

تأملی بر نقطه عطف

همراه با نقدی بر آن
از دکتر بیژن ظهوری زنگنه

مقاله آرایه شده در ششمین کنفرانس آموزش ریاضی، ۲۹ بهمن تا ۱ اسفند ۱۳۸۱

نویسنده: کرامت‌الله شرفی

کارشناسی ارشد ریاضی و دبیر دبیرستان‌های مرودشت

چکیده

و انتگرال دوره پیش دانشگاهی، تعریف نقطه عطف به صورت زیر است:

اگر جهت تکرر نمودار F در c تغییر کند و نمودار تابع F در نقطه $(c, F(c))$ دارای مماس باشد، آن گاه نقطه $(c, F(c))$ ، نقطه عطف نمودار F نامیده می‌شود.

سؤالی که در این جا مطرح است این است که آیا تابعی مانند F موجود است به طوری که نقطه $(c, F(c))$ نقطه عطف آن باشد ولی F'' در هیچ همسایگی محذوف از این نقطه، موجود نباشد؟ در آن صورت، تعریف لیتهدل دچار ایراد خواهد شد و شیوه‌ای هم که ما در پیدا کردن نقطه عطف داریم، با مشکل مواجه خواهد شد. در این مقاله، تابعی ساخته می‌شود که در نقطه‌ای عطف است. ولی نه تنها در این نقطه بلکه در هیچ همسایگی محذوف این نقطه مشتق دوم این تابع موجود نیست.

در این نوشته، نگرشی دقیق‌تر راجع به نقطه عطف پیدا می‌کنیم. در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال تألیف «لوئیس لیتهدل»، تعریف نقطه عطف به صورت زیر است:

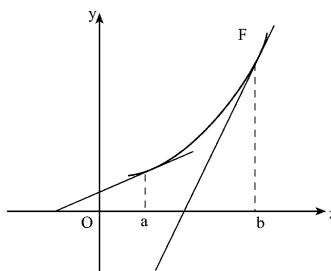
نقطه $(c, F(c))$ یک نقطه عطف از نمودار تابع است، اگر خط مماس بر نمودار این تابع در این نقطه و بازه باز I شامل c موجود باشد، به طوری که اگر $x \in I$ ، آن گاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

- (۱) اگر $x < c$ آن گاه $F''(x) < 0$ و اگر $x > c$ آن گاه $F''(x) > 0$ ، یا
- (۲) اگر $x < c$ آن گاه $F''(x) > 0$ و اگر $x > c$ آن گاه $F''(x) < 0$.

در حالی که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال تألیف «ریچارد آ. سیلورمن»، و هم چنین در کتاب حساب دیفرانسیل

تعاریف و قضایا

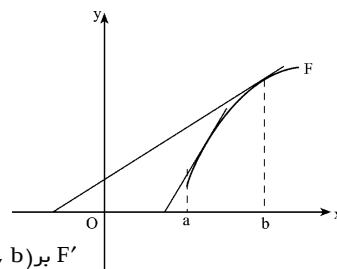
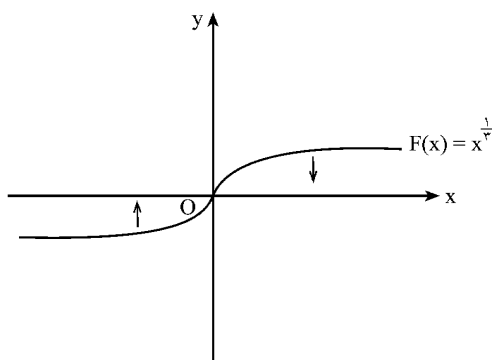
تعریف ۱. فرض می‌کنیم که تابع F بر بازه I مشتق پذیر بوده و مشتق F بر I ، اکیداً یکنوا باشد، اگر F' بر I اکیداً صعودی باشد، گوئیم F روی I به سمت بالا است و اگر F' بر I اکیداً نزولی باشد، گوئیم F روی I به سمت پایین است.

 F' بر (a, b) اکیداً صعودی است

قضیه ۱. (الف) اگر F'' روی بازه I موجود و همواره مثبت باشد، آن‌گاه جهت تقعر نمودار F روی این بازه رو به بالاست.

