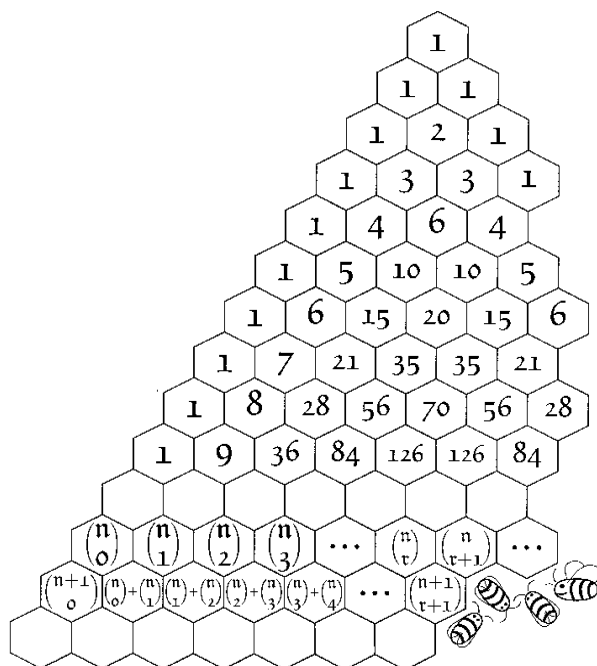


موضوع‌های پژوهش دانش‌آموزی



نویسنده: اسماعیل بابلیان

استاد دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم

چکیده

عصر فناوری اطلاعات (IT) و فناوری ارتباطات و ارتباطات (ICT) سبب رشد سریع علوم شده است. در این رابطه ریاضیات نیز در حال پیشرفت سرسام‌آور است به طوری که هر روز صدها صفحه ریاضیات نو تولید می‌شود. تولید ریاضیات در اثر پژوهش رخ می‌دهد و الزاماً فقط شامل حل مسایل باز و مبارز طلب نیست، بلکه پژوهش معنای بسیار وسیعی دارد که در این نوشتار به آن خواهیم پرداخت. پژوهش قبل از دانشگاه با پژوهش در دوره‌های عالی متفاوت است. در سطح مدرسه، پژوهش‌ها می‌توانند بسیار متنوع باشند. اما، پژوهش‌های متناسب با توانایی‌های دانش‌آموزان، توشه علمی و نحوه آموزش آن‌ها است. در این مقاله، درباره مقوله‌های زیر بحث خواهد شد:

ب) هدف از تحقیق توسط دانش‌آموزان،

د) توانایی‌های اولیه برای تحقیق،

الف) آموزش پژوهش محور و کتاب‌های درسی،

ج) حیطه‌های تحقیق دانش‌آموزی،

ه) موضوع‌های مناسب برای پژوهش دانش‌آموزان.

آموزش پژوهش محور و کتاب های درسی

اصولاً رفتار با کودک در منزل، مهدکودک، دبستان و... می تواند از او انسانی پرسشگر، نقاد و جستجوگر بسازد یا فردی بی تفاوت، زودباور و معمولی تربیت کند.

قبل از این که یک خانواده تصمیم به داشتن فرزند بگیرد، باید با مطالعه کتب تخصصی در زمینه تربیت کودک، نوجوان و... خود را آماده آماج پرسش های فرزند خود کند. عدم پاسخ گویی به سؤالات کودکان، سبب می شود که رغبت آن ها به سؤال کردن کم شود، تداوم این امر باعث می شود در مدرسه هم از سؤال کردن پرهیز کنند. حتی نحوه پاسخ گویی به سؤالات کودک نیز در روحیه پرسشگری او مؤثر است. پاسخ گویی به سؤالات با رویی گشاده و با حوصله، در تقویت روحیه پرسشگری تأثیر مثبت دارد. البته، آموزش چگونه سؤال کردن و مطرح نکردن سؤالات نامربوط نیز در این راستا مفید است.

