

مقدمه

ریاضی دانان دارای «شهود»ی در ریاضیات هستند که به آن‌ها کمک می‌کند تا به سرعت، هماهنگی یک نتیجه [گیری] را با یک چارچوب نظری منطقی تشخیص دهند. اما، هنگامی که نتایج در «دنیای واقعی» مورد آزمون قرار می‌گیرند، حتی گاهی شهود ما دچار اشتباه می‌شود. به نظر می‌رسد مسأله این باشد که بعضاً سادگی نمادگذاری، می‌تواند ظاهر اصول زیربنایی را تغییر دهد. بنابراین، با عبارت اولیه‌ی نتیجه‌ای مواجه می‌شویم که از نظر ریاضی کاملاً بدیهی است، ولی در زمینه‌ی زندگی واقعی، بسیار ژرف و تأمل برانگیز است. هدف این نوشتار این است که به چند شکل کاملاً ابتدایی این پدیده، نظری بیفکند. برای این که خواننده، مجالی برای به کارگیری و آزمودن شهود خویش داشته باشد، پاسخ بعضی سؤالات در انتهای مقاله آمده است.

ریاضیات و شهود: پیوندی نامأنوس*

پیتر جی. کازاسا

ترجمه: عبدالله حسام

کارشناس ارشد آموزش ریاضی

بزرگ چقدر بزرگ است؟

ما تقریباً هر روز در مورد چگونگی سرریز شدن زمین از جمعیت، مطلبی می‌خوانیم. بیایید این موضوع را در دنیای واقعی مورد آزمون قرار دهیم. مکعبی به طول ۱۰۰۰ یارد^۱ می‌سازیم. این مکعب، کوچک نیست. طول ضلع آن، به اندازه‌ی طول ۱۰ زمین فوتبال است. در هر حال، ما می‌توانیم تصور کنیم که این ۱۰ زمین فوتبال را پشت سرهم در میان محوطه‌ی دانشگاه قرار داده‌ایم و همین کار را در مورد عرض و ارتفاع انجام دهیم. به این ترتیب، چنین مکعبی به خوبی در میان محوطه دانشگاه ما جای خواهد گرفت. آیا باور می‌کنید که این مکعب می‌تواند همه‌ی مردان، زنان و کودکانی را که روی زمین هستند در خود جای دهد و هنوز هم فضای خالی زیادی داشته باشد؟ اگر همه‌ی جمعیت زمین می‌توانند در جعبه‌ای در میان دانشگاه ما جای گیرند، آیا زمین واقعاً سرریز از سکنه خواهد شد؟ من این مطلب را رها می‌کنم تا درباره‌ی آن بیندیشید.

مسأله‌ی ۱. قطعه کاغذی را برداشته و آن را از وسط تا می‌زنیم. سپس مجدداً آن را تا کرده، دوباره تا بزنید و این کار را ۵۱ مرتبه تکرار کنید. اگر ضخامت متوسط هر ورق کاغذ، ۰/۰۰۳ اینچ^۲ باشد، ارتفاع توده‌ی کاغذ چقدر می‌شود؟

هنگام تدریس در کلاس حسابان، ما اغلب باید نمودار $f(x) = e^x$ را روی تخته سیاه رسم کنیم. هم چنین، می‌دانیم که نمودار «به سرعت بالا می‌رود». اما، دفعه‌ی بعدی که دیدید کسی این

نمودار را روی تخته رسم می‌کند، آن را مطابق مسأله‌ی زیر
بیازمایید:

