یادآوری بعضی مفاهیم و ریزه‌کاری‌های محاسباتی در ریاضیات مقدماتی (قسمت ۱)

نامساوی‌ها

میرزا جلیلی

هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

درک نامساوی، رابطه‌ی مستقیم با درک مفهوم تساوی دارد. هر گاه k عددی مثبت باشد، همواره داریم

$$x = a \Rightarrow \begin{cases} x - k < a \\ x + k > a \end{cases}$$

یعنی، یک نامساوی از کاستن یک عدد مثبت یا افزودن آن به یک طرف تساوی حاصل می‌شود.

$$۵ + ۲ = ۷ \Leftrightarrow ۵ < ۷$$

در واقع در تعریف نامساوی، از طرف راست هم‌ارزی، به طرف چپ آن می‌رسیم

$$۵ < ۷ \Leftrightarrow ۵ + ۲ = ۷$$

تعریف ۱. هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند، وقتی می‌نویسیم «$a < b$»، یعنی عدد مثبتی مثل k وجود دارد که اگر با a جمع شود b حاصل می‌گردد.

$$a < b \Leftrightarrow a + k = b \ , \ k > ۰$$

نتایج و قراردادها

ـ در ریاضی، $a < b$ و $b > a$ را معادل می‌گیرند و به هر کدام یک نامساوی اکید می‌گویند

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

ـ گاهی نامساوی را به معنای نفی تساوی، یعنی «$\neq$» می‌گیرند و از آن‌جا، تعریف زیر حاصل می‌شود

$$(a < b \text{ یا } b > a) \Leftrightarrow a \neq b$$

ـ معنای $۰ < a$ ، این است که a مثبت است و $a < ۰$ ، بیان می‌کند که a منفی است؛ اگر a مثبت باشد قرینه‌ی آن منفی است، به عبارت دیگر از ضرب عدد -۱ در طرفین یک نامساوی، جهت نامساوی عوض می‌شود

$$a > ۰ \Leftrightarrow -a < ۰$$

تعریف ۲. هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، $a \le b$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$a \le b \Leftrightarrow a < b \text{ یا } a = b$$

و به تسامح، به « » نیز نامساوی می‌گوییم. در این‌جا نیز داریم

$$a \le b \Leftrightarrow b \ge a$$

اصل تثلیث (سه حالتی). هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند، همواره یکی از حالات زیر برقرار است

$$a > b \quad \text{یا} \quad a = b \quad \text{یا} \quad a < b$$

قرارداد خواندن

نامساوی $a \le b$ ، معمولاً به یکی از صورت‌های زیر خوانده می‌شود

ـ a کوچک‌تر یا مساوی b است؛

ـ a نابیش‌تر از b است.

و در مورد $b \ge a$

ـ b بزرگ‌تر یا مساوی a است؛

ـ b ناکمتر از a است.

هم‌چنین

ـ $a \ge ۰$ ، یعنی a نامنفی است؛

ـ $a \le ۰$ ، یعنی a نامثبت است.

تعریف ۳. نفی، $a < b$ ، را به صورت $a \nless b$ ، نشان داده چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \nless b \Leftrightarrow (b > a \qquad b = a) \\ a \nless b \Leftrightarrow b \geq a \end{cases}$$

یا

هم‌چنین داریم

$$a \nleq b \Leftrightarrow a > b$$

خواص نامساوی

خاصیت تقارن در نامساوی‌ها برقرار نیست، یعنی $a < b$ ، نتیجه نمی‌دهد که $b < a$ ؛ یا از $a \leq b$ ، نتیجه نمی‌شود که $b \leq a$ (البته با فرض $a \neq b$).

در عوض **خاصیت پادتقارنی** در نامساوی‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است

$$(a \leq b, b \leq a) \Rightarrow a = b$$

توجه داشته باشید این خاصیت در نامساوی‌های اکید، برقرار نیست.

$$(a < b, b < a) \nRightarrow a = b$$

خاصیت ترایایی (یا تعدی)

برای هر سه عدد حقیقی a، b و c، خاصیت ترایایی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\begin{cases} a < b, b < c \Rightarrow a < c \\ a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \end{cases}$$

