) $\quad \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots \binom{n}{n}$

اکنون با توجه به مطالب فوق، برای ضرایب بسط سه جمله‌ای $(a+b+c)^n$ ، الگویی هندسی مانند مثلث خیام را معرفی کرده و خاصیت آن‌را اثبات می‌کنیم.

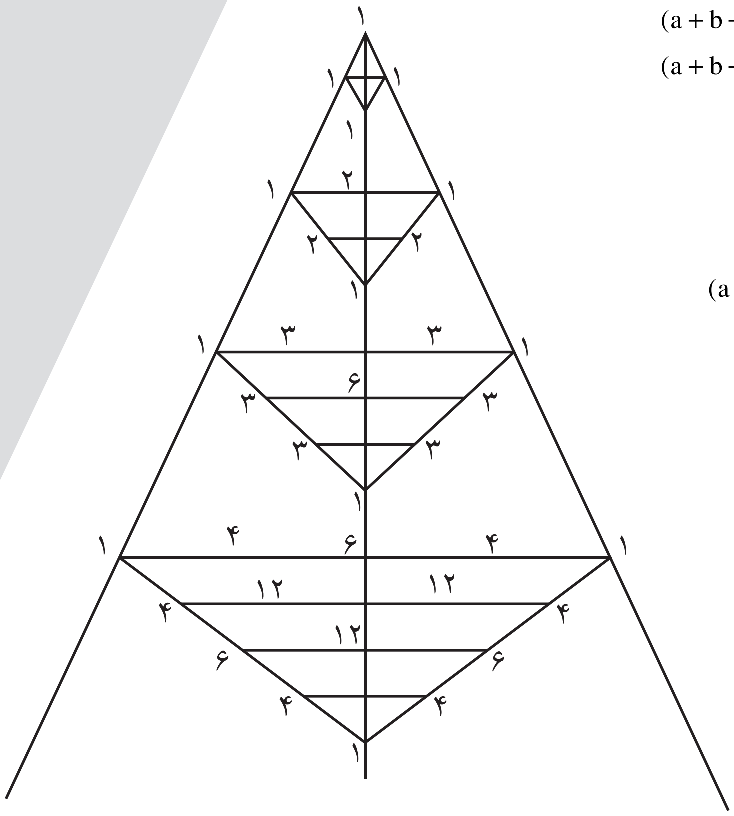
همان‌طور که برای یافتن ضرایب بسط $(a+b)^n$ به ازای مقادیر متوالی n، چند مقدار اول آن را به دست آوردیم و از روی آن‌ها، الگوی موجود را کشف کردیم، برای یافتن ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ نیز این کار را انجام می‌دهیم تا ببینیم چه وضعی پیش می‌آید.

$$(a+b+c)^0 = 1$$
$$(a+b+c)^1 = a+b+c$$
$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = {} & a^2 \\ & +2ab+2ac \\ & +b^2+2ab+c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & 1a^3 \\ & +3a^2b+3a^2c \\ & +3ab^2+6abc+3ac^2 \\ & +1b^3+3b^2c+3bc^2+1c^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 = {} & a^4 \\ & +4a^3b+4a^3c \\ & +6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2 \\ & +4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3 \\ & +b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4\end{aligned}$$

اینک این ضرایب را به شکل هرم مثلث‌القاعده‌ای در شکل (۲) قرار می‌دهیم.

