افکار گنگ

مارتی راس
مترجم: حمیدرضا وهابی، دانشگاه آزاد اسلامی اسلام‌شهر

حال به اعدادی می‌رسیم که عجیب و گنگ و نامنظم‌اند، انگار که هیچ خاصیت خوبی ندارند، آن‌چنان غیرعادی‌اند که توضیح و فهم ماهیتشان غیرممکن به‌نظر می‌رسد؛ حتی گاهی عدد بودن چنین موجوداتی نیز انکار می‌شود...
ایساک بارو[1] (۱۷۳۴)

با مشهورترین عدد گنگ شروع می‌کنیم:

$\sqrt{۲}$

می‌دانیم که این عدد به‌طور طبیعی به‌عنوان وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌هایی به طول ۱ ظاهر می‌شود. گنگ بودن $\sqrt{۲}$ حدود ۵۰۰سال قبل از میلاد توسط فیثاغورسیان[2] با رسوایی آشکار شد. ریاضیات و فلسفه‌ی آن‌ها بر پایه‌ی اعداد طبیعی و نسبت‌های عددی کوچک بود، و لذا این کشف می‌توانست خیلی دردسرآور باشد. به‌علاوه فیثاغورسیان تنها افرادی نبودند که به‌ظهور اعداد گنگ واکنش بد نشان دادند.

تقریباً همه‌ی اثبات‌های گنگ بودن $\sqrt{۲}$، یک برهان خلف دارد. فرض کنید $\sqrt{۲}$ گویا باشد، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n} \qquad (۱)$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. سپس، با استفاده از برخی روش‌های کلی محاسباتی، نشان می‌دهیم که

$$\sqrt{۲} = \frac{m_۱}{n_۱}$$

که این کسر جدید به نوعی ساده‌تر است (مثلاً $m_۱$ کوچکتر از m است، یا $n_۱$ کوچکتر از nاست، یا هردو برقرارند). با تکرار این عمل،

$$\sqrt{۲} = \frac{m_۲}{n_۲}$$

و سپس،

$$\sqrt{۲} = \frac{m_۳}{n_۳}$$

و به همین ترتیب، هربار عبارت گویای ساده‌تری برای $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید. اما واضح است که این عمل را نمی‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد. بالاخره، صورت یا مخرج مساوی با ۱ خواهد شد، یا به حالت پوچ مشابهی خواهیم رسید. و این همان تناقض است. این فرض که می‌توانیم عبارت (۱) را بنویسیم، به همراه روش کلی ساده‌کردن کسر، به ناچار به یک تناقض؛ به تساوی‌ای که مطمئنیم نادرست است، منجر شد. تنها نتیجه‌ی ممکن این است که (۱) غیرممکن است، یعنی در واقع $\sqrt{۲}$ گنگ است.

این شکل ظاهری برهان است، ولی اکنون باید روشی برای ساده‌کردن کسرها ارائه دهیم، و این همان قسمتی است که برهان‌های مختلفی برای آن ارائه می‌شود. معمولاً، و احتمالاً آن‌چه که فیثاغورسیان انجام دادند، برهانی است که وابسته به عوامل m و n می‌باشد[3]:

بنابر(۱)، $m^۲ = ۲n^۲$، پس $m^۲$ و در نتیجه m زوج است. پس می‌توانیم بنویسیم $m = ۲k$. در نتیجه $۴k^۲ = ۲n^۲$ و لذا

$n^۲ = ۲k^۲$. پس $n^۲$ و در نتیجه n زوج است . بنابراین در (۱) هر دو عامل m و n زوج هستند و لذا یک عامل ۲ را می‌توانیم از صورت و مخرج حذف کنیم تا به یک کسر ساده‌تر برسیم . البته این عمل همواره بدون ایجاد تناقض انجام می‌شود، مثلاً $\frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$ ، ولی $\frac{۳}{۴}$ را نمی‌توان بیش‌تر از این ساده کرد . تناقض ایجاد شده از (۱) بدین دلیل است که عمل ساده‌کردن کسرها را می‌توان به‌طور مداوم ادامه داد .

در این‌جا ما برهان دیگری را ارائه می‌کنیم که شهرت کمتری دارد ولی به نوعی ساده‌تر است، زیرا به تشخیص عوامل m و n بستگی ندارد :

بنابر (۱)، $m^۲ = ۲n^۲$ ، پس

$$n < m < ۲n \qquad (۲)$$

اکنون $\sqrt{۲}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۲-\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-۱} = \frac{۲n-m}{m-n} = \frac{m_۱}{n_۱}$$

اما بنابر (۲)،

$$۲n < ۲m \Rightarrow ۲n - m < m \Rightarrow m_۱ < m$$

پس صورت (و مشابهاً مخرج) کسر جدید، از صورت (و مخرج) کسر قبلی، کوچک‌ترند و ما به تناقض مورد نظر رسیدیم .

پیش از معرفی و بررسی دیگر اعداد گنگ، بیایید لحظه‌ای روی یک پرسش اساسی، که تا کنون آن را نادیده گرفته‌ایم، فکر کنیم :

یک عدد گنگ دقیقاً چیست؟

توجه کنید که ماهیت $\sqrt{۲}$ فقط از نظر هندسی برای ما مشخص شد، ولی از نظر عددی، فقط نشان دادیم که $\sqrt{۲}$ چه چیزی نمی‌تواند باشد، نه این‌که چه‌چیزی هست . پاسخ استاندارد سؤال فوق، پاسخی صحیح ولی غیرمفید است :

یک عدد گنگ، یک عدد اعشاری نامختوم غیر مکرر است.