کاربردهای محاسباتی خاصیت ترایایی

در محاسبات حدی ما معمولاً از خاصیت ترایایی به‌صورت‌های زیر استفاده می‌کنیم

الف. در یک نامساوی مثل «$x<y$» اگر به جای x مقداری کوچک‌تر قرار دهیم جهت نامساوی ثابت می‌ماند

$$(x < y, a < x) \Rightarrow a < y \qquad (1)$$

مثلاً، در محاسبه‌ی حد تابع حقیقی $y = \frac{1}{x+3}$ در بی‌نهایت، وقتی ضمن محاسبات به نامساوی $\frac{2}{x} < \varepsilon$ می‌رسیم، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$(\frac{2}{x+3} < \frac{2}{x}, \frac{2}{x} < \varepsilon) \Rightarrow \frac{2}{x+3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y < \frac{\varepsilon}{2}$$

ب ـ در یک نامساوی مثل $y > x$ ، اگر به جای y مقدار بزرگ‌تری قرار دهیم، جهت نامساوی ثابت می‌ماند

$$(y > x, a > y) \Rightarrow a > x \qquad (2)$$

مثلاً در محاسبه‌ی حد تابع حقیقی $y = \frac{2}{\sqrt{x-5}}$ ، وقتی ضمن محاسبه به نامساوی $\frac{7}{\sqrt{x-2}} > \varepsilon$ می‌رسیم، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$(\frac{7}{\sqrt{x-5}} > \frac{7}{\sqrt{x-2}}, \frac{7}{\sqrt{x-2}} > \varepsilon) \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x-5}} > \varepsilon$$

$$\Rightarrow y > \frac{2\varepsilon}{7}$$

که گزاره‌های (۱) و (۲) در تمرین‌های الف و ب بالا، هر دو بیان‌کننده‌ی خاصیت ترایایی هستند. هم‌چنین دیدید که وقتی مخرج کسر بزرگ می‌شود، کسر کوچک می‌گردد و اگر مخرج کوچک شود، کسر بزرگ خواهد شد.

تشخیص فوری مثبت یا منفی بودن مقادیر عددی بعضی از عبارات جبری

دانش‌آموز باید نامساوی‌های زیر را در آستین داشته باشد:

$$a^2 \geq 0 ؛ -a^2 \leq 0 ؛ (a-b)^2 = (b-a)^2 \geq 0$$

$$-(a-b)^2 \leq 0 ؛ (x \pm 1)^2 \geq 0$$

هم‌چنین توجه داشته باشید که

$$x^2 + 1 > 0 ؛ x^4 + 1 > 0 ؛ \sin^2 x + 1 > 0 ؛ x^2 \pm xy + y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 0 ؛ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq 0$$

قضیه. ثابت کنید عبارت $x^2 + xy + y^2$ به ازای هر مقدار x و y، نامنفی است.

اثبات. از طرف چپ چنین می‌نویسیم:

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\left[2x^2 + 2xy + 2y^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x^2 + y^2)\right]$$

که داخل کروشه، مجموع دو مقدار نامنفی است که نامنفی می‌شود و حکم ثابت است.

اینک شما نامساوی را برای سه حرف با همین روش ثابت کنید

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zy \geq 0$$

توجه به نکات زیر شما را در سرعت محاسبات یاری می‌دهد:

$$(a \ge 1) \Rightarrow \begin{cases} a^2 \ge a \\ a^3 \ge a^2 \\ \dots \\ a^n \ge a^{n-1} \end{cases} \quad \text{و} \quad (0 < a < 1) \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a \\ a^3 < a^2 \\ \dots \\ a^n \le a^{n-1} \end{cases}$$

مثلاً هر یک از اعداد $\sqrt{2}-1$، $\sqrt{3}-1$، $\sqrt{10}-3$، ... از یک کوچک‌ترند. لذا داریم:

$$(\sqrt{2}-1)^2 < \sqrt{2}-1 \;,\; (\sqrt{3}-1)^2 \le \sqrt{3}-1 \;\dots$$

هم‌چنین در مورد علامت مقدار عددی عبارت‌های جبری، لازم است بدانید که هرگاه x و y دو عدد حقیقی باشند، همواره:

ـ علامت $\frac{x}{y}$، میان علامت xy است (در واقع اگر P(x) و Q(x) دو چند جمله‌ای باشند، علامت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ همان علامت P(x).Q(x) است)؛

ـ اگر، $xy > 0$ (یا $\frac{x}{y} > 0$) و x مثبت باشد، آن‌گاه y هم باید مثبت باشد؛

ـ از فرض، $xy < 0$ (یا $\frac{x}{y} < 0$) و x مثبت نتیجه می‌شود که y منفی است؛

ـ از فرض $xy > 0$ (یا $\frac{x}{y} > 0$) و x منفی نتیجه می‌شود که y هم منفی است.

