کشف روابط جالب ضرایب عددی ضرب چندجمله‌ای‌ها با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی

عمر گیوه‌چی

مطلب را با این جمله آغاز می‌کنم که اگر گمان کنیم که برتری دانش انسان امروزی نسبت به نیاکان ما ناشی از برتری هوش و استعداد ماست سخت در اشتباه هستیم. بنابه گفته‌ی برنارد سیلوستر، فیلسوف و شاعر فرانسوی قرن دوازدهم: «ما هم‌چون کودکی هستیم که بر روی شانه‌های موجودات عظیمی ایستاده باشیم. اگر این امکان را داریم که دورتر را بهتر ببینیم نه به این خاطر است که دید ما دقیق‌تر و یا خود ما بالاتر از آن‌ها هستیم، بلکه به این علت است که به برکت و عظمت و بزرگی آن‌ها بالا رفته‌ایم.»

❋❋❋

آیا تا به حال نام **مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی** را شنیده‌اید؟

در واقع مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که دارای خواص جالبی است. این مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی، از ضرایب چندجمله‌ای‌هایی به‌دست آمده است که در زیر به خصوصیات آن می‌پردازم.

افرادی که با ریاضی آشنایی دارند، بسط دوجمله‌ای خیام نیوتن را می‌دانند و به زیبایی موجود در این الگو، واقف هستند.

$$(a+b)^{۰}=۱$$
$$(a+b)^{۱}=a+b$$
$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$
$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$
$$\vdots \qquad \cdots$$

اگر ضرایب عددی جملات سمت راست تساوی‌ها را بنویسیم، به یک مثلث متساوی‌الساقین می‌رسیم که تمام اعداد روی دو ضلع آن، یک می‌باشد.

n = ۰					۱				
n = ۱				۱		۱			
n = ۲			۱		۲		۱		
n = ۳		۱		۳		۳		۱	
n = ۴	۱		۴		۶		۴		۱
⋮					…				

با توجه به نظمی که در این مثلث وجود دارد، می‌توان اعداد سطرهای بعدی را به‌دست آورد. حال به عبارت‌های زیر توجه کنید.

$$\begin{array}{ll}
n=۱ & a\\
n=۲ & a(a+۱)\\
n=۳ & a(a+۱)(a+۲)\\
n=۴ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)\\
n=۵ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴)\\
\vdots & \vdots\\
n=k & a(a+۱)(a+۲)\cdots(a+k-۱)
\end{array}$$

اگر حاصل ضرب‌های بالا را به‌دست آوریم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll}
n=۱ & a=a\\
n=۲ & a(a+۱)=a^{۲}+a\\
n=۳ & a(a+۱)(a+۲)=a^{۲}+۳a^{۲}+۲a\\
n=۴ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)=a^{۴}+۶a^{۳}+۱۱a^{۲}+۶a\\
n=۵ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴)=a^{۵}+۱۰a^{۴}+۳۵a^{۳}+۵۰a^{۲}+۲۴a\\
n=۶ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴)(a+۵)=a^{۶}+۱۵a^{۵}+۸۵a^{۴}+۲۲۵a^{۳}+۲۷۴a^{۲}+۱۲۰a\\
\vdots & \cdots
\end{array}$$

ضرایب عبارت‌های سمت راست تساوی‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$n=۱$	۱					
$n=۲$	۱	۱				
$n=۳$	۱	۳	۲			
$n=۴$	۱	۶	۱۱	۶		
$n=۵$	۱	۱۰	۳۵	۵۰	۲۴	
$n=۶$	۱	۱۵	۸۵	۲۲۵	۲۷۴	۱۲۰
$\vdots$			$\cdots$			

در این اعداد، که تشکیل یک مثلث می‌دهند، الگوهای زیر مشاهده می‌شود:

۱) این ضرایب یک مثلث قائم‌الزاویه را می‌سازند.

۲) یک ضلع زاویه‌ی قائمه، فقط عدد یک است.

۳) تعداد جملات هر سطر، با شماره‌ی سطر، یکی است.

۴) اعداد روی وتر مثلث در سطر n ـ اُم، برابر است با $(n-۱)!$. به عنوان مثال، اگر در سطر سوم هستیم، عدد روی وتر مثلث برابر است با $۲ = !۲ = !(n-۱)$.

۵) مجموع تمام اعداد روی وتر از سطر اول تا سطر n ـ اُم، برابر است با $\sum_{k=۱}^{n}(k-۱)!$.

۶) اعدادی که روی ستون دوم قرار دارند، همان اعداد دنباله‌ی مثلثی هستند که جمله‌ی عمومی آن $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است؛ یعنی

۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ $\cdots$

۷) مجموع اعداد روی هر سطر، با فاکتوریل شماره‌ی سطر، برابر است. به عنوان مثال، اگر در سطر چهارم هستیم، مجموع همه‌ی اعداد با !۴ برابر است

$$n=۴ \Rightarrow ۱+۶+۱۱+۶=۲۴=۴!$$

۸) می‌توان با یافتن الگویی که در این مثلث وجود دارد، تمام اعداد سطرهای بعدی را ـ بدون ضرب چندجمله‌ای‌ها ـ به‌دست آورد.

$n=۱$	۱					
$n=۲$	۱		۱			
$n=۳$	۱		۳		۲	
$n=۴$	۱		۶		۱۱	۶
$\vdots$				$\vdots$		
$n=k$	۱	$\cdots$	A		B	$\cdots$
	۱		$\cdots$	$\cdots$	C	$\cdots$

که در آن $\boxed{k\times A+B=C}$

مثلاً برای به‌دست آوردن عدد زیر عدد ۲۲۵ در سطر هفتم، داریم A=۸۵ و B=۲۲۵ و k=۶، لذا

$$C=۶\times ۸۵+۲۲۵=۷۳۵$$

البته اگر بخواهیم اعداد روی وتر را به‌دست آوریم، کافی است در رابطه‌ی بالا به جای B، عدد صفر را قرار دهیم.

۹) خاصیت بعدی مربوط به جمع اعداد داخل مثلث با کنار گذاشتن اعداد روی وتر می‌باشد.

$$n=۳:\quad \left.\begin{array}{l} ۱ \\ ۱+۳=۴ \end{array}\right\} \to ۴+۱=۵$$

$$n=۴:\quad \left.\begin{array}{l} ۱ \\ ۱+۳=۴ \\ ۱+۶+۱۱=۱۸ \end{array}\right\} \to ۱+۴+۱۸=۲۳$$

$$n=۵\quad \left.\begin{array}{l} ۱ \\ ۱+۳=۴ \\ ۱+۶+۱۱=۱۸ \\ ۱+۱۰+۳۵+۵۰=۹۶ \end{array}\right\} \to ۱+۴+۱۸+۹۶=۱۱۹$$

این روش را می‌توان به همین شکل ادامه داد.

حال اگر این اعداد را کنار یکدیگر قرار دهیم، به الگوی زیر می‌رسیم

$$\begin{array}{lcl} n=۳ & : & ۵=۳!-۱ \\ n=۴ & : & ۲۳=۴!-۱ \\ n=۵ & : & ۱۱۹=۵!-۱ \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که مجموع اعداد داخل این مثلث تا سطر k اُم، برابر است با

$$k!-۱$$