(ب) اگر F'' روی بازه I موجود و همواره منفی باشد، آن‌گاه جهت تقعر نمودار F روی این بازه رو به پایین است.

مثال ۲. در تابع $F(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ، اگر $x \neq 0$ داریم $F'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ و $F''(x) = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$. واضح است که اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $F''(x) < 0$. پس تقعر F روی $(0, \infty)$ به سمت پایین است، و اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $F''(x) > 0$. پس تقعر F روی $(-\infty, 0)$ به سمت بالاست. هم‌چنین، واضح است که F' و F'' در صفر تعریف نشده‌اند.

 F' بر (a, b) اکیداً نزولی است

تعریف ۲. اگر جهت تقعر F در c تغییر کند و نمودار F در نقطه $(c, F(c))$ مماس داشته باشد، آن‌گاه نقطه $(c, F(c))$ نقطه عطف نمودار F نامیده می‌شود.

در مثال (۲)، در تابع $F(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ، چون مماس در نقطه $(0, 0)$ (موجود است و جهت تقعر در $(0, \infty)$ عوض شده است، پس نقطه $(0, 0)$ ، نقطه عطف نمودار تابع است. هر چند F' و F'' هیچ‌یک در صفر موجود نیستند.

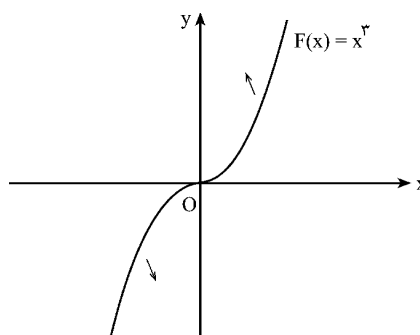
واضح است که در تعریف (۲)، صحبتی از مشتق دوم تابع در همسایگی محذوف نقطه نیست و تعریف هم دقیق است و در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سیلورمن و کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی نیز، تعریف به همین صورت است.

اما در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال لیتلهد، نقطه عطف به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳. نقطه $(c, F(c))$ یک نقطه عطف نمودار تابع F

مثال ۱. تقعر تابع $F(x) = x^3$ روی بازه $(0, \infty)$ به سمت بالا و روی بازه $(-\infty, 0)$ به سمت پایین است. زیرا $F'(x) = 3x^2$ و $F''(x) = 6x$. حال اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $F''(x) > 0$. در نتیجه F' بر $(0, \infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین، طبق تعریف، تقعر روی این بازه به سمت بالا است.

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $F''(x) < 0$ ، در نتیجه F' بر $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است. بنابراین، طبق تعریف، تقعر روی این بازه به سمت پایین است.



ایده پیدا کردن تابع

برای ساختن تابع مورد نظر، ابتدا به جای خود تابع، مشتق تابع را می‌سازیم و آن را f می‌نامیم، به طوری که f در هر همسایگی محذوف صفر، مشتق پذیر نباشد. ولی روی $[-1, 1]$ پیوسته باشد. علاوه بر این، f روی $[-1, 0]$ اکیداً نزولی و روی $[0, 1]$ اکیداً صعودی باشد. چون f پیوسته است، طبق اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال پذیر است و اگر F تابع اولیه‌ای برای f باشد، داریم $F'(x) = f(x)$ ، درحالی که $F'' = f'$ در هیچ همسایگی محذوف صفر موجود نیست. هم چنین، برای راحتی، f را طوری می‌سازیم که در نقاط $L, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ ، مشتق پذیر نباشد. چون طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، هر همسایگی محذوف صفر، حداقل شامل عددی مانند $\frac{1}{n}$ است، پس f در هیچ همسایگی محذوفی از صفر مشتق پذیر نیست. حال به دلیل این که $F' = f$ روی $[-1, 0]$ نزولی و روی $[0, 1]$ صعودی است و $F'(0) = f(0) = 0$ ، پس (و)، نقطه عطف F خواهد بود.