چگونه می‌توان اعداد اعشاری نامختوم را ضرب یا تقسیم کرد؟ یا حتی چگونه می‌توان بسط اعشاری کامل یک عدد دلخواه را به‌دست آورد؟ به عنوان مثال، هیچ‌کس نمی‌داند بسط اعشاری کامل $\sqrt{۲}$ چیست. آری، یک عدد گنگ دقیقاً چیست؟ واقعاً این سؤالی بسیار عمیق است. بالاخره، در قرن نوزدهم پاسخ قانع‌کننده‌ای به این سؤال داده شد. در مقام مقایسه، عدد مختلط $i = \sqrt{-۱}$، که معمولاً در هاله‌ای از ابهام در نظر گرفته می‌شود، خیلی آسان‌تر از $\sqrt{۲}$ قابل تعریف است؛ و در حدود سال ۱۸۰۰ ماهیت آن به روشنی درک شد. واقعاً فیثاغورسیان حق داشتند که به زحمت بیفتند. ما در این مقاله به دنبال تعریف دقیق ماهیت اعداد گنگ نیستیم. در واقع ما بدون مراجعه به تعریف دقیق اعداد گنگ، می‌توانیم به یافتن مثال‌های دیگری از این گونه اعداد ادامه دهیم. به عنوان مثال، گزاره‌ی زیر به شیوه‌ی دیگری بیان می‌کند که $\sqrt{۲}$ گنگ است:

هیچ عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود ندارد به‌طوری که $۲ = (\frac{m}{n})^۲$.

کافی است در هر برهانی که گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را نشان می‌دهد، به جای $\sqrt{۲}$ کسر $\frac{m}{n}$ را با فرض $۲ = (\frac{m}{n})^۲$ قرار دهیم.

جستجویمان را برای یافتن سایر اعداد گنگ ادامه می‌دهیم. عدد $\sqrt{۲}$ در واقع یک عدد گنگ جبری است (یک عدد را جبری می‌نامیم در صورتی که ریشه‌ی یک معادله با ضرایب گویا باشد؛ عددی را که جبری نباشد، عدد متعالی می‌نامیم). طبیعی است که در مسیر جستجوی اعداد گنگ، در این مرحله با سایر اعداد گنگ جبری مانند $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$، $\sqrt{n}$، $\sqrt[۳]{n}$ و غیر مواجه می‌شویم. اثبات گنگ بودن این گونه اعداد، مشابه برهان $\sqrt{۲}$، با یک ترفند جبری ساده امکان‌پذیر است. البته واضح است که همه‌ی این گونه اعداد گنگ؛ مثلاً $\sqrt{۹}$ گنگ نیستند. با وجود این‌که در دنیای اعداد گنگ جبری ظاهراً همه‌چیز روشن است، ولی موانعی هم وجود دارد. به‌عنوان مثال این سؤال را در نظر بگیرید: اگر a و b گنگ باشند، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که a^b نیز گنگ است؟ شاید تصور کنید که پاسخ مثبت است، ولی چنین نیست. مثال زیر همراه با برهان جالبی که دارد، نشان می‌دهد که پاسخ سؤال فوق منفی است:

عدد $(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}$ را در نظر بگیرید.

$$(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}.\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$$

$\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ یا گویاست یا گنگ است. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، قرار می‌دهیم $a = b = \sqrt{۲}$. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد، قرار می‌دهیم $a = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$. پس در هر صورت، نمونه‌ای یافته‌ایم، لیکن واقعاً نمی‌دانیم آن عدد چیست؟ در مثال فوق دیدیم که حتی بدون دانستن ماهیت دقیق یک عدد مانند $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$، می‌توان آن را مورد استفاده قرار داد. در واقع در سال ۱۹۳۰، ر. کوزمین[۴] ثابت کرد که $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ است. جدید بودن برهان نشان می‌دهد که اثبات گنگ بودن یک عدد چقدر می‌تواند سخت باشد. در واقع وقتی پا را از ریشه‌های nام اعداد و تعمیم‌شان یعنی ریشه‌های معادلات چند جمله‌ای فراتر می‌نهیم، با اعدادی نظیر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ مواجه می‌شویم؛ که می‌توان گفت اثبات گنگ بودن این گونه اعداد تقریباً همیشه سخت است. آری، می‌بینید که چگونه می‌توان تعریف‌های مشکل را در زیر نقابی از علامت‌گذاری‌های ساده مخفی کرد. تعریف دقیق اینکه یک عدد به توان یک عدد گنگ می‌رسد چیست؟ در ادامه، مثال‌های بیش‌تری از اعدادی را ارائه می‌دهیم که گنگ بودن آن‌ها تا کنون ثابت نشده است.