مسأله‌ی ۲. ارتفاع نمودار e^x وقتی $x = 42^{\text{cm}}$ [واحد]
باشد، چقدر است؟

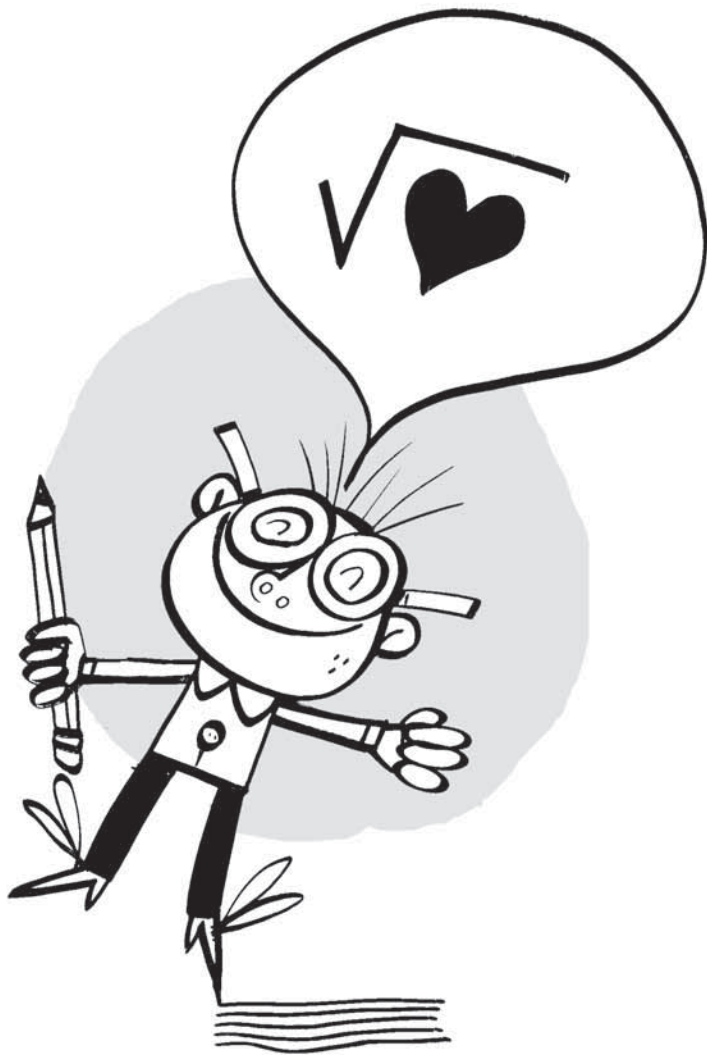
دولت ایالات متحده، در حال حاضر سالانه ۱/۵ تریلیون
دلار [بودجه] مصرف می‌کند. این مبلغ برابر ۱۵۰۰ میلیارد دلار
است. ۳ برای درک عظمت چنین مبلغی، باید ابتدا به بزرگی
میلیارد توجه کنیم. در واقع، یک میلیارد، خود، به‌طور
باورنکردنی بزرگ است. برای مثال، اگر من یک میلیارد دلار
در یک شرکت بد سرمایه‌گذاری کنم و این شرکت هر روز
۱۰۰۰ دلار آن را از دست دهد، پس من باید نگران باشم که
با توجه به هفت روز هفته و ۳۶۵ روز هر سال، آیا پولی برای
زمان بازنشستگی‌ام باقی خواهد ماند؟ اما، من هنوز احساس
خوبی دارم، از آن‌جا که حتی با چنین میزانی [از ضرر]، بالغ بر
۲۰۰ سال طول خواهد کشید تا شرکت، تمام پول مرا از دست
بدهد. از طرف دیگر، اگر من در پوش خودکارم را برداشته و آن
را یک میلیارد برابر بزرگ کنم، در آن صورت طول آن ۹۵۰۰۰
مایل و عرض آن ۸۰۰۰ مایل خواهد شد و همه‌ی کره زمین داخل
آن جای خواهد گرفت (قطر زمین، حدود ۷۹۰۰ مایل است).
در واقع، یک میلیارد چنان عدد بزرگی است که تا ساعت
۱۰:۴۰ صبح بیستم آوریل سال ۱۹۰۲ دقیقاً یک میلیارد دقیقه
از میلاد مسیح گذشته است. امیدوارم که اکنون متقاعد شده
باشید که یک میلیارد به‌واقع، عددی بزرگ است.
با این حال، از آن‌جا که بیش از یک میلیارد راه مختلف برای
پرداخت یک صورت حساب ۵ دلاری وجود دارد، خیلی هم
نمی‌تواند بزرگ باشد.

براساس تاریخ آمریکا، در سال ۱۶۲۶ پیتر مینوت^۴ جزیره‌ی
منهتن را در ازای ۲۶ کالای گرانبها از بومیان آمریکا خرید.
جزیره‌ی منهتن، اکنون یکی از گران‌ترین مستغلات دنیاست.
احتمالاً، ما باید به بومیان آمریکا چیزهای با ارزش‌تری در مقایسه
با ارزش مایملکشان پردازیم. از طرفی، به مسأله‌ی زیر توجه
کنید:

مسأله‌ی ۳. فرض کنید بومیان آمریکا در سال ۱۶۲۶، ۲۶
دلار را در بانکی با نرخ بهره‌ی ۶ درصد سرمایه‌گذاری کرده

باشند. آن‌ها، هم‌اکنون چقدر پول خواهند داشت؟

در مراسم شکرگزاری، ۱۴ نفر از بستگان برای شام در خانه
بودیم. مایک میز طویل با ۱۴ صندلی دور آن را در اتاق نشیمن
قرار دادیم. مادرم به همه گفت که برای شام داخل شده و بنشینند



و همان طور که معمولاً اتفاق می افتد، هر کس که داخل شده و کنار میز می ایستاد، برای تصمیم گیری در مورد جای نشستن دچار تردید می شد. مادرم نگران شد که مبادا در زمانی که میهمانان دور میز گشت می زنند، غذا سرد شود. لذا، من برای او توضیح دادم که نشستن دور یک میز برای ۱۴ نفر، رویه ای واقعاً پیچیده است. در واقع! ۱۴ روش وجود دارد که ۱۴ نفر بتوانند دور یک میز بنشینند (با احتساب دوران ها به عنوان راه های متفاوت و در غیر این صورت، ۱۳!) این عدد، خیلی بزرگ است. برای قرار دادن این مطلب در قالبی مناسب، به مسأله ی زیر پاسخ دهید:

مسأله ی ۴. اگر ۱۴ نفری که دور میز نشسته اند، برخاسته و به طریقی دیگر دور آن بنشینند، سپس برخاسته و دوباره موقعیت را تغییر دهند و دوباره و... و اگر برای هر بار تغییر صندلی ها یک دقیقه به آن ها فرصت بدهیم، چقدر طول می کشد تا آن ها به همه ی طرق ممکن دور میز بنشینند؟