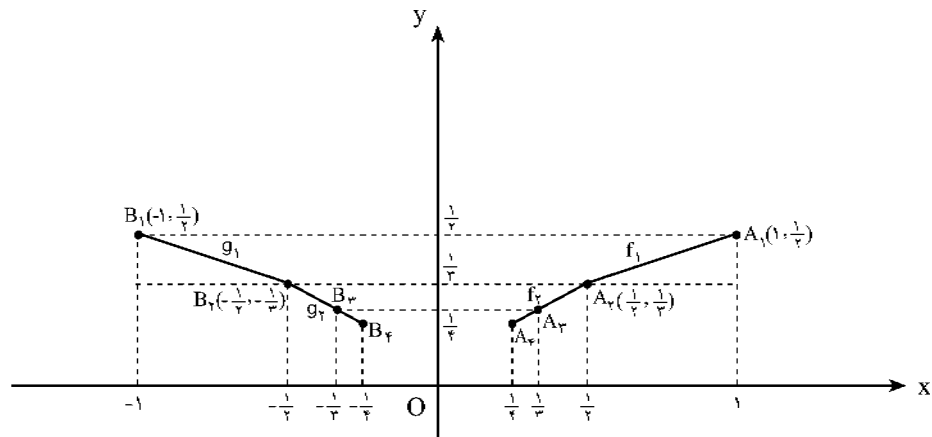
تابع $f_n: \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$ (که $n \in \mathbb{N}$) را

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \frac{n}{n+2} \left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$$

به عبارتی، f_n را تابع خطی می‌گیریم که از نقاط

$A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ و $A_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}\right)$ گذشته است.



است اگر خط مماس در این نقطه وجود داشته باشد و یک بازه باز شامل c موجود باشد که برای هر x از I ، یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) اگر $x < c$ ، آن گاه $F''(x) < 0$ و اگر $x > c$ ، آن گاه $F''(x) > 0$.

(ب) اگر $x < c$ ، آن گاه $F''(x) > 0$ و اگر $x > c$ ، آن گاه $F''(x) < 0$.

از تعریف فوق، در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی و کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال تألیف سیلورمن، به عنوان یک آزمون برای تشخیص نقطه عطف استفاده شده است. در صورتی که همین تعریف در کتاب حسابان سال سوم ریاضی دوره دبیرستان، به صورت تعریف (۳) آمده است. این نشان می‌دهد که تعریف (۲) و (۳)، معادل گرفته می‌شود. نظر به این که تعریف باید دقیق و جامع باشد و حداقل نباید در دو کتاب دوره دبیرستان، دو نوع تعریف داشته باشیم، یا باید معادل بودن دو تعریف اثبات شود یا این که یکی را پذیرفته و دیگری را رد کنیم. اگر توجه کنیم، عملاً هنگام تعیین نقطه عطف نیز سریعاً F'' را حساب کرده و تعیین علامت می‌کنیم. حال اگر شرایط تعریف (۳) برقرار بود، نقطه عطف را معرفی می‌کنیم. ولی سؤال این است که آیا تابعی مانند F وجود دارد که نقطه $(c, F(c))$ نقطه عطف آن باشد، ولی F'' نه تنها در c بلکه در هیچ همسایگی محذوف از c موجود نباشد؟

اگر چنین باشد، در آن صورت دو تعریف فوق معادل نیستند و مخصوصاً، به دلیل جامعیت تعریف (۲)، تعریف (۳) رد خواهد شد. در آن صورت، بهتر است تعریف نقطه عطف در کتاب حسابان سال سوم ریاضی نیز اصلاح شود، و باید مواظب باشیم که همیشه، فقط به دنبال تعیین علامت F'' نرویم و به تعریف (۲) رجوع کنیم. در این مقاله، چنین تابعی ساخته می‌شود.