اکنون جهان اعداد جبری را ترک می‌کنیم و به دنیای اعداد متعالی وارد می‌شویم. ابتدا عدد مشهور زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{e}$$

قبل از اثبات گنگ بودن e، ابتدا باید تعریف دقیق این عدد را بیان کنیم. برخلاف $\sqrt{۲}$، چندین تعریف هم‌ارز برای e وجود دارد. اولین تعریف به حدود سال ۱۶۰۰ میلادی برمی‌گردد؛ که به‌صورت زیر است:

$$e = \lim_{n\to\infty} (۱+\frac{۱}{n})^n \qquad (۳)$$

این تعریف معمولاً در امور مالی و مباحث مربوط به بهره‌ی مرکب پیوسته ظاهر می‌شود. تعریف دیگری که اغلب در

مطالعه‌ی حسابان از آن استفاده می‌شود، معرفی تابع $f(x)=e^x$ و سپس تعریف عدد e به‌صورت $e=f(1)$ است. البته در این رهیافت فقط سؤال ما تغییر می‌کند: پایه‌ی تابع $f(x)=e^x$ چه خاصیت ویژه‌ای دارد؟ در حقیقت برای هر پایه‌ی دلخواه a، یک عدد ثابت M وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{d}{dx}(a^x)=Ma^x$$

حال ما می‌توانیم عدد یکتای e را به‌صورت زیر تعریف کنیم: پایه‌ای که به ازای آن $M=1$ می‌شود را عدد e می‌نامیم. یعنی

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad (4)$$

تعریف‌های (۳) و (۴) معادل‌اند.

در اینجا ما عدد e را به‌صورت سری نامتناهی زیر تعریف می‌کنیم:

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \qquad (5)$$

(۵) از (۳) نتیجه می‌شود. ابتدا بسط عبارت $(1+\frac{1}{n})^n$ را با استفاده از فرمول دوجمله‌ای می‌نویسیم

$$(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}(\frac{1}{n})^k$$

$$=\binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

(۵) از (۴) نیز نتیجه می‌شود. برای اثبات این مطلب، ابتدا بسط مکلورن تابع $f(x)=e^x$ را حول نقطه‌ی $x_0=0$ به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}_{(0)}}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^0}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

در نتیجه

$$e=f(1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

قضیه‌ی زیر با استفاده از تعریف (۵) ثابت می‌شود.

قضیه (اویلر[5], ۱۷۳۷): e گنگ است.

برهان. مشابه $\sqrt{2}$، اثبات گنگ بودن e نیز با استفاده از برهان خلف انجام می‌شود. فرض کنید e گویا باشد، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$e=\frac{m}{n} \qquad (6)$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. بنابر (۵)،

$$en!=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots$$

در نتیجه بنابر (۶)،

$$\frac{m}{n}n!-n!-\frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}-\cdots-\frac{n!}{n!}=\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots \qquad (7)$$

نشان می‌دهیم که طرف راست (۷)، بین صفر و یک است.

$$0 < \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

آخرین عبارت یک سری هندسی است که مجموع آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع} = \frac{\text{جمله اول}}{\text{قدر نسبت}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

در نتیجه طرف راست (۷)، بین صفر و یک است؛ در حالی که طرف چپ(۷) یک عدد صحیح است. این تناقض نشان می‌دهد که e یک عدد گنگ است.

اگرچه تعریف (۵) به سال ۱۶۶۵ و ایزاک نیوتن[۶] برمی‌گردد، ولی برهان فوق در سال ۱۸۱۵ توسط ژوزف فوریه[۷] ارائه شد.

برهان اصلی اویلر بر پایه‌ی بسط کسر مسلسل[۸] وی برای $\frac{e-1}{2}$ می‌باشد.

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}}$$

کسر مسلسل فوق در واقع نشان می‌دهد که مقدار $\frac{e-1}{2}$ برابر با حد دنباله‌ی زیر است

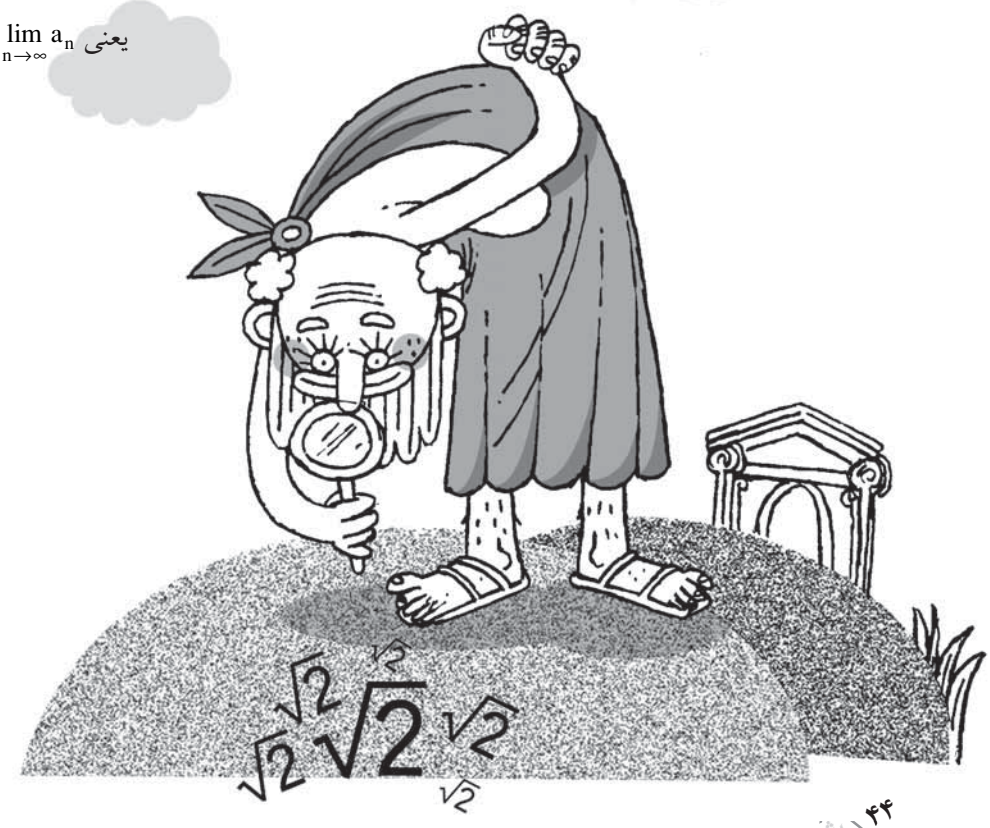
$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1}, a_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{6}{7}, a_4 = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10}}} = \frac{61}{71}, \cdots$$