تصور کنید که یک شرکت، برای من قطعه نخى به طول ۲۲۰۰۰ مایل بسازد. این طول، تقریباً برابر با محیط (دور) زمین در استواست. من می خواهم که این نخ را دور زمین بر روی کوه ها، اقیانوس ها و بیابان ها پیچم تا به جایی که از آن شروع کردم ختم شود. متأسفانه، شرکت سازنده اشتباهی کرده است. طول نخ ۳ یارد بلندتر است. از آن جا که نمی خواهم آن را کوتاه کنم، دو سر نخ را به هم گره زده، انگشتانم را زیر آن قرار می دهم و به آرامی آن را دور زمین بازی می کنم تا در فاصله ی یکسانی از همه ی نقاط زمین قرار گیرد. پس از این که ۳ یارد اضافی را به طور یکسان در راستای محیط ۲۲۰۰۰ مایلی زمین گستراندم، نخ در چه فاصله ای از زمین قرار خواهد گرفت؟ احتمالاً، این فاصله بیش از آن است که شما فکر می کنید، زیرا من خواهم توانست که به صورت ایستاده از زیر آن عبور کنم. اکنون، فرض کنید که آن شرکت، برای من تکه نخى یک اینچی را برای پیچیدن دور یک سنگ ریزه بسازد. متأسفانه، شرکت مجدداً اشتباه کرده و برای من نخى را که طول آن ۳ یارد بیش تر است فرستاده است. مانند قبل، من دو سر آن را به هم گره زده، انگشتانم را زیر حلقه ی نخ قرار می دهم و آن را به صورت هم فاصله در تمام نقاط، دور سنگ ریزه بازی می کنم. پس از این کار، نخ در چه فاصله ای از هر نقطه از سنگ می ایستد؟ شگفت است! این نخ، دقیقاً در همان فاصله ای که نخ دیگر از نقاط روی زمین

قرار گرفته، خواهد ایستاد.

مسأله ی ۵. من، سوار بر بالابر اسکی بازان که ۵ مایل در ساعت حرکت می کند هستم و شور و اشتیاق فراوانی دارم. تصمیم می گیرم زمانی که به بالا رسیدم، آن قدر سریع به سمت پایین حرکت کنم که سرعت متوسط رفت و برگشت من، برابر ۱۰ مایل بر ساعت شود. با چه سرعتی باید به سمت پایین برانم؟

بزرگ ترین عددی که می توان با سه رقم از ارقام ۰ تا ۹ نوشت چیست؟ کمی فکر، به عدد

(۱) ۹۹

منجر می شود. متأسفانه، عددی به این عنوان وجود ندارد. این، در واقع به دلیل آن است که

۹(۹۹) ≠ ۹۹

بنابراین (۱) معنایی ندارد. مقداری تفکر ما را به عدد

(۲) ۹(۹۹)

راهنمایی می کند. این عدد، به راستی عدد بزرگی است. به نظر شما، این عدد چقدر بزرگ است؟ خوب، این برابر با ضرب ۹ در خودش به تعداد ۳۸۷۴۲۰۴۸۹ مرتبه است. این عدد، بزرگ تر از تعداد برف دانه هایی است که عصر یخبندان را تشکیل داده اند (که تعداد آن ها یک میلیارد به توان یک میلیارد، تخمین زده شده است). درحقیقت، این عدد، از تعداد کل برف دانه هایی که تا به حال باریده است، بیش تر است. عدد فوق، ۴ میلیون برابر بزرگ تر از «تخمین ادینگتون»^۵ در مورد تعداد الکترون های موجود در جهان است. (آیا شما آقای آرتور ادینگتون [۱۹۴۴] - ریاضی دان، منجم و فیزیک دان انگلیسی را به خاطر می آورید؟ درحقیقت، اگرچه باکتری ها در ابعاد میکروسکوپی هستند، این تعداد باکتری، کهکشانشان راه شیری را پر خواهد کرد.

مسأله ی ۶. فرض کنید من می خواهم عدد (۲) را با ماشین تحریرم تایپ کنم. چه مقدار کاغذ باید بخرم؟

احتمال

مسأله‌ی ۷. هر صبح که من از خواب برمی‌خیزم، چهارلنگه جوراب شل و ول در کشوی من وجود دارد- ۲ تا قرمز و دو تا آبی. من در حالت «خواب‌آلودگی»، ۲ لنگه جوراب را به تصادف پامی‌کنم و به مدرسه می‌روم. چند روز یک‌بار با یک جفت جوراب هم‌شکل به مدرسه می‌روم؟

[illegible]
$$P_n = \frac{(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

ریاضیات و «زندگی واقعی»

دوره ی بیست و پنجم، شماره ی ۴
تابستان ۱۳۸۷

فوت مربع را به دست می دهد. امکان دیگر برای استفاده از همه ی نرده ها، ساختن مستطیلی ۴۴ در ۲ بود که فوت مربع را به دست می داد.

آن ها، به این نتیجه رسیدند که ۸۸ فوت مربع، بهترین است. با آماده شدن برای مطلب، قوطی ای را که روی آن نوشته شده بود «بنزین» به کلاس آورده، آن را روی قطعه نرده ی ۴۴ فوتی ریخته و روی زمین سوزاندم. سپس ۴۸ قطعه ی یک فوتی را برداشته و مربعی دوازده در دوازده با ۱۴۴ فوت مربع مساحت، ساختم. سپس از آن ها پرسیدم که چگونه من، تنها با استفاده از

نصف نرده هایی که آن ها استفاده کردند، حدود دو برابر مساحتی را که آن ها به دست آوردند، پوشاندم؟ پس از مقداری بحث و گفت و گو، آن ها چند واقعیت مهم را درک کردند: (۱) افزایش محیط، همیشه مساحت را افزایش نمی دهد. (۲) باید مراقب بود که به یک مسأله، قید و محدودیتی را که در آن نیست، اضافه نکرد. به عبارتی، من به آن ها نگفتم بوم که مستطیل بسازند؛ یا این که، «همه ی نرده ها» را به کار ببرند. سرانجام، آن ها بر آن شدند که با تقسیم قطعه ی ۴۴ فوتی، به جوابی بهتر از آن چه که من با استفاده از ۴۸ قطعه ی یک فوتی به دست آوردم، برسند.

