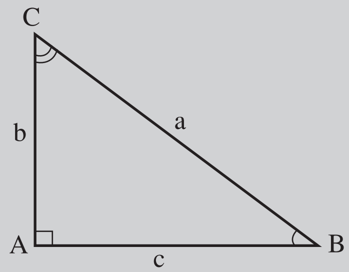
مروری بر قضیه‌ی فیثاغورس و تعمیم آن در اشکال متشابه هندسه‌ی مسطح و هندسه‌ی فضایی

سید یحیی میرعماد
دبیر ریاضی شهرستان دامغان و مدرس دانشگاه‌های دامغان

قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربع ایجاد شده روی وتر برابر با مجموع مساحت‌های مربع‌های ایجاد شده روی دو ضلع زاویه‌ی قائمه است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه‌ی فوق را می‌توان برای مساحت هر سه شکل متشابه مسطح که یک ضلع نظیر آن‌ها بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه منطبق باشد برقرار کرد؛ از آن جمله

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد شده روی وتر با مجموع مساحت‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ایجاد شده روی اضلاع زاویه‌ی قائمه برابر است.

برهان: با توجه به این که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است، پس اگر طرفین رابطه‌ی (۱) را در عدد $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ضرب کنیم داریم

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \qquad (۲)$$

که رابطه‌ی (۲)، رابطه‌ای میان مساحت مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به اضلاع a و b و c است.

مساحت دایره‌ی ایجاد شده به قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر با مجموع مساحت‌های دوایری به قطر اضلاع زاویه‌ی قائمه است.

برهان: با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱) در $\frac{\pi}{4}$ داریم

$$\pi\frac{a^2}{4} = \pi\frac{b^2}{4} + \pi\frac{c^2}{4} \qquad (۳)$$

که هریک از جملات رابطه‌ی (۳)، مساحت دوایر موردنظر هستند.

تعمیم قضیه‌ی فیثاغورس

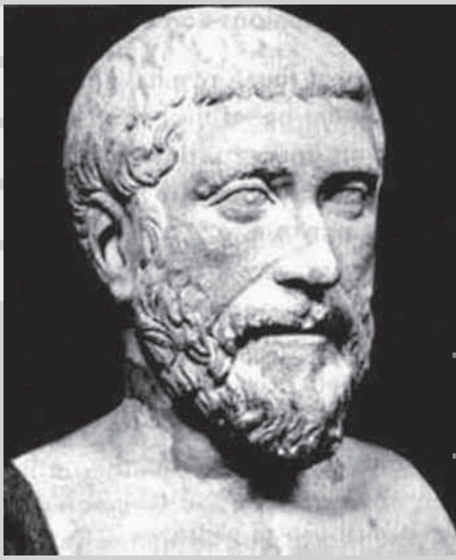
اگر سه شکل متشابه A و B و C به گونه‌ای باشند که ضلع متناظر آن‌ها بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای قرار گیرند، (و شکل A روی وتر باشد) داریم

$$S_A = S_B + S_C \qquad (۴)$$

برهان:

$$A \sim B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow S_B = \frac{b^2}{a^2}S_A$$

$$A \sim C \Rightarrow \frac{S_A}{S_C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow S_C = \frac{c^2}{a^2}.S_A$$



از جمع روابط فوق داریم

$$
\begin{aligned}
S_B + S_C &= \frac{b^2}{a^2} S_A + \frac{c^2}{a^2} S_A \\
&= \frac{S_A}{a^2}(b^2 + c^2) \\
&= \frac{S_A}{a^2} . a^2 \\
&= S_A
\end{aligned}
$$

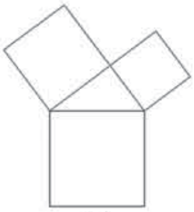
حال اگر هریک از سه شکل متشابه واقع بر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را به ارتفاع دلخواه h در فضا درنظر بگیریم (یک منشور قائم) سه شکل فضایی متشابه تولید می‌شود که از ضرب طرفین رابطه‌ی (۴) در h، خواهیم داشت

$$h.S_B + h.S_c = h.S_A$$

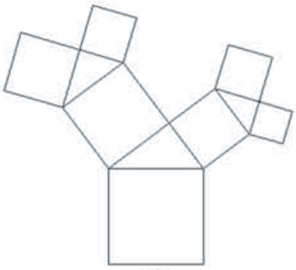
یعنی:

قضیه‌ی فیثاغورس برای شکل‌های فضایی متشابه: اگر سه شکل فضایی متشابه به گونه‌ای باشند که قاعده‌های آن‌ها در یک ضلع متناظر بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باشند، حجم ایجاد شده‌ی نظیر وتر با مجموع حجم‌های ایجاد شده‌ی نظیر بر روی اضلاع زاویه‌ی قائمه برابر است.

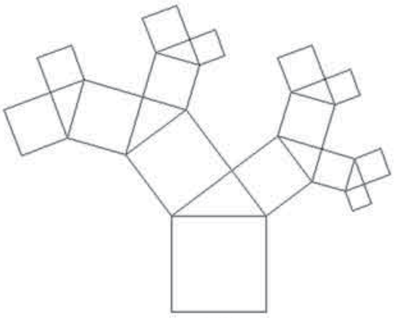
فرکتال‌های تولید شده براساس قضیه‌ی فیثاغورس



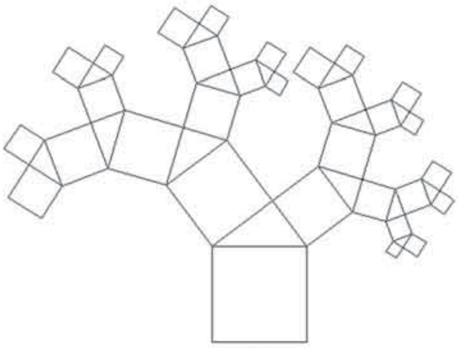
n=1



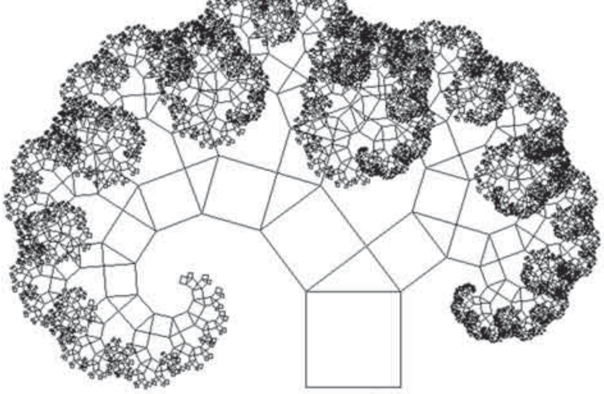
n=2



n=3



n=4



n=12