یعنی $\frac{e-1}{2} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

در حقیقت هر عدد دلخواه یک بسط کسر مسلسل ساده دارد. به‌عنوان مثال،

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

بسط $\sqrt{2}$ را به سادگی می‌توان اثبات کرد ولی اثبات بسط e کار بیش‌تری را می‌طلبد. واضح است که یک کسر مسلسل متناهی (یعنی کسر مسلسلی که در آن از مرحله‌ای به بعد صورت‌ها مساوی صفرند)، یک عدد گویاست. برعکس، اویلر ثابت کرد که هر کسر مسلسل ساده‌ی نامتناهی، گنگ است.



به‌ویژه $\frac{e-1}{2}$ و در نتیجه e گنگ است.

مبحث عدد e را با بیان این که به‌ازای هر عدد صحیح ناصفر m، عدد e^m نیز گنگ است، به پایان می‌رسانیم. واضح است که این مطلب در مورد $\sqrt{2}$ صدق نمی‌کند، زیرا $(\sqrt{2})^2 = 2$. اثبات گنگ بودن e^m از اثبات گنگ بودن e مشکل‌تر است؛ روش فوریه در این مورد کارساز نیست. یوهان لامبرت[9] گنگ بودن e^m را در سال ۱۷۶۶ با استفاده از کسرهای مسلسل اثبات کرد. به‌عنوان نتیجه‌ای از این مطلب ثابت می‌کنیم که مثلاً $\mathrm{Ln}2$ گنگ است:

اگر $\mathrm{Ln}2$ گویا باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ln}2 = \frac{m}{n}$ که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. تساوی $\mathrm{Ln}2 = \frac{m}{n}$ معادل $e^m = 2^n$ است، که با گنگ بودن e^m متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $\mathrm{Ln}2$ یک عدد گنگ است. اینک، مثال دیگری از یک عدد گنگ داریم که به توان یک عدد گنگ می‌رسد و حاصل یک عدد گویا می‌شود؛ $e^{\mathrm{Ln}2} = 2$.

اکنون به درخشان‌ترین ستاره در آسمان اعداد گنگ می‌نگریم:

π

به‌طور طبیعی عدد π به‌عنوان نسبت محیط یک دایره به قطرش تعریف می‌شود. ولی، برخلاف $\sqrt{2}$، این تعریف هندسی فوراً تبدیل به داده‌های عددی نمی‌شود. هزاران سال است که انسان‌ها در جست‌وجوی فرمول‌ها و تخمین‌های دقیق‌تری برای محاسبه‌ی عدد π هستند. جدول زیر، بخشی از تاریخچه‌ی تخمین‌های عددی π را نشان می‌دهد. (جدول مقابل)

شاید از دیدن عدد ۴ در جدول فوق به عنوان مقدار π تعجب کرده باشید. موضوع مربوط می‌شود به یک رویداد احمقانه که در سال ۱۸۹۷ رخ داد. شخصی به‌نام ادواردگودوین[22]، که می‌توان گفت افکارش خارج از دایره‌ی منطق بود، نمایندگان مجلس سنای ایالت ایندیانا را قانع کرد که چاپ یک اسکناس به ارزش π را به تصویب برسانند. این اسکناس عجیب قرار بود شامل شش شکل هندسی برای بیان مقدار π باشد. ولی قبل از این که نمایندگان مجلس سنا در مورد این موضوع رأی‌گیری کنند، یک ریاضی‌دان در مورد عدد π به آن‌ها توضیح داد و آن‌ها را از این کار منصرف کرد.

سؤال کلی‌تر دیگری ممکن است در مورد جدول فوق مطرح شود: آیا افرادی که به محاسبه‌ی مقدار π پرداخته‌اند، به این نکته واقف بوده‌اند که عددی را که به‌دست آورده‌اند صرفاً یک مقدار تقریبی است، نه یک مقدار دقیق؟ یقیناً ارشمیدس این را می‌دانست؛ ولی در مورد افراد قدیمی‌تر، این موضوع واضح نیست.