یک مسأله ی کلاسیک در حسابان، این است که برای به دست آوردن ماکزیمم مساحت بین مستطیل هایی با محیط ثابت، مستطیلی در «کنار رودخانه» که طول آن دو برابر عرض آن می باشد، دارای این ویژگی است. در مورد مثال ما، این به معنای ساختن مستطیلی ۱۲ در ۲۴ فوت با قطعه نرده ی ۴۴ فوتی به عنوان ضلع چهارم است که یک باغچه ی ۲۸۸ فوت مربعی را می دهد. البته، این یک کلاس جبر بود، پس چرا من یک مسأله ی استاندارد حسابان به آن ها دادم؟ در واقع، این یک مسأله ی «احمقانه» در حسابان است. این مسأله را می توان صرفاً با به کارگیری جبر، به راحتی حل کرد و باید از آن طریق حل شود. حسابان، باید برای حل مسأله ای که نیاز به حسابان دارد، به کار گرفته شود. همه ی آن چه که ما باید انجام می دادیم، قرار دادن یک ضلع به عنوان x بود، لذا طول ضلع دیگر $2x - 48$ می شد و سپس مساحت عبارت است از $A(x) = x(48 - 2x)$. حال،



ملاحظه می کنیم که با استفاده از جبر کلاسیک و روش مربع کامل داریم:

$$A(x) = \left(\frac{48}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{48}{4}\right)^2$$

بنابراین، $A(x)$ ، به وضوح زمانی ماکزیمم می شود که ما «کم ترین مقدار را» کم کنیم. (به ویژه، زمانی که صفر را کم کنیم) لذا، ماکزیمم در ازای $x = 12$ اتفاق می افتد. پس، این آخر داستان است. این طور نیست؟ راستش، نه.

مسئله ۹. حداکثر مساحتی که می توانم با نرده هایم پوشش دهم، چقدر است؟

وقتی به پیتزا فروشی می رویم، عموماً پیتزا را از وسط به چند قطعه ی کوچک می برند. چرا این کار را می کنند؟ یک دلیل واضح، این است که این کار همه ی تکه ها را هم اندازه می کند. بنابراین، می توانیم آن را به طور یکسان بین خودمان تقسیم کنیم. اما، اگر فقط دو نفر باشیم، آیا این تنها امکان موجود است؟ خوب، راه های زیادی وجود دارد. یک امکان، انتخاب نقطه ای دیگر، غیر از مرکز و بریدن همه ی تکه ها با زاویه های مساوی از این نقطه است. اگر ما پیتزا را به ۴ قسمت برش دهیم، ممکن است که یکی از تکه ها تقریباً همه ی پیتزا را شامل شود. پس، این روش، خیلی هم خوب کار نمی کند، پس بی ارزش است. تند نروید.

مسئله ۱۰. فرض کنید که ما پیتزا را از «نقطه ای غیر از مرکز» مانند بالا برش دهیم. به صورتی که آن را به ۸ قسمت با زوایای یکسان ببریم. آیا ممکن است که به هر دو نفر ما مقدار مساوی پیتزا برسد؟

حسابان و «دنیای واقعی»

یکی از اولین فرمول های مجموع که ما- عموماً در جبر- می بینیم، رابطه ی زیر است

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (3)$$

به عنوان یکی از کاربردهای این فرمول، می توانیم داستان پادشاه هند و مخترع شطرنج را به یاد آوریم. براساس این داستان، پادشاه به اندازه ای از این اختراع خوشنود شد که به مخترع پیشنهاد کرد که هرچه را در حکومت پادشاهی او می خواهد، طلب کند. مخترع گفت، همه ی آن چه که او می خواهد $1 = 2^0$ دانه گندم برای مربع اول صفحه ی شطرنج، $2 = 2^1$ دانه گندم برای مربع دوم، 2^2 دانه برای سوم و الی آخر، می باشد. پادشاه، از این حرف، حیرت کرد و به وی پیشنهاد کرد که هر چیزی را در حکومت پادشاهی او می خواهد، بطلبد. ولی مخترع، همان «اندک» دانه ی گندم را خواست. با این وجود، در کمال شگفتی، سلطان نتوانست به وعده ی خویش جامه ی عمل بپوشاند. همان طور که می توانیم از (۳) ببینیم، پادشاه $1 - 2^{64}$ دانه گندم به مخترع مدیون بود. این، گندم زیادی است. شما فکر می کنید، چقدر است؟ خوب، این مقدار گندم می تواند تمام سطح زمین را به ارتفاع ۱ اینچ بپوشاند.

یکی از مسأله های مرتبط با این فرمول، «برج های هانوی» نام دارد. گفته می شود که هنگام «خلقت»، خداوند در معبد بزرگ بنارس، صفحه ای برنجی با سه میله ی الماسی در آن، قرار داده است. پس از آن، او ۶۴ دیسک طلایی با قطرهای مختلف (و با سوراخ هایی در مرکزشان) را درون یکی از میله ها چنان قرار داده است که بزرگ ترین آن ها در انتها، دومین دیسک بزرگ، روی آن و به همین ترتیب بقیه روی آن ها قرار گرفته اند. سپس خداوند، به کاهن های معبد گفت که ۶۴ دیسک طلایی را از میله ای که در آن قرار دارند، به میله ی دیگر حرکت دهند، ولی باید از این قوانین پیروی کنند: (۱) هر مرتبه، تنها یک دیسک را می توان حرکت داد. (۲) هیچ گاه نباید دیسک بزرگ تر بر روی دیسک کوچک تر قرار گرفته باشد. زمانی که کاهن ها انتقال دیسک ها را به اتمام برسانند، دنیا به پایان می رسد. من، روزی نگران شدم که مبادا کاهنان، تقریباً وظیفه شان را انجام داده باشند. در این صورت، باید احتمالاً بیمه ی عمر خود را به سرعت افزایش دهم. با این وجود، اندکی تفکر به ما نشان می دهد که کاهنان برای اتمام این کار، نیاز به $1 - 2^{64}$ حرکت دارند (دقیقاً به تعداد دانه های گندمی که پادشاه هند به مخترع شطرنج مدیون بود).