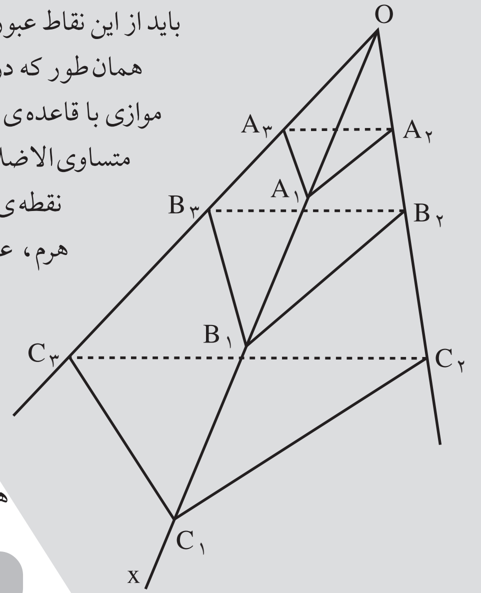


شکل ۲

با دقت در الگوی مثلث خیام، حدس را بر این پایه استوار می‌کنیم که ممکن است الگوی مورد نظر ما، به شکل یک چهار وجهی نامتناهی باشد. اگر فرض کنیم این حدس درست باشد، باید دید که اعداد، چگونه روی این چهار وجهی قرار می‌گیرند. مجدداً با بازنگری بر الگوی مثلث خیام-پاسکال، در می‌یابیم که هر سطر آن ضرایب بسط $(a+b)^n$ برای یک n خاص است. بنابراین حدس می‌زنیم که هر صفحه‌ی موازی قاعده در هرم پاسکال بتواند ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ برای یک n مشخص را در خود جای دهد. البته نه هر صفحه‌ای که موازی قاعده باشد، بلکه اگر فرض کنیم که در شکل(۳) روی یال Ox نقاط C_1, B_1, A_1 به ترتیب به فاصله‌ی یک واحد از هم قرار گرفته باشند، صفحات مورد نظر را باید از این نقاط عبور دهیم.

همان‌طور که در شکل(۳) ملاحظه می‌کنید، نقاط متساوی‌الفاصله روی هر یال، صفحاتی موازی با قاعده‌ی فرضی این چهار وجهی ایجاد می‌کند که طول ضلع هر کدام از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر با یک عدد طبیعی است.

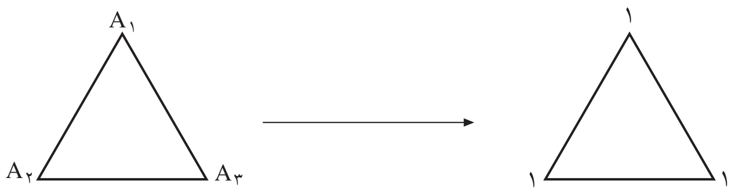
نقطه‌ی O را متناظر با $n=0$ برای بسط $(a+b+c)^n$ در نظر می‌گیریم. یعنی رأس هرم، عدد یک را در خود جای می‌دهد.



شکل۳

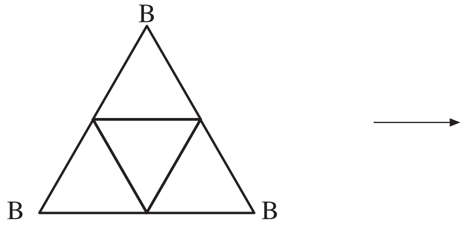
مثلث $\overset{\Delta}{A_1 A_2 A_3}$ را متناظر با $n=1$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که روی هر رأس آن، عدد یک قرار می‌گیرد.

شکل ۴



مثلث $\overset{\Delta}{B_1 B_2 B_3}$ به ضلع ۲ متناظر با $n=2$ می‌باشد(شکل ۵).

شکل ۵



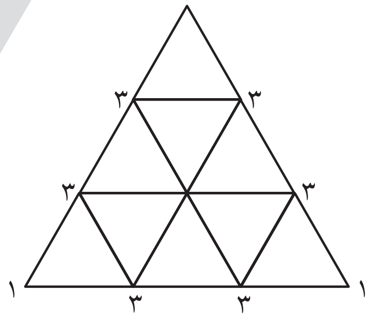
۱

۲ ۲

۱ ۲ ۱

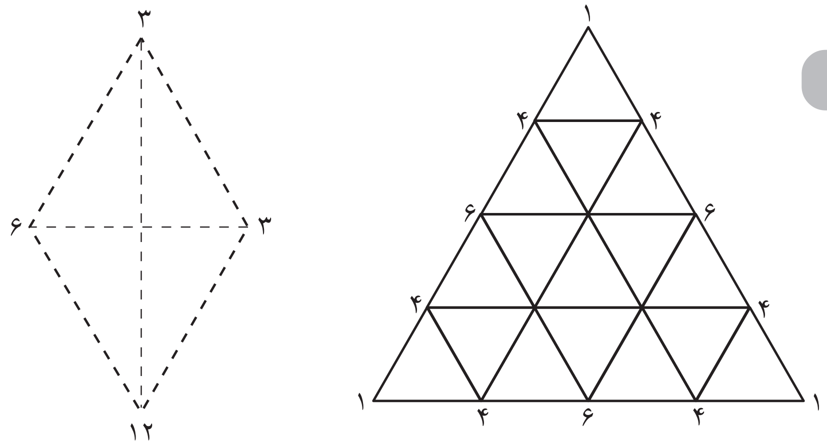
مثلث $\overset{\Delta}{C_1 C_2 C_3}$ به ضلع ۳، متناظر با $n=3$ می‌باشد(شکل ۶).