سؤال. فرض کنید هشت تریلیون رقم اول π را بدانیم. چه چیزی می‌تواند به ما بگوید که π گویاست یا خیر؟

جواب. یقیناً هیچ چیز.

تمایل به محاسبه‌ی مقدار π در طول تاریخ ریاضیات موجب کشف تعداد زیادی فرمول‌های زیبا شده است. روش ارشمیدس شاید یکی از جالب‌ترین روش‌ها برای محاسبه‌ی π باشد. روش وی براساس محاسبه‌ی محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و

زمان	مقدار تقریبی π	شخص یا مکان
۲۰۰۰ سال قبل از میلاد	$3\frac{1}{8}$	بین‌النهرین[10]
۲۰۰۰ سال قبل از میلاد		مصر[11]
۱۲۰۰ سال قبل از میلاد	$(\frac{16}{9})^2$	چین[12]
۵۵۰ سال قبل از میلاد	۳	کتاب عهد عتیق[13]
۲۵۰ سال قبل از میلاد	۳	ارشمیدس[14]
۲۶۳ میلادی	بین $3\frac{10}{71}$ و $3\frac{1}{7}$	لیوهوی[15]
۱۴۲۹ میلادی	۳٫۱۴۱۵۹	غیاث‌الدین جمشید کاشانی[16]
۱۷۰۶ میلادی	۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹	جان میشن[17]
۱۸۵۳ میلادی	تا ۱۰۰ رقم اعشار	ویلیام شنکس[18]
۱۸۹۷ میلادی	تا ۵۰۰ رقم اعشار	ایالت ایندیانا[19]
۱۹۵۸ میلادی	۴	ژنیوس[20]
۱۹۹۵ میلادی	تا ۱۰۰۰۰ رقم اعشار تا ۶ میلیارد رقم اعشار	یاسوماسا کانادا[21]

محیطی یک دایره‌ی واحد، یعنی در واقع محاسبه‌ی مقدار تقریبی 2π، بود. چون هم از چند ضلعی‌های محاطی و هم از چند ضلعی‌های محیطی استفاده کرد، توانست تقریب‌های پایینی و بالایی π را به‌دست آورد. او برای به‌دست آوردن تقریب‌های دقیق‌تر، در هر مرحله تعداد اضلاع را دوبرابر می‌کرد. اساساً فرمول‌های سینوس و تانژانت نصف زاویه که ما امروزه برای محاسبه‌ی محیط چندضلعی‌های منتظم به‌کار می‌بریم، براساس روش ارشمیدس استوار است. او با یک ۶ـضلعی منتظم شروع کرد و بالاخره به یک ۹۶ـضلعی رسید، ولی از لحاظ تئوری، این روش را با هر درجه‌ای از دقت می‌توان به‌کار برد. با حدگیری از محیط چندضلعی‌های محاطی، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 3\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

چند ضلعی‌های منتظم و فرمول‌های نصف زاویه توسط فرانسوا ویت[23] نیز به‌کار برده شدند. وی در سال ۱۵۷۹، مساحت این چندضلعی‌ها را محاسبه کرد و با استفاده از یک ترفند جبری هوشمندانه، حاصل ضرب نامتناهی زیر را به‌دست آورد

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots$$

با استفاده از حسابان پیشرفته، می‌توانیم مقدار π را به شکل یک حد مستقیم‌تر به‌دست آوریم. مساحت دایره‌ی واحد یعنی π به‌صورت زیر قابل بیان است

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

حال با محاسبه‌ی تقریبی انتگرال فوق می‌توان فرمول حدی مستقیمی برای π به‌دست آورد. مثلاً، می‌توانیم عبارت زیر انتگرال یعنی $\sqrt{1-x^2}$ را با استفاده از قضیه‌ی دوجمله‌ای بسط دهیم و سپس جمله به جمله انتگرال بگیریم. در سال ۱۶۶۶، نیوتن با استفاده از این ایده و با به‌کار بردن انتگرالی که کمی متفاوت با انتگرال فوق بود، سری زیر را به‌دست آورد

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \cdots\right)$$

بسط توابع معکوس مثلثاتی[24]، ایده‌ی دیگری است که ریاضی‌دانان بارها برای محاسبه‌ی π از آن استفاده کرده‌اند. اولین فرمول از این نوع را که یک ریاضی‌دان آماتور هندی در قرن پانزدهم کشف کرد، در واقع همان بسط مشهور $\text{arctg}\,1$ است

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

در این‌جا به دو فرمول زیبای دیگر نیز می‌توان اشاره کرد: یکی حاصل ضرب نامتناهی زیر که در سال ۱۶۵۵ توسط جان‌والیس[25] کشف شد

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots$$

و دیگری سری نامتناهی زیر که در سال ۱۷۳۴ توسط اویلر کشف شد

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

هر دو فرمول از بررسی خواص تابع سینوس حاصل می‌شوند.