مسئله‌ی ۱۱. اگر ما به کاهنان، برای جابه‌جا کردن هریک از دیسک‌های سنگین، از میله‌ای به میله‌ی دیگر، یک دقیقه فرصت بدهیم، چقدر طول می‌کشد تا وظیفه‌شان را انجام دهند؟

بعد، در حسابان می‌بینیم که اگر $0 \leq r < 1$ ، می‌توانیم در فرمول (۳)، n را به سمت بی‌نهایت میل دهیم تا رابطه‌ی زیر به دست آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

با قرار دادن $r = \frac{1}{4}$ و کم کردن ۱ از دو طرف، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = 1 \quad (4)$$

باید اعتراف کنم که این فرمول، دوست‌داشتنی‌ترین فرمول ریاضی برای من است. از آن می‌توان برای حل تعدادی از مسایل جالب، استفاده کرد. اولین مسئله، مسئله‌ی مشهور «قورباغه و دیوار» است. قورباغه‌ای را در ۱ فوتی دیواری قرار داده و به او می‌گوییم که به اندازه‌ی نصف فاصله‌اش تا دیوار بپرد. سپس دوباره نصف فاصله‌ی باقی‌مانده تا دیوار را بپرد، سپس دوباره نصف راه باقی‌مانده تا دیوار را و همین کار را ادامه دهد. آیا قورباغه هرگز به دیوار خواهد رسید؟ البته که چنین است.

فرمول (۴) علت را به ما می‌گوید. او، در اولین پرش خود $\frac{1}{4}$ فوت، در دومین پرش $\frac{1}{4^2}$ فوت، در سومین پرش $\frac{1}{4^3}$ فوت و... را طی می‌کند. پس با فرمول (۴)، مسافت کل پیموده شده توسط قورباغه ۱ فوت است و فاصله‌ی او از دیوار نیز در شروع ۱ فوت بوده است. شما می‌گویید «اما صبر کنید، او هرگز به دیوار نمی‌رسد زیرا برای همیشه پرش نمی‌کند.» باز هم فرمول مورد علاقه‌ی من، به کمک می‌آید. من به قورباغه می‌گویم که اولین پرش خود را در $\frac{1}{4}$ ثانیه، دومی را در $\frac{1}{4^2}$ ثانیه، و به همین ترتیب انجام دهد. بنابراین، قورباغه می‌تواند همه‌ی پرش‌ها را در ۱

ثانیه تکمیل کرده و به دیوار برسد. هنوز قانع نشده‌اید؟ فرض کنید، من قورباغه‌ای را روی میزی به ارتفاع ۱ فوت قرار داده و او را به پایین رها کنم. آیا شک ندارید که به زمین برخورد خواهد کرد و به سرعت. اما، او چگونه به زمین می‌رسد؟ او ابتدا نصف فاصله تا زمین، سپس دوباره نصف راه باقی‌مانده را و دوباره نصف راه باقی‌مانده و... را طی می‌کند. این، همان کاری است که قورباغه‌ی دیگر انجام می‌دهد؛ این طور نیست؟ شما می‌گویید «خیر. تفاوت عمده‌ای وجود دارد. قورباغه‌ی دیگر در هریک از این نقاط متوقف می‌شود، حال آن‌که این یکی، به طور پیوسته از آن‌ها به سمت زمین حرکت می‌کند.» ولی من می‌توانم مراقب این مسئله باشم. قورباغه‌ی دیگری را نیز هم زمان از روی میز به پایین هول می‌دهم و می‌گویم زمانی که نصف مسیر تا زمین را طی کرد، باید $\frac{1}{4}$ ثانیه توقف کرده، وقتی

نصف دیگر مسیر تا زمین را طی کرد باید $\frac{1}{4^2}$ ثانیه توقف کند و به همین ترتیب، پایین بیاید. کل «زمان توقف» او مجدداً از فرمول مورد علاقه‌ی من، یک ثانیه می‌شود. از این رو، قورباغه‌ی دوم تنها یک ثانیه دیرتر و بعد از قورباغه‌ی اول به زمین می‌رسد؛ در حالی که در هر نقطه نیز توقف داشته است. امیدوارم توانسته باشم شما را قانع کنم که قورباغه می‌تواند به دیوار برسد. جالب است که این مسئله در ۵۵۰ سال قبل از میلاد مسیح، با فرمولی دیگر توسط زنون، در واقع حل شده است.

کاربرد جالب دیگری از فرمول مورد علاقه‌ی من، «پارادوکس سوپر ماشین» است. من یک سوپر ماشین دارم که می‌تواند هر کاری را که به او بگویم، طی مدت زمان مثبتی که برای انجام وظیفه‌اش به آن می‌دهم، انجام دهد. از این رو، من به آن می‌گویم که لامپی را $\frac{1}{4}$ ثانیه روشن کند، $\frac{1}{4^2}$ ثانیه خاموش، $\frac{1}{4^3}$ ثانیه روشن کرده و به همین ترتیب ادامه دهد. در یک ثانیه، سوپر ماشین من، لامپ را به تعداد دفعات نامتناهی خاموش و روشن می‌کند.