تمام این گزاره‌ها، از جدول ضرب علائم نتیجه می‌شوند:

×	+	−
+	+	−
−	−	+

مثلاً $(x-1)(x^2+1) > 0$ یا $\frac{x+1}{x^2+xy+y^2} > 0$، بلافاصله حکم می‌کنیم که $x-1 > 0$ یا $x+1 > 0$ و حدود x را فوری محاسبه می‌کنیم.

چند مثال

مثال۱. کسر $\frac{-a}{x-a}$، چه موقع (یا با چه شرطی) مثبت است؟

حل. طبق مطالب بحث شده در بالا، باید $-a(x-a) > 0$، یعنی

$$\begin{cases} -a > 0 \;,\; (x-a) > 0 \\ -a < 0 \;,\; (x-a) < 0 \end{cases} \text{یا}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a < 0 \;,\; x > a \\ a > 0 \;,\; x < a \end{cases} \text{یا}$$

مثال۲. برای چه مقدار x، عبارت $\frac{x^3-1}{x^2+9}$، منفی است؟ (تعیین مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{x^3-1}{x^2+9}$).

حل. می‌نویسیم

$$\frac{x^3-1}{x^2+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+9}$$

که دو عبارت x^2+x+1 و x^2+9، مثبت هستند. لذا برای منفی بودن کسر تنها لازم است $x-1<0$ یا $x<1$.

مثال۳. ثابت کنید $-\frac{1}{2} \le \frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$ (تعیین برد تابع حقیقی $y = \frac{x}{x^2+1}$).

حل. داریم:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \ge 0 \\ (x+1)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \ge 0 \\ x^2 + 2x + 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 1 + x^2 \\ -2x \le 1 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{x}{1+x^2} \ge -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

با مقایسه‌ی (۱) و (۲)، حکم ثابت می‌شود. هم‌چنین نتیجه می‌شود که برد تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x}{x^2+1}$، بازه‌ی $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ است.

مثال۴. ثابت کنید $-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$، (تعیین برد تابع حقیقی $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

حل. داریم:

$$\frac{x^۲}{۱+x^۲}<۱ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} -۱<\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}<۱$$

در نتیجه برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ بازه‌ی $[-۱,۱]$ است.

دو مثال اخیر نشان می‌دهد که محاسبه‌ی برد توابع، اغلب به محاسبات روی نامساوی‌ها می‌رسد (در بخش‌های بعدی این مقاله، درباره‌ی حل نامعادله‌ی $x^۲ > a$ بحث خواهد شد).

نامساوی مضاعف

نامساوی‌های مثال‌های ۳ و ۴، نامساوی‌های مضاعف خوانده می‌شوند. به‌طور کلی اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، به عبارت «$a<b<c$» یک نامساوی مضاعف گفته می‌شود و آن را چنین تعریف می‌کنند:

$$a<b<c \Leftrightarrow a<b\ ,\ b<c$$

از ضرب عدد ۱− در نامساوی $a<b<c$، نامساوی دیگری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}-۱\times(a<b<c) &\Leftrightarrow -۱\times(a<b\ ,\ b<c)\\ &\Leftrightarrow(-۱\times a<b\ ,\ -۱\times b<c)\\ &\Leftrightarrow(-a>-b\ ,\ -b>-c)\\ &\Leftrightarrow -c<-b<-a\end{aligned}$$

در نتیجه

$$a<b<c \xrightarrow{\text{ضرب در ۱−}} -c<-b<-a$$

مثلاً در محاسبه‌ی جزء صحیح x−، $[-x]$، از این نامساوی استفاده می‌شود.

$$-۳<-x<-۱ \Leftrightarrow ۱<x<۳$$

هم‌چنین

$$a\le b<c \xrightarrow{\text{ضرب در ۱−}} -c\le -b\le -a$$

تعریف کرانه‌ی بالا و کرانه‌ی پایین و میانگین: در نامساوی مضاعف $a\le x\le b$، عدد a را کرانه‌ی پایین و b را کرانه‌ی بالای x می‌خوانند. هم‌چنین مقدار $\frac{a+b}{۲}$ را میانگین یا عدد میانی بین a و b می‌نامند و همیشه داریم:

$$a\le b \Leftrightarrow a\le \frac{a+b}{۲}\le b$$

قضیه. ثابت کنید با فرض $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و مثبت بودن b و d همواره داریم