با وجود این‌که همه‌ی فرمول‌های فوق زیبا هستند، ولی واضح نیست که تا چه حد می‌توانند به ما برای اثبات گنگ بودن π کمک کنند. یقیناً ساختار حدی این گونه فرمول‌ها به تنهایی، نمی‌توانند ما را به نتیجه‌ی مطلوب برسانند. شاید فکر کنید با تقلید از برهان گنگ بودن e بتوان برهانی برای گنگ بودن π ارائه کرد؛ ولی به‌دست آوردن یک سری برای π که مثل سری e به اندازه‌ی کافی مرتب و سرراست باشد، خیلی سخت است. حتی گنگ بودن e^m را نیز نمی‌توان با استفاده از چنین روش‌هایی اثبات کرد. سری جالب زیر را که با استفاده از تئوری تابع تتا در

سال ۱۹۱۴ توسط سرینی واسا رامانوجان[۲۶] کشف شد، در نظر بگیرید

$$\frac{۱}{\pi}=\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲n!}{n!n!}\right)^{۳}\frac{۴۲n+۵}{۲^{۱۲n+۴}}$$

حتی سری فوق که ظاهراً مشابه سری e مفید به‌نظر می‌رسد، نمی‌تواند در اثبات گنگ بودن π به‌ما کمک کند.

رهیافت طبیعی دیگری که برای اثبات گنگ بودن π به ذهن می‌رسد، یافتن یک کسر مسلسل ساده برای π است. اگرچه جملاتی از چنین کسری را می‌توان یکی یکی با استفاده از بسط اعشاری π مشابه $\sqrt{۲}$ ساخت، ولی کسر مسلسل ساده‌ی کامل π هنوز کشف نشده است. کسرهای غیرساده‌ی زیادی برای π وجود دارد، اولین آن‌ها که نتیجه‌ای از فرمول حاصل‌ضرب والیس است در سال ۱۶۵۵ توسط ویلیام برونکر[۲۷] کشف شد

$$\frac{۴}{\pi}=۱+\cfrac{۱^{۲}}{۲+\cfrac{۳^{۲}}{۲+\cfrac{۵^{۲}}{۲+\cdots}}}$$

به هرحال چنین کسرهایی لزوماً گنگ نیستند.

در واقع، برهان اصلی گنگ بودن π که توسط لامبرت در سال ۱۷۶۶ ارائه شد، براساس کسرهای مسلسل است، ولی در آن از یک روش معکوس جالب استفاده شده است. لامبرت ابتدا کسر مسلسل تابعی زیر را به‌دست آورد

$$\mathrm{tg}x=\cfrac{۱}{\left(\frac{۱}{x}\right)-\cfrac{۱}{\left(\frac{۳}{x}\right)-\cfrac{۱}{\left(\frac{۵}{x}\right)-\cdots}}}$$

سپس ثابت کرد که اگر زاویه‌ی x گویا باشد، آن‌گاه این کسر مسلسل باید گنگ باشد. اما $\mathrm{tg}\frac{\pi}{۴}=۱$ گویاست، پس $\frac{\pi}{۴}$ و در نتیجه π باید گنگ باشد.

اصولاً، برهان لامبرت یک برهان ظریف و زیباست؛ ولی اثبات تمام مراحل آن کار زیادی را می‌طلبد[۲۸]. به همین دلیل ما در این‌جا برهان جالبی از ایوان نیون[۲۹] برای اثبات گنگ بودن π آورده‌ایم. انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I=\int_{۰}^{۱}P(x)\sin\pi x\,dx \quad (۸)$$

که در آن $P(x)=x^{N}(۱-x)^{N}$ و N یک عدد صحیح (بزرگ) است که بعداً انتخاب خواهد شد. توجه کنید که در نقاط انتهایی، $P(x)=۰$. در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری به‌روش جزء به جزء،

$$I=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۱}P'(x)\cos\pi x\,dx$$

اکنون $P'(x)=Nx^{N-۱}(۱-x)^{N}-Nx^{N}(۱-x)^{N-۱}$ و هم‌چنان در نقاط انتهایی، $P'(x)=۰$. مجدداً با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء،

$$I=-\frac{۱}{\pi^{۲}}\int_{۰}^{۱}P''(x)\sin\pi x\,dx$$

که در آن

$$P''(x)=N(N-۱)x^{N-۲}(۱-x)^{N}-N^{۲}x^{N-۱}(۱-x)^{N-۱}$$
$$-N^{۲}x^{N-۱}(۱-x)^{N-۱}+N(N-۱)x^{N}(۱-x)^{N-۲}$$

و هم‌چنان در نقاط انتهایی، $P''(x)=۰$، مجدداً با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء،

$$I=-\frac{I}{\pi^{۳}}\int_{۰}^{۱}P'''(x)\cos\pi x\,dx$$

انتگرال‌گیری را به همین روش ادامه می‌دهیم. مشتق‌های متوالی $P(x)$ را نیز با استفاده از قاعده‌ی ضرب مشتق توابع به‌دست می‌آوریم. در مشتق‌های مراتب بالاتر $P(x)$، تعداد جملات بیش‌تر و بیش‌تر خواهد شد و تمام جملات در نقاط انتهایی هم‌چنان صفر خواهند بود. برای این‌که در یکی از مشتق‌های مراتب بالاتر $P(x)$ جمله‌ای حاصل شود که در یکی از نقاط انتهایی، ناصفر باشد، باید از x^{N} یا $(۱-n)^{x}$ حداقل N بار

مشتق گرفته باشیم. در نتیجه در جمله‌ی مذکور یک عامل $N!$ خواهیم داشت. از طرف دیگر برای محاسبه‌ی کامل انتگرال (۸)، باید $2N$ بار عمل انتگرال گیری را انجام دهیم؛ زیرا از آن‌جا که درجه‌ی چند جمله‌ای $P(x)$ مساوی $2N$ است، دقیقاً بعد از $2N$ بار مشتق گیری از آن، تمام جملاتش در نقاط انتهایی ناصفر خواهند شد. باتوجه به مطالب فوق،

$$I=\frac{k_1N!}{\pi^{N+1}}+\frac{k_2N!}{\pi^{N+2}}+\cdots+\frac{k_{N+1}N!}{\pi^{2N+1}} \qquad (9)$$

که در آن k_1، k_2، ... و k_{N+1} اعداد صحیح‌اند.