مسئله‌ی ۱۲. وقتی سوپر ماشین من کارش را تمام کرد، لامپ روشن است یا خاموش؟

گفتن این که لامپ می‌سوزد، پاسخ قابل قبولی نیست، زیرا

این یک لامپ ریاضی است و لذا هرگز فرسوده نمی شود. این سؤال، یک پارادوکس منطقی است و با به کارگیری سوپر ماشین، شما می توانید هر تعدادی از این گونه پارادوکس ها را بسازید. برای مثال، می توانم به سوپر ماشین بگویم که خانه ی مراد در $\frac{1}{2}$ ثانیه رنگ قرمز، در $\frac{1}{3}$ ثانیه رنگ سبز، در $\frac{1}{4}$ ثانیه رنگ قرمز و... بزند. بعد از یک ثانیه، خانه ی من به تعداد نامتناهی مرتبه، قرمز رنگ و به تعداد نامتناهی مرتبه، سبز رنگ شده است. بالاخره، خانه ام [در پایان] چه رنگی است؟ یا شاید به وسیله ی آن در $\frac{1}{2}$ ثانیه از سنت لوئیس به نیویورک پرواز کرده، در $\frac{1}{3}$ ثانیه برگردم و دوباره به نیویورک بازگردم و... فکر می کنم مطلب را متوجه شدید.

مسئله ی ۱۳. برای خودتان «پارادوکس های سوپر ماشین» بسازید.

چیزی هست که همواره مرا گیج می کند. یکی از اولین مطالبی که به هنگام معرفی سری ها در حسابان تدریس می کنیم، این است که سری هم ساز^۸، واگراست؛ یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

اگر واقعاً مجموع این اعداد به سمت بی نهایت می رود، من باید بتوانم بدون زحمت چندان زیادی آن ها را به وسیله ی کامپیوتر جمع کنم تا به عدد ۱۹۳ برسند.

مسئله ی ۱۴. چقدر طول می کشد تا کامپیوتر من، تعداد کافی از جملات سری هم ساز را جمع کند تا مجموع آن ها به ۱۹۳ برسد؟

بعضی اوقات، [موضوع] به چگونگی نگاه ما به مسئله ای که با شهودمان در تقابل است، بستگی دارد. یک نمونه از این نسخ، پارادوکس باناخ-تارسکی^۹ است. این پارادوکس، در واقع یک قضیه است که توسط باناخ و تارسکی در ۱۹۲۴ اثبات شده است (واگن^{۱۰}، ۱۹۸۵). (حالت خاص) قضیه ی باناخ-

تارسکی می گوید که اگر دو کره ی مفروض A و B در IR^3 را در نظر بگیریم، آن گاه می توان A را به تعداد متناهی قطعه تقسیم کرد و با ایجاد حرکات صلب مشخص و آرایش مجدد، آن را به شکل B درآورد. این مسأله بر روی صفحه، درست به نظر می رسد، تا این که ما آن را با محک دنیای واقعی بیازماییم. فرض کنید من قضیه را در مورد دانه ی نخود فرنگی که در جیبم گذاشته ام و خورشیدمان در منظومه ی شمسی به کار گیرم. من خورشید را به تکه های متناهی می شکم و سپس به این تکه ها آرایشی مجدد می دهم تا نخود داخل جیبم را شکل دهند. آیا من خورشید منظومه ی شمسی را، بدون کشش یا انقباض هیچ قطعه ای از آن، داخل جیب لباسم جای داده ام؟ با نگاه به قبل، این امکان وجود دارد که دانه ی نخود فرنگی را نیز به تعداد زیاد و متناهی تکه برش داد که با یک آرایش مجدد، می توانند تپه ی بزرگی خورشید را تشکیل دهند. چگونه چنین چیزی ممکن است؟ استن واگن (واگن، ۱۹۸۵) می گوید: «من معتقدم که این، عجیب ترین نتیجه در ریاضیات نظری است که ویژگی موهومی بودن ایده ی یک مجموعه ی نامحدود در IR^3 را نشان می دهد.» فرض کنید نمودار تابع $f: [1, \infty) \rightarrow R$ با ضابطه ی

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{را حول محور } x \text{ دوران دهیم. یک شیپور به دست خواهیم آورد که گردنی دراز و نامتناهی دارد. حجم این شیپور را می توانم به سادگی توسط فرمول حجم رویه ی حاصل از دوران در حسابان کلاسیک، به دست آوردم}$$

بنابراین شیپور من، حجمی متناهی به اندازه π واحد حجم (بعد از تقریب مناسب) دارد.

از سوی دیگر، با استفاده از فرمول محاسبه ی سطح رویه ی حاصل از دوران برای به دست آوردن سطح این رویه، خواهیم داشت

$$S = \int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

لذا شیپور من، سطحی نامتناهی دارد. مجدداً، بیابید این مطلب را در دنیای واقعی بیازماییم. شیپور در مقابل من قرار گرفته و دارد زنگ می زند. من فکر می کنم بهتر است آن را رنگ

را برداشته و با شیر ترکیب می‌کنم. آیا مقدار شیر موجود در لیوان آب بیش تر است یا مقدار آب موجود در شیر؟

مسئله‌ی ۱۷. من یک چندوجهی محدب با چگالی غیریکنواخت دارم. برای هر وجه چندوجهی، خطی که از مرکز ثقل جسم به صفحه‌ی شامل آن وجه، عمود شده است را در نظر بگیرید. البته، امکان دارد که این خط از میان وجه عبور نکند. ثابت کنید که حداقل یکی از این خطوط، از درون یک وجه می‌گذرند.

شما می‌توانید با مراجعه به منابع انتهایی مقاله، مطالب بیش تری درباره این مسایل و بسیاری چیزهای دیگر بیابید.