شکل ۶



به همین ترتیب برای $n = 4$ ، شکل(۷) را داریم(عدد ۱۲ مطابق شکل ، از جمع سه عدد بالاتر به دست آمده است .)

شکل ۷



برای $n = 4$ ، بسط $(a+b+c)^4$ را به صورت زیر در نظر می گیریم و ضرایب را با اعداد موجود در مثلث شکل(۷)، مقایسه می کنیم :

$$(a+b+c)^4 = \underbrace{1a^4}_{\text{رأس مثلث}} + \underbrace{4a^3(b+c)}_{\text{سطر اول مثلث}} + \underbrace{6a^2(b+c)^2}_{\text{سطر دوم مثلث}} + \underbrace{4a(b+c)^3}_{\text{سطر سوم مثلث}} + \underbrace{1(b+c)^4}_{\text{سطر چهارم و آخر مثلث}}$$

با دقت در مثال فوق، با الگوی به دست آمدن هر مثلث می توان آشنا شد. پس می توان $(a+b+c)^n$ را به صورت زیر بسط داد :

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(b+c)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}b^{k-r}c^r$$

همان طور که دیده می شود هر یک از ضرایب بسط ، به شکل $\binom{n}{k}\binom{k}{r}$ می باشد .

$$\begin{array}{ll}
k=0 & \binom{n}{0}\binom{0}{0} \\[4pt]
k=1 & \binom{n}{1}\binom{1}{0} \qquad \binom{n}{1}\binom{1}{1} \\[4pt]
k=2 & \binom{n}{2}\binom{2}{0} \qquad \binom{n}{2}\binom{2}{1} \qquad \binom{n}{2}\binom{2}{2} \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
k=k & \binom{n}{k}\binom{k}{0}\cdots \qquad \binom{n}{k}\binom{k}{r} \quad \binom{n}{k}\binom{k}{r+1} \qquad \cdots\binom{n}{k}\binom{k}{k} \\[4pt]
k=k+1 & \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{0}\cdots \qquad \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1} \qquad \cdots\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k+1}
\end{array}$$

بنابراین می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطه‌ی زیر برقرار است :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}+\binom{n}{k}\binom{k}{r+1}+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}=\binom{n+1}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

برای اثبات، سمت چپ را ساده می‌کنیم :

$$\binom{n}{k}\left(\binom{k}{r}+\binom{k}{r+1}\right)+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{k+1}{r+1}+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

$$=\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)\binom{k+1}{r+1}$$

$$=\binom{n+1}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

با توجه به مطالب مطرح شده، به روش ساده‌تری نیز می‌توان ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ را به دست آورد.

مثال. ضرایب بسط $(a+b+c)^3$ را به دست آورید.

چون در بسط سه جمله‌ای، به تعداد انتخاب‌ها احتیاج داریم، پس کلیه‌ی انتخاب‌ها از ۳ را به دست می‌آوریم :

$$\binom{3}{0},\ \binom{3}{1},\ \binom{3}{2},\ \binom{3}{3}$$

اینک جدول زیر را در نظر می‌گیریم :

$\binom{۳}{۰}$	۱
$\binom{۳}{۱}$	۱ ۱
$\binom{۳}{۲}$	۱ ۲ ۱
$\binom{۳}{۳}$	۱ ۳ ۳ ۱

اعداد ستون چپ را در سطرهای مثلث خیام(اعداد ستون راست) ضرب می‌کنیم :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & ۱ & & & \\ & & ۳ & & ۳ & & \\ & ۳ & & ۶ & & ۳ & \\ ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ \end{array}$$