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

اثبات.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad<bc$$

$$\xrightarrow{\text{به طرفین اضافه کنیم}}\begin{cases}ad+ab<bc+ab\\ ad+dc<bc+dc\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a(b+d)<b(a+c)\\ d(a+c)<c(b+d)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a\cancel{(b+d)}}{b\cancel{(b+d)}}<\dfrac{\cancel{b}(a+c)}{\cancel{b}(b+d)}\\[2mm] \dfrac{\cancel{d}(a+c)}{\cancel{d}(b+d)}<\dfrac{c\cancel{(b+d)}}{d\cancel{(b+d)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}\\[2mm] \dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

که به ازای $b=d=۱$، مقدار میانگین حاصل می‌شود.

نکات دیگر در محاسبات یا نامساوی‌ها

الف ـ به نامساوی‌های زیر توجه کنید، در آن‌ها قانون حذف مخرج از طرفین نامساوی ارایه شده است.

$$\begin{cases}a>۰\ ,\ \dfrac{x}{a}<\dfrac{y}{a}\Leftrightarrow x<y\\[2mm] a<۰\ ,\ \dfrac{x}{a}<\dfrac{y}{a}\Leftrightarrow x>y\end{cases}$$

قوانین مشابه برای حذف a در طرفین نامساوی $x<y$ نیز برقرار است.

$$\begin{cases} a > ۰ ,\ \ x < y \Leftrightarrow ax < ay \\ a < ۰ ,\ \ x < y \Leftrightarrow ax > ay \end{cases}$$

لذا در نامساوی‌هایی نظیر

$$\frac{۲x}{x-۲} \le \frac{۲}{x-۲}$$

نمی‌توان فوری مخرج‌ها، یعنی $x-۲$، را از طرفین حذف کرد مگر آن‌که علامت آن تعیین شود. در واقع، اولین شرط این است که $x \neq ۲$.

ب ـ اعمال مجاز در اتمام محاسبات در دو نامساوی:

از دو تساوی $a = b$ و $c = d$ نتیجه می‌شود:

$$ac = bd \ \text{ و } \ a \pm c = b \pm d \ \text{ و } \ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

که به‌وفور در حل معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی در مورد نامساوی‌های هم‌جهت، جز در مورد جمع، در سایر حالات یا قانون برقرار نیست یا همراه با شروط است:

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} a + c = b + d \ ;$$

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} a - c < b - d \ ;$$

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$$

در مورد ضرب هم باید b و c مثبت باشند.

قضیه. ثابت کنید هرگاه a، b، c و d اعداد حقیقی و b و c مثبت باشند، از $a < b$ و $c < d$ داریم:

$$ac < bd$$

اثبات. با توجه به این‌که $c > ۰$ و $b > ۰$ می‌نویسیم:

$$c > ۰ ,\ \ a < b \Rightarrow ac < bc$$
$$b > ۰ ,\ \ c < d \Rightarrow bc < bd$$

و طبق خاصیت ترایایی، $ac < bd$.

ج ـ قانون طرفین وسطین کردن در نامساوی‌ها

در تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌گویند و همواره داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

یعنی حاصل‌ضرب طرفین برابر با حاصل‌ضرب وسطین است.

آیا خاصیت مشابه در نامساوی $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$، نیز وجود دارد یا نه؟ به مطالب زیر توجه کنید:

اگر $bd > ۰$، یعنی b و d هم‌علامت باشند، این قانون برقرار است؛ زیرا می‌توان طرفین نامساوی طرف چپ را عدد مثبت bd ضرب کرد بدون آن‌که جهت آن تغییر کند.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \cancel{b}d.\frac{a}{\cancel{b}} < b\cancel{d}.\frac{c}{\cancel{d}}$$
$$\Rightarrow ad < bc$$

اگر b و d مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه $bd < ۰$ و از ضرب طرفین نامساوی در bd، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$(bd < ۰, \frac{a}{b} < \frac{c}{d}) \Rightarrow ad > bc$$

مثلاً در حل نامعادله‌ی

$$\frac{x}{x-۱} < \frac{۳}{x-۲}$$

نمی‌توان فوری نوشت $x(x-۲) < ۳(x-۱)$ مگر آن‌که شرط $x-۲ > ۰$ یا $x > ۲$ وجود داشته باشد.