است. حتی f در صفر هم پیوسته است، زیرا برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n} < \varepsilon$ و بنابراین، اگر $|x| < \frac{1}{n}$ ، آن گاه عدد طبیعی m به شرط $n \leq m$ موجود است که $\frac{1}{m+1} \leq x \leq \frac{1}{m}$ یا $-\frac{1}{m} \leq x \leq -\frac{1}{m+1}$ و در هر حالت، داریم:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

و این نشان می دهد که $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

در ضابطه و نمودار f توجه می کنیم که اگر $\frac{1}{m+1} \leq x \leq \frac{1}{m}$ یا $-\frac{1}{m} \leq x \leq -\frac{1}{m+1}$ آن گاه

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}, |f(x)| \leq \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}$$

چون برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده $\delta = \frac{1}{n} > 0$ موجود است که $|x - 0| = |x| < \delta$ نتیجه می دهد $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ ، پس تابع فوق در صفر پیوسته است. حال، تابع $F: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

چون f روی $[-1, 1]$ پیوسته است، پس طبق اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتق پذیر بوده و علاوه بر این، $F'(x) = f(x)$. چون تابع F' در نقاط $L, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ مشتق پذیر نیست، پس F'' در این نقاط موجود نیست و با توجه به نمودار، $F' = f$ ، سمت چپ صفر نزولی و سمت راست صفر صعودی و مماس در $(0, 0)$ بر نمودار f وجود دارد $(F'(0) = f(0) = 0)$ پس $(0, 0)$ ، برای F نقطه عطف است، در حالی که F'' در هیچ همسایگی محذوف $(0, 0)$ موجود نیست.

هم چنین، تابع $g_n: \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$ (که $n \in \mathbb{N}$) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_n(x) = \frac{n}{n+2} \left(x + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$$

درحقیقت، g_n را تابعی خطی می گیریم که از نقاط $B_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ و $B_{n+1} = \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}\right)$ می گذرد. مثلاً، $f_1(x)$ معادله خط گذرا از نقاط $A_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$ و $A_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ است که به صورت $y = f_1(x) = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2}$ می باشد.

واضح است که شیب خط گذرا از A_n و A_{n+1} ، برابر است با $\frac{n}{n+2}$ و شیب خط گذرا از A_{n+1} و A_{n+2} ، برابر است با $\frac{n+1}{n+3}$. بنابراین، نقاط A_n (که $n \in \mathbb{N}$) و مشابه B_n ها، بر یک امتداد نیستند و نمودارهای این توابع در این نقاط، برای $n > 1$ شکستگی دارد. پس در این نقاط، مشتق پذیر نیست. درواقع،

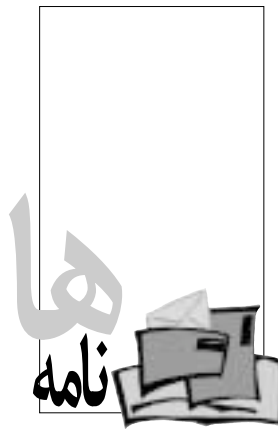
$$f_n^+ \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+2}$$

$$f_{n+1}^- \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+3}$$

حال تابع $f: [-1, 1] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) ; & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} & \text{اگر} \\ 0 ; & x = 0 & \text{اگر} \\ g_n(x) ; & -\frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{n+1} & \text{اگر} \end{cases}$$

واضح است که تابع f ، در تمام نقاط غیر صفر، پیوسته



نقدی بر مقاله «تأملی بر نقطه عطف»