پاسخ به مسایل

پاسخ ۱: توده‌ی کاغذ شما اکنون $۱۰۶'۶۱۹'۳۱۰$ مایل ارتفاع دارد و از خورشید در منظومه‌ی شمسی گذشته است.

پاسخ ۲: تابع e^x در $x = ۴۲$ سانتی متر (واحد) بیش از $۳/۵$ سال نوری ارتفاع دارد و آلفا قنطورس^{۱۱} (نزدیک ترین ستاره به ما در کهکشان راه شیری) را که $۴/۳$ سال نوری با ما فاصله دارد، رد کرده است.

پاسخ ۳: بسیار زیاد. سود حساب آن‌ها در این سال، بیش از یک تریلیون دلار خواهد بود.

پاسخ ۴: آیا باور می‌کنید که بیش از $۱۶۰۰'۰۰۰$ سال وقت می‌گیرد؟

پاسخ ۵: خبر بد! شما هر سرعتی که داشته باشید، نمی‌توانید چنین کاری بکنید. دقت کنید، شما نمی‌توانید سرعت متوسط خود را در سفری که نصف آن را طی کرده‌اید، دو برابر کنید. از آن‌جا که سرعت متوسط برابر با حاصل تقسیم مسافت بر زمان است، اگر شما هم مسافت و هم سرعت خود را دو برابر کنید، زمان باید تغییر نکرده باقی بماند که غیر ممکن است.

پاسخ ۶: شما به کاغذی با طول بیش از ۱۰۰۰ مایل نیاز دارید تا بتوانید این عدد را تایپ کنید.

پاسخ ۷: متأسفانه شما دو روز از هر سه روز جوراب لنگه به لنگه به پا خواهید کرد.

پاسخ ۸: شرکت‌کننده، با انتقال انتخابش به در دیگر، شانس برنده شدن خود را دو برابر می‌کند.

پاسخ ۹: اگر درسی با عنوان حسابان متغیرها بگیرید،

بزنم تا از زنگ زدن محفوظ بماند. پس، به مغازه‌ی محلی رنگ‌فروشی می‌روم تا مقداری رنگ تهیه کنم. به فروشنده می‌گویم که برای جلوگیری از زنگ زدن شیپورم باید آن را رنگ بزنم. او می‌پرسد: «چه سطحی را می‌خواهید رنگ بزنید؟» جواب می‌دهم: «شیپور، سطحی نامتناهی دارد». وی می‌گوید: «شما مشکلی اساسی دارید. این کار، نیاز به مقدار نامتناهی رنگ دارد، و من مطمئناً این قدر رنگ ندارم.» من می‌گویم: «اما حجم شیپور برابر با π واحد است (که می‌دانیم برابر است با $۳/۱۴۱۵۹...$). پس ۴ گالن رنگ به من بفروش تا آن را پر از رنگ کنم. با این کار، از آن در مقابل زنگ زدن محافظت می‌کنم.» فروشنده متحیر شده و می‌گوید «یعنی شما می‌گویید که شیئی را می‌توانید پر از رنگ کنید ولی این [میزان رنگ] نمی‌تواند آن را رنگ کند؟»

مسئله‌ی ۱۵. آیا می‌توانید «تناقض» ظاهر شده در بالا را شرح دهید؟

کمک گرفتن از «دنیای واقعی»

بعضی از مسایل، شکل و قالب ریاضی کاملاً دشواری دارند، اما زمانی که در قالب «دنیای واقعی» قرار می‌گیرند، واقعاً واضح و روشن می‌شوند. یک مثال ساده، مسئله‌ی «بالا و پایین کوه» است. در ساعت ۷ صبح یک روز، من شروع به بالا رفتن از کوهی بلند می‌کنم. حرکت من آهسته است. اغلب، برای استراحت توقف می‌کنم و سرانجام ساعت ۵ بعد از ظهر به بالای کوه می‌رسم. صبح روز بعد، ساعت ۷، من مسیر را به سمت پایین برمی‌گردم. حرکت در این سمت، ساده است و من با سرعت حرکت می‌کنم و ظهر به پایین کوه می‌رسم. آیا می‌توانید نشان دهید که یک نقطه از مسیر هست که هم هنگام بالا رفتن و هم هنگام پایین آمدن، دقیقاً در یک زمان از آن عبور کرده‌ام؟ برای پاسخ به این، ما فقط این دو روز را برهم منطبق می‌کنیم. لذا در ساعت ۷ صبح یکی از ما شروع به بالا رفتن از کوه می‌کند و دیگری از کوه پایین می‌آید (ولی در واقع یک روز دیرتر). مطمئناً ما باید در نقطه‌ای از مسیر یک دیگر را ملاقات کنیم؛ حکم ثابت شد.

مسئله‌ی ۱۶. من دو لیوان دارم. یکی نصفه پر از شیر و دیگری نصفه پر از آب است. من یک قاشق از شیر خالص را برداشته و در آب مخلوط می‌کنم. سپس یک قاشق از این مخلوط

خواهید دید که اثبات می شود که بیش ترین مساحت قابل محصور شدن در درون یک محیط ثابت، به شکل دایره است. بزرگ ترین مساحتی که ما می توانیم با نرده مان پوشش دهیم یک «نیم دایره» است (در واقع نصف یک ۹۶- ضلعی) که از تکه نرده های یک فوتی روبه روی تکه ی ۴۴ فوتی ساخته می شود و تقریباً ۳۶۷ فوت مربع را به دست می دهد. این، بهتر از ۸۸ فوت مربعی بود که با آن شروع کردیم؛ این طور نیست؟

پاسخ ۱۰: اگر ما برش ها را در جهت ساعت گرد از ۱ تا ۸ شماره گذاری کنیم، آن گاه تکه های با شماره فرد و تکه های با شماره ی زوج جمع مساحت یکسان دارند. برای اثبات این مطلب و چند تغییر جالب به (کارتر و واگن، ۱۹۹۴) مراجعه کنید. هم چنین، گاهی این تجربه را در مورد یک «دوست» اجرا کنید و واکنش او را ببینید- و ببینید آیا می توانید او را متقاعد کنید که هر دوی شما در واقع مساحت یکسانی به دست خواهید آورد؟

پاسخ ۱۱: بیش از ۶۰۹'۲۰۶'۴۵۴'۵۸ قرن طول می کشد تا کاهنان، همه ی دیسک ها را از میله ای به میله ی دیگر انتقال دهند. فکر می کنم، من بتوانم بیمه ی عمرم را همان طور که بود، نگه دارم.