تا این‌جا هیچ تناقضی وجود ندارد. حال فرض کنید π یک عدد گویا باشد. در نتیجه $\pi=\frac{m}{n}$، که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. با ضرب کردن دو طرف تساوی (۹) در کسر $\frac{m^{2N+1}}{N!}$ خواهیم داشت

$$\frac{m^{2N+1}}{N!}I=k \qquad (10)$$

که در آن k یک عدد صحیح است.

N را می‌توانیم آن‌قدر بزرگ انتخاب کنیم که $0<\frac{m^{2N+1}}{N!}<1$. هم‌چنین $0<I<1$، زیرا هر جمله در انتگرال (۸) بین صفر و یک است. بنابراین طرف چپ تساوی (۱۰) بین صفر و یک است، در حالی که طرف راست آن یک عدد صحیح است. این تناقض نشان می‌دهد که π یک عدد گنگ است.

اثبات فوق در واقع شکل تغییر یافته‌ی برهان اصلی ایوان نیون است که توسط چارلز هرمیت[30] ارائه شده است. از روش بالا برای اثبات گنگ بودن اعداد دیگری مانند e^m نیز می‌توان استفاده کرد. برهان فوق را با کمی دقت بیش‌تر می‌توان برای اثبات گنگ بودن π^2 نیز به‌کار برد، ولی اثبات گنگ بودن توان‌های بالاتر π سخت‌تر است. با روشی مشابه برهان فوق، حتی می‌توان نشان داد که π ریشه‌ی هیچ معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا نیست، یعنی در واقع π یک عدد متعالی است. خاصیت متعالی بودن از خاصیت گنگ بودن قوی‌تر است. مثلاً عدد $1+\sqrt{2}$ گنگ است ولی متعالی نیست، زیرا ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ است. اثبات متعالی بودن یک عدد از اثبات گنگ بودن آن بسیار دشوارتر است.

حال، در پایان این مقاله به معرفی برخی از اعداد می‌پردازیم که گرچه به احتمال زیاد گنگ‌اند ولی تا کنون این مطلب در مورد آن‌ها ثابت نشده است. روش‌های زیادی برای ترکیب اعداد گنگ و ساختن اعداد جدید وجود دارد، ولی معلوم نیست که حاصل کار همیشه گنگ باشد. به‌عنوان مثال گنگ بودن اعداد

$$\pi+e,\pi e,\pi^e$$

هنوز ثابت نشده است. شاید تصور کنید که عدد e^π نیز چنین است، ولی در سال ۱۹۲۹ الکساندر گلفاند[31] ثابت کرد که این عدد گنگ است. با وجود این، تساوی $e^\pi=(-1)^{-i}$، نشان می‌دهد که عدد e^π در دنیای اعداد مختلط، عددی کاملاً معمولی است. نکته‌ی دیگری که در این‌جا باید ذکر شود این است که اگرچه گنگ بودن $\pi+e$ و πe هنوز ثابت نشده است، ولی نشان دادن این‌که حداقل یکی از آن‌ها باید گنگ باشد، آسان است. کافی است معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-(\pi+e)x+\pi e=0$ را درنظر بگیرید، که گویا نیست. پس یکی از اعداد $\pi+e$ یا πe باید گنگ باشند.

اعداد جالبی نیز با استفاده از تابع زتای ریمان[32] به‌دست می‌آیند

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \qquad s=2,3,4,\cdots$$

ما قبلاً مقدار این تابع به ازای $s=2$، که توسط اویلر به‌دست آمده است، یعنی $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ را دیده‌ایم. اویلر هم‌چنین نشان داد که $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$. در حالت کلی مقادیر این تابع به‌ازای sهای زوج به‌صورت زیر می‌باشند

$$\zeta(2n)=a_n\pi^{2n}$$

که در آن a_nها گویا هستند. a_nها را اعداد برنولی[33] می‌نامند. ثابت شده است که همه‌ی $\zeta(2n)$ها گنگ‌اند. $\zeta(2n+1)$ها خیلی مرموزترند. برای مدتی طولانی، هیچ‌کس

واقعاً ایده‌ای برای محاسبه‌ی مقادیر تابع زتای ریمان به ازای sهای فرد نداشت. وقتی که در سال ۱۹۷۸، گنگ بودن $\zeta(3)$ توسط یک ریاضی‌دان غیرمشهور به‌نام روجر آپری[34] ثابت شد، همه دچار حیرت شدند. گنگ بودن $\zeta(5)$ و مقادیر پس از آن تاکنون ثابت نشده است.