دـ عمل معکوس کردن در نامساوی‌ها

در تساوی‌ها، هرگاه a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند، داریم:

$$a = b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۱}{b}$$

آیا چنین خاصیتی در نامساوی‌ها هم برقرار است؟

$$a < b \Rightarrow \frac{۱}{a} ? \frac{۱}{b}$$

هرگاه جملات طرفین نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) از معکوس کردن جملات طرفین، جهت آن عوض می‌شود،

$$(ab > ۰, a < b) \Leftrightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$$ (از دو طرف برقرار است)

زیرا

$$a < b \xRightarrow{\text{تقسیم بر ab مثبت}} \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{b} < \frac{۱}{a} \quad \Rightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$$

اگر جملات طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، یعنی $ab < ۰$، از معکوس کردن جملات طرفین، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$(ab<۰, a<b) \Leftrightarrow \frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$$

برای اثبات، طرفین را بر ab منفی تقسیم کنید و مثل حالت قبل، نتیجه بگیرید.
مثلاً:

$$\begin{cases} ۲<۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۲}<۳ \Rightarrow -۲<\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

در حالت: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$؛ اگر b و d هم‌علامت باشند، یعنی $bd>۰$ و c و d مختلف‌العلامه باشند، یعنی $cd<۰$ و یا $\frac{bd}{cd}<۰$، خواهیم داشت:

$$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$$

زیرا کافی است طرفین نامساوی را در $\frac{bd}{ac}$ مثبت ضرب کرد.

در غیر این حالات، عمل معکوس کردن باید با حساب و احتیاط صورت گیرد.

توجه کنید که بسیاری از این قوانین، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی اعداد گویا روی محور اعداد، با استنتاج‌های ساده‌تر نیز قابل حصول است. مثلاً در حالتی که $a<b$ و a و b مختلف‌العلامه هستند، واضح است که باید a منفی و b مثبت باشد، پس $\frac{۱}{a}$ نیز منفی و $\frac{۱}{b}$ نیز مثبت است و لذا $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$.

مثال ۵. مطلوب است حل نامعادله‌ی

$$\frac{۲}{۲\varepsilon+۱}>\frac{۱۰}{۶+۵\varepsilon}$$

(ε اپسیلون یک عدد بسیار کوچک مثبت است.)

حل. مخرج‌ها مثبت است، لذا طرفین نامساوی را معکوس کرده، جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$\frac{۲\varepsilon+۱}{۲}<\frac{۶+۵\varepsilon}{۱۰}$$

$$۱۰\varepsilon+۵<۶+۵\varepsilon \Rightarrow \varepsilon<\frac{۱}{۵}$$

مثال ۶. مطلوب است حل نامعادله‌ی

$$\frac{۱}{۳\varepsilon-۱}>\frac{۶}{۱۲\varepsilon-۵}$$

حل. در این جا، مخرج‌ها منفی است (چون ε یک عدد بسیار کوچک مثبت است)، لذا عمل معکوس کردن همراه با تغییر جهت صورت می‌گیرد.

$$\frac{۳\varepsilon-۱}{۱}<\frac{۱۲\varepsilon-۵}{۶}$$

$$۱۸\varepsilon-۶<۱۲\varepsilon-۵ \Rightarrow \varepsilon<\frac{۱}{۶}$$

به توان رساندن نامساوی‌ها

الف- هرگاه a و b دو عدد مثبت و n طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه داریم:

$$a<b \Rightarrow a^n<b^n$$

مثلاً از $a<b$ نتیجه می‌شود $a^۲<b^۲$.

ب- اگر a و b هر دو منفی و n زوج باشد جهت نامساوی عرض می‌شود.

$$(a,b<۰, a<b)\Rightarrow a^۲>b^۲$$

مثلاً از $-۵<-۳$ نتیجه می‌شود $۲۵>۹$ یا از $-\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۹}$.