پاسخ ۱۲: این یک پارادوکس منطقی درست است. به عبارتی، یک سؤال غیر قابل پاسخ دادن.

پاسخ ۱۳: هر پاسخ درستی، که تصور شما آن را بسازد.

پاسخ ۱۴: اگر کامپیوتر من بتواند ۱ میلیون محاسبه در ثانیه انجام دهد، و به صورت ۶۰ ثانیه در دقیقه، ۶۰ دقیقه در ساعت، ۲۴ ساعت روزانه، ۷ روز در هفته، ۳۶۵ روز در سال و به طور پیوسته ۵ میلیون سال کار کند، تازه به عدد ۱۹۱ خواهد رسید. لذا، آیا سری هم ساز در «دنیای واقعی» واقعاً «واگرا» نیست؟

پاسخ ۱۵: فروشنده، یک اشتباه دنیای واقعی را مرتکب شده است. او فرض کرد که شما برای رنگ کردن یک سطح نامتناهی، به میزان نامتناهی رنگ نیاز دارید. ولی، وی باید به فرمول مورد علاقه ی من رجوع می کرد تا بتواند تمام این سطح نامتناهی را با یک قاشق رنگ، رنگ آمیزی نماید. همه ی آنچه که نیاز به انجامش داشت، در اختیار داشتن سوپر ماشین من بود تا اولین فوت شیپور را با $\frac{1}{p}$ قاشق رنگ (در $\frac{1}{p}$ ثانیه)، فوت بعدی را با

$\frac{1}{p}$ قاشق رنگ (در $\frac{1}{p}$ ثانیه) و... رنگ نماید. بنابراین، وی می توانسته است که تمام شیپور را با ۱ قاشق رنگ و در ۱ ثانیه،

رنگ کند.

پاسخ ۱۶: آن ها دقیقاً یکسان هستند. و حتی اگر من این فرایند را بارها و بارها تکرار کنم، آن ها همیشه یکسان خواهند ماند. به عنوان یک مسئله ی ریاضی، این می تواند کمی ناجور باشد، اما به عنوان یک مسئله در دنیای واقعی، واضح است. چراکه، هر لیوان هنوز همان حجمی از مایع دارد که قبلاً داشت. لذا، هر مولکول شیر در آب، جای یک مولکول آب را گرفته، که باید در شیر باشد.

پاسخ ۱۷: چند وجهی را برداشته و روی زمین می اندازیم. زمانی که از غلطیدن باز ایستاد مرکز جرم باید مستقیماً بالای سر وجهی باشد که روی زمین قرار گرفته است.

زیرنویس ها

* این مقاله، براساس سخنرانی ارایه شده [توسط نگارنده] در دانشگاه میسوری (University of Missouri) در ژانویه ی ۱۹۹۳ و با عنوان «دیوانگی ریاضی» (Mathematical Insanity)، تهیه شده است. ۱. هر یارد تقریباً ۰/۹۱ متر است.

2. 1 inch $\approx$ ۲/۵ cm

۳. حواستان باشد که کلمه ی Billion (به معنی میلیارد)، یک کلمه ی ایتالیایی است که به معنی «میلیون میلیون» می باشد. در آمریکا، این کلمه به غلط برای «هزار میلیون» به کار می رود.

4. Peter Minuet

5. Eddington's Estimate

6. The Price Is Right

۷. این مقاله، در زمانی نوشته شده است که بیل کلینتون، رئیس جمهور کشور آمریکا بوده است.

8. Harmonic Series

9. S. Banach & A. Tarski

10. Wagon

11. Alpha Centurian

مراجع

1. Larry Carter and Stan Wagon; Proof Without Words: Fair Allocation of a Pizza, *Mathematics Magazine*, 67, 1994, page 267.
2. Peter G. Casazza; Paradox Lost, *Alabama Journal of Math.*, Fall 1977, pages 63-73.
3. Peter G. Casazza; Are There Any Uninteresting Natural Numbers? *Alabama Journal of Math.*, Fall 1977, pages 27-38.
4. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" of Cathy Peters); Give Me a Tablespoon of Paint and I will Paint the Whole Universe, *Alabama Journal of Math.*, Fall 1978, pages 33-39.
5. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" Patricia Caldwell). On Pepperoni Pizzas, Ham Sandwiches, and other Important Mathematical Problems, *Alabama Journal of Math.*, Spring 1979, pages 20-25.
6. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" Cora Green); Is Probability Probable? *Alabama Journal of Math.*, Fall 1979, pages 9-17.
7. Peter G. Casazza; Maximizing Areas without Calculus, *Alabama Journal of Math.*, Vol. 7, No. 2, 1984, pages 29-43.
8. L. J. Upton; Problem 660, *Mathematics Magazine*, Vol. 41, 1989, pages 120-122.
9. Stan Wagon; The Banach-Tarski Paradox, *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 24, 1985, Cambridge University Press.