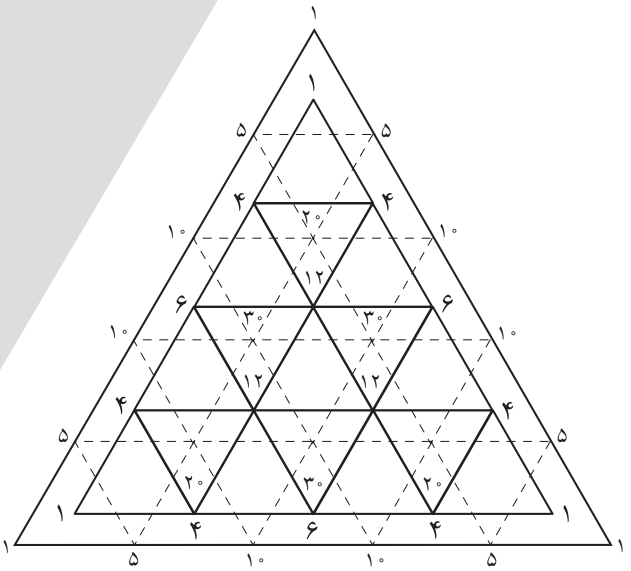
اگر بخواهیم ضرایب $a^k b^r c^{۳-k-r}$ را در بسط $(a+b+c)^۳$ به دست آوریم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم :

k \ r	۰	۱	۲	۳
۳	۱			
۲	۳	۳		
۱	۳	۶	۳	
۰	۱	۲	۲	۱

$$\begin{aligned}(a+b+c)^۳ &= ۱a^۳\\ &+ ۳a^۲c + ۳a^۲b\\ &+ ۳ac^۲ + ۶abc + ۳ab^۲\\ &+ ۱c^۳ + ۳bc^۲ + ۳b^۲c + ۱b^۳\end{aligned}$$

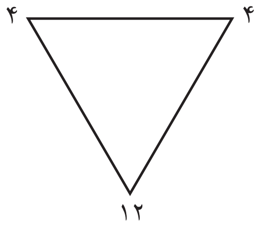
با مثال دیگری، بحث در مورد ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ را به پایان می‌بریم. می‌خواهیم ضرایب بسط $(a+b+c)^۵$ را روی سطح $n=۵$ با استفاده از سطح $n=۴$ قرار دهیم.

اعدادی را که در سطح $n=۵$ قرار دارند با مثلث واقع در سطح $n=۴$ توضیح می‌دهیم. برای این منظور، شکل(۸)را در نظر بگیرید. [۱]

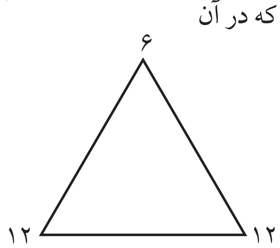


شکل ۸

که در آن



۲۰= ۴+۴+۱۲



۳۰= ۶+۱۲+۱۲

یعنی هر عدد داخل این هرم، جمع سه عددی است که مستقیماً در بالای آن قرار دارند(در مورد اضلاع این مثلث، ۶ + ۴ = ۱۰ و غیره). پس ضرایب بسط $n = ۵$ به صورت زیر خواهد بود:

۱
۵ ۵
۱۰ ۲۰ ۱۰
۱۰ ۳۰ ۳۰ ۱۰
۵ ۲۰ ۳۰ ۲۰ ۵
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

قدم بعدی می‌تواند در این جهت باشد که برای ضرایب بسط $(a+b+c+d)^n$ به ازای مقادیر متوالی n، الگویی پیدا کنیم. الگو عبارت است از یک هرم مربع‌القاعده که رأس آن با یک شروع می‌شود. اولین مقطع افقی با چهار تا ۱ پر می‌شود و به همین ترتیب، همانند هرم مثلث‌القاعده، عمل می‌کنیم. اما باید توجه داشت جمع دو عدد از طبقه‌ی بالا به پایین، باید با بردارهایی موازی یال‌ها صورت گیرد.

$(a+b+c+d)^{۰}$ $n = ۰$ ۱

$(a+b+c+d)^{۱}$ $n = ۱$ ۱ ۱
۱ ۱

$(a+b+c+d)^{۲}$ $n = ۲$ ۱ ۲ ۲ ۱
۲   ۲
۲   ۲
۱ ۲ ۲ ۱

منابع
[۱] مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵ و ۶، بهار و تابستان۱۳۶۴.
[۲] سؤال و راهنمای تصحیح، سازمان پرورش استعدادهای درخشان، ۱۳۷۷/۳/۲.