برای ارائه‌ی آخرین مثال خویش، ابتدا توجه کنید که $\zeta(1)$ را چیزی جز ∞ نمی‌توان تعریف کرد، زیرا سری هارمونیک(هم‌ساز)[35] $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ همگرا نیست. ولی اگر Lnk را به شیوه‌ای صحیح از آن کم کنیم، به یک مقدار متناهی γ، موسوم به ثابت اویلر[36] می‌رسیم:

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\mathrm{Lnk}\right)$$

گنگ بودن γ نیز تاکنون ثابت نشده است. مانند سایر اعدادی که در این مقاله ملاحظه کردید، دانستن این‌که γ گویاست یا گنگ، شاید فایده‌ی کاربردی خاصی نداشته باشد؛ ولی ریاضی‌دانان برای روشن شدن مرزهای تاریک دانش همیشه در جستجوی پاسخ چنین سؤالاتی هستند. **و این‌بار، ثابت اویلر، شکار بزرگ جویندگان اعداد گنگ است.**

زیرنویس‌ها

1. Isaac Barrow

2. Pythagoreans

۳. این‌که برخی از نتایج ریاضی را بتوانیم به‌صورت حتمی به فیثاغورسیان نسبت دهیم، خیلی مشکل است و این کار در مورد خود فیثاغورس غیرممکن است. ولی آگاه بودن فیثاغورس از گنگ بودن $\sqrt{2}$، عموماً مورد توافق همگان می‌باشد. به‌هرحال، با وجود این‌که روش اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ توسط فیثاغورسیان بر پایه‌ی رده‌بندی اعداد به‌صورت زوج و فرد بوده است، ولی ب. ل. وان دروردن [۱] و والتر بورکیت [۲، ص۴۳۶] مخالفت‌های بحث برانگیزی در مورد احتمال این‌که فیثاغورسیان از چنین روشی استفاده کرده‌اند، داشته‌اند.

4. R.Kuzmin

5. Euler

6. Isaac Newton

7. Joseph Fourier

8. Continued Fraction

9. Johann Lambert

10. Mesopotamia

11. Egypt

12. China

13. Old Testament

14. Archimedes

15. Liu Hui

۱۶. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود سال ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به‌دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود و یکی از کارهای مهم او این است که عدد π را با دقتی که تقریباً تا یک صدوپنجاه سال بعد از وی در دنیا بی‌رقیب ماند محاسبه کرد.

17. John Machin

جان میشن، ریاضی‌دان انگلیسی، در سال ۱۷۰۶ میلادی با استفاده از فرمول زیر، موسوم به فرمول میشن، توانست مقدار تقریبی π را تا ۱۰۰ رقم اعشار محاسبه کند.

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}$$

18. William Shanks

19. Indiana

20. Genuys

ژنیوس در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر IBM 704 در مدت ۱/۷ ساعت، مقدار تقریبی π را ۱۰۰۰۰رقم اعشار محاسبه کرد.

21. Yasumasa Kanada

یاسوماسا کانادا، ریاضی‌دان ژاپنی از دانشگاه توکیو، در دو دهه ی گذشته چندین رکورد را در مورد محاسبه‌ی مقدار تقریبی π به نام خود ثبت کرده است. وی در سال ۲۰۰۲ با استفاده از یک ابرکامپیوتر در مدت ۶۰۰ساعت، مقدار تقریبی π را تا ۱/۲۴۱۱ تریلیون رقم اعشار محاسبه کرد.

22. Edward Goodwin

23. Francois Viete

24. Inverse Trigonometric Functions

25. John Wallis

26. Srinivasa Ramanujan

27. William Brouncker

۲۸. در دوره‌های تاریخی مختلف، استانداردهای متفاوتی برای معتبر بودن یک قضیه بین ریاضی‌دانان وجود داشته است. برخی افراد اثبات گنگ بودن e را به لامبرت نسبت می‌دهند، زیرا وی به‌وضوح از همگرایی کسر $\frac{e-1}{2}$ آگاه بوده است. به‌طور مشابه برخی اثبات گنگ بودن π را به لژاندر نسبت می‌دهند، زیرا وی به‌صورت نظام‌مندی به مطالعه‌ی کسرهای مسلسل پرداخت و از خواص این گونه کسرها بیش از لامبرت آگاهی داشت. کلود برزینسکی [۳] این مطالب تاریخی را به‌صورت جزئی‌تر مورد بحث قرار داده است.

29. Ivan Niven

30. Charles Hermite

31. Alexandr Gelfond

32. Riemann Zeta Function

33. Bernoulli Numbers

34. Roger Apery

35. Harmonic Series

36. Euler's Constant

* توضیحات مربوط به زیرنویس‌های ۱۶، ۱۷، ۲۰ و ۲۱ از اینترنت گرفته شده است. مترجم

منابع

1. B.L. Vander Waerden, Science Awakening (1st ed.), P. Noordhoff (1961).

2. Walter Burkett, Love and Science in ancient Phythagoreanism, Harvard University Press (1972).

3. C. Brezinski, History of Continued Fractions and Pade Approximants, Springer (1991).

منبع اصلی ترجمه شده

Marty Ross, Irrational Thoughts, **The Mathematical Gazette**, Vol. 88, No.511, March 2004.