بیژن ظهوری زنگنه، دانشگاه صنعتی شریف

مؤلف محترم در این مقاله، دو تعریف درباره نقطه عطف را با هم مقایسه نموده و نشان داده است که یکی از تعریف‌ها، حالت کلی‌تری نسبت به تعریف دیگر دارد و از آنجا، نتیجه گرفته است که بهتر است تعریف کلی‌تر، جایگزین تعریف خاص‌تر شود. ولی سؤال مهمی که مؤلف به آن جواب نداده این است که مؤلفین کتاب‌هایی که تعریف خاص‌تر؛ یعنی قبول مشتق دوم را پذیرفته‌اند، آیا به این نکته توجه داشته‌اند یا خیر؟ جواب سؤال این است که مؤلفین که تعریف خاص‌تر را انتخاب کرده‌اند، مسلماً به این مهم توجه داشته‌اند، زیرا این مطلب، یکی از مشهورترین بحث‌های آموزشی در تدریس حسابان بوده است. به طور مثال، آندرو کلموگراف، ریاضی‌دان برجسته روسی و یکی از بنیان‌گذاران نظریه احتمال مدرن، به دلیل علاقه زیادی که به آموزش ریاضی داشت، کتاب حسابانی برای دبیرستان در روسیه نوشت. کلموگراف در ابتدای کتاب حسابان دبیرستانی می‌نویسد که ما در این درس مقدماتی، همواره فرض می‌کنیم توابع ما، حداقل دوبار مشتق پیوسته داشته باشند، زیرا توابعی که این خاصیت را ندارند، در مسایل کاربردی که مناسب این سطح از حسابان هستند، بی‌اهمیت هستند. علاوه بر این، تجربه‌ها و تحقیقات آموزشی نشان می‌دهد که نیازی به مشغول کردن دانش‌آموزان به حالت‌های استثنایی نیست، زیرا این درگیری، دانش‌آموزان را از یادگیری مطالب مهم‌تر بازمی‌دارد. به همین دلیل، توابعی که ما با آن کار می‌کنیم، از مسایل فیزیکی ملموسی ناشی می‌شود که مشتق اول آن‌ها یعنی سرعت، و مشتق دوم آن‌ها یعنی شتاب، همیشه پیوسته هستند (در این مرحله از یادگیری حسابان، حالت‌های استثنایی که این خاصیت را ندارند، بی‌اهمیت هستند). مؤلف محترم سعی کرده مثال نقضی پیدا کند که مشتق دوم نداشته باشد (تلاش مؤلف قابل تقدیر است). ولی حتماً طراحان کتاب‌های حسابان دبیرستانی، به این نکته توجه داشته‌اند، اما نکته مهم در آموزش این است که کدام تعریف، شهودی‌تر و ساده‌تر است.

این مطلب، در تعریف تابع در کتاب‌های دبیرستانی هم مطرح است. مثلاً، برای درگیر نکردن دانش‌آموزان با بُرد تابع، معمولاً همیشه تابع پوشا فرض می‌شود. البته واضح است که این تعریف، همه توابع را در برنمی‌گیرد، ولی از نظر آموزشی، از درگیر شدن دانش‌آموزان با مطالبی که مانع یادگیری آن‌ها در آن زمان خاص می‌شود، جلوگیری می‌کند. طبیعی است که در سطحی دیگر، باید روی بُرد تابع تأکید شود و تعریف جامع‌تری از تابع، ارایه شود. اما در سال دوم دبیرستان، درگیر کردن دانش‌آموزان و معلمان با مفهوم بُرد تابع و پوشایی، مناسب نیست.

نامه‌ها و مطالب دوستانی که نام آن‌ها در زیر می‌آید، به دستان رسیده است، از همگی متشکریم:

- خانم اعظم مشیری دزفولیان از اراک
- آقای سعید علیخانی از یزد
- آقای اصغر امدادی از کرمانشاه
- آقای یونس کریمی فردین پور از تهران
- آقای امین جامی از خراسان
- آقای احمد مقدم از هشتگرد
- خانم‌ها طویه حجاری و بهناز ساویزی از تهران
- آقای محسن عظیمی زنوزی از تبریز
- خانم زهرا رضاخانی از تهران
- آقای فرشاد افخمی از سوادکوه
- خانم نسرين رضائی
- خانم مژگان صدقی از جاجرم
- آقای حسنی نژاد
- آقای علی اکبر جاویدمهر از قم
- آقای آرش کوزه کنانی از تهران
- آقای اسماعیل بوداغی از مشکین شهر
- آقایان جعفر صابری نجفی و سعید پناهیان فرد از مشهد
- خانم راضیه دشت‌بان از همدان
- آقای حسین علیزاده از مرند
- آقای علی زمانی از خراسان.

پوزش و تصحیح

در صفحه ۱۴ شماره ۷۵ مجله رشد آموزش ریاضی، در انتهای مقاله «در باب آموزش ریاضی...» نام آقای دکتر محمد اردشیر به اشتباه محمد ارشیر ذکر شده است که بدین وسیله، از ایشان پوزش می‌طلبیم.