ج- در $a<b$، هرگاه، a منفی و b مثبت باشد و $|b|>a$، در مجذور کردن جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر $|b|<a$، جهت آن عوض می‌شود.

$$\begin{cases} -۳<۵ \Rightarrow ۹<۲۵ \\ -۷<۲ \Rightarrow ۴۹>۴\end{cases}$$

د- اگر a و b دو عدد حقیقی و n طبیعی و فرد باشد، بدون هیچ گونه شرطی، جهت نامساوی در به توان n رساندن طرفین نامساوی، ثابت می‌ماند.

$$a<b \Rightarrow a^۳<b^۳$$

نامساوی‌ها و بازه‌ها

هرگاه کروشه را برای بازه‌ی بسته و پرانتز برای باز به‌کار ببریم، دو دسته قراردادهای زیر را داریم:

$$\begin{cases} x\le a \Leftrightarrow x\in(-\infty,a] \\ x< a \Leftrightarrow x\in(-\infty,a) \\ x\ge a \Leftrightarrow x\in[a,+\infty) \\ x> a \Leftrightarrow x\in(a,+\infty) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} a\le x\le b \Leftrightarrow x\in[a,b] \\ a\le x< b \Leftrightarrow x\in[a,b) \\ a< x\le b \Leftrightarrow x\in(a,b] \\ a< x< b \Leftrightarrow x\in(a,b) \end{cases}$$

مفاهیم ماکزیمم و می‌نیمم و نامساوی‌ها

وقتی می‌نویسم، $x\le a$، یعنی x از a کوچک‌تر بوده ماکزیمم مقدار آن برابر a است.

- وقتی می‌نویسیم $x\ge a$، یعنی x بزرگ‌تر از a بوده می‌نیمم مقدار آن برابر a است.

- وقتی می‌نویسیم $b\le x\le a$، یعنی ماکزیمم x، برابر a و می‌نیمم آن، b می‌باشد.

- در محاسبه‌ی کسری نظیر $\frac{c}{x}$، هرگاه داشته باشیم $a\le x\le b$، آن‌گاه:

الف- اگر به جای x، ماکزیمم آن یعنی b قرار دهیم، کسر کوچک می‌شود: $\frac{c}{b}<\frac{c}{x}$.

ب- اگر به جای x، می‌نیمم آن یعنی a قرار دهیم، کسر بزرگ می‌شود: $\frac{c}{a}>\frac{c}{x}$.

چند نامساوی مهم

۱. مجموع یک عدد مثبت و معکوس بزرگ‌تر یا مساوی ۲، است.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ۲ \qquad a,b>۰ \qquad (۱)$$

که حالت خاص آن

$$\begin{cases} a+\frac{۱}{a}\ge ۲\ ,\ a>۰ \\ a+\frac{۱}{a}\le -۲\ ,\ a<۰ \end{cases}$$

می‌باشد.

اثبات. می‌نویسیم:

$$(a-b)^۲\ge ۰ \Rightarrow a^۲+b^۲\ge ۲ab \xRightarrow{\text{تقسیم بر } ab} \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ۲$$

۲. **نامساوی برنولی.** هرگاه $۰<۱+a$، همواره داریم:

$$(۱+a)^n\ge ۱+na$$

۳. **نامساوی کوشی و شوارتز.** که برای n عدد نیز قابل تقسیم است.

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲)^۲\le(a_۱+a_۲)(b_۱+b_۲)$$

۴. **نامساوی حاصل‌ضرب مجموع دو عدد در مجموع معکوس آن‌ها.** به نامساوی‌های زیر و هم‌چنین تعداد جملات در پرانتز اولی توجه کنید:

۲ جمله: $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\ge ۲^۲$

۳ جمله: $(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})\ge ۲^۳$

$\vdots \qquad \vdots$

n جمله: $(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n})\ge ۲^n$

دو نامساوی پر کاربرد: ۷۷

الف)

$$x^۲<a^۲ \Leftrightarrow -a\le x\le a \Leftrightarrow x\in[-a,a]$$

مثلاً

$$x^۲\le ۳ \Leftrightarrow -\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳} \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}\right]$$

ب)

$$x^۲\ge a^۲ \Leftrightarrow x\ge a\ ,\ x\le -a \Leftrightarrow x\in[a,+\infty)\cup(-\infty,-a]$$

مثلاً

$$x^۲\ge ۲ \Leftrightarrow (x\le -\sqrt{۲}\ ,\ x\ge\sqrt{۲}) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{۲}\right]\cup\left[\sqrt{۲},+\infty\right)$$