یکی از منابع مهم آموزش دانش آموزان، کتاب های درسی است. نحوه آموزش و ارایه مطالب در این کتاب ها باید به گونه ای باشد که ضمن ایجاد سؤال در ذهن دانش آموز، با راهنمایی و انجام فعالیت، او را در رسیدن به پاسخ سؤال یاری کند. آزمایش های روان شناختی نشان می دهند که حداکثر زمانی که یک دانش آموز می تواند روی یک موضوع تمرکز داشته باشد، مدت محدودی است. لذا، آموزش های سنتی، یعنی سخنرانی و ارایه مطالب به کمک گچ (ماژیک) و تخته سیاه (وایت برد)، نمی تواند به تنهایی در ایجاد روحیه پرسشگری در دانش آموزان مؤثر باشد. باید یادگیرنده را در آموزش شرکت داد و از فطرت او که تشنه دانستن است، کمک گرفت. منظور کردن پرسش هایی که دارای چند جواب هستند (حل و بحثی)، مسایلی که باید در مورد حل آن ها حالت های مختلف را در نظر گرفت، و مسایلی که اصلاً جواب ندارند یا طی شرایطی جواب دارند، می تواند در ارضای حس کنجکاوی دانش آموزان و توانا کردن آن ها در رویارویی با مسایل نو، مفید باشد.

هدف از تحقیق توسط دانش آموزان

هدف از تحقیق توسط دانش آموزان، ایجاد توانایی و تقویت روحیه خودآموزی و کشف حقایق علمی است. با توجه به تغییرات سریع در تکنولوژی و لزوم تطبیق فارغ التحصیلان با نیازهای بازار، ایجاد چنین توانایی هایی در دانش آموز، یک ضرورت است. تحقیق یعنی حرکت در ناشناخته ها و پیدا کردن

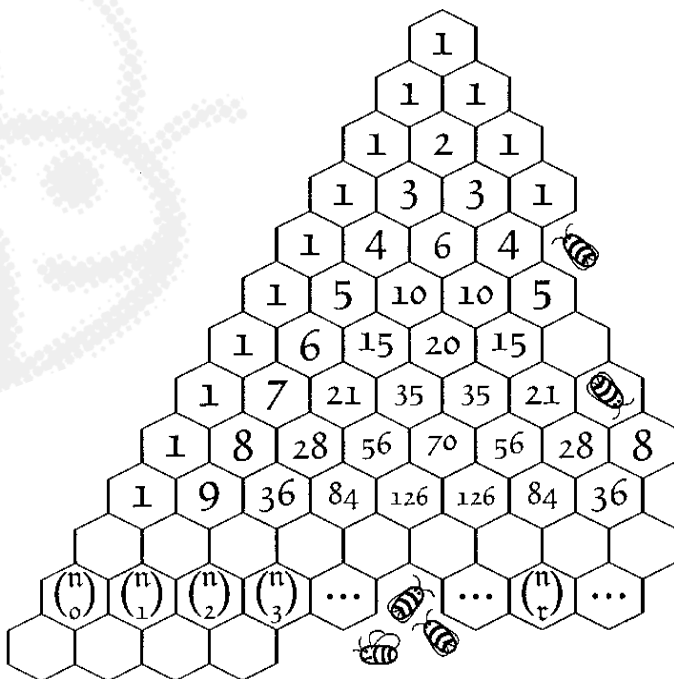
جواب سؤالاتی که ذهن با آن ها روبه روست، و طبیعی است که تمرین در این وادی دانش آموزان را آب دیده می کند. دانش آموزی که در دوران تحصیل خود، این چنین با مسایل دست و پنجه نرم کرده باشد، با رویارویی با اولین مشکل، خود را نمی بازد؛ بلکه هر مشکلی برای او در حکم مسأله ای تازه است که باید جوانب آن را بررسی کرده و راه حلی مناسب برای آن پیدا کند. در این جا لازم است به این نکته توجه داشت که آشنا کردن دانش آموزان با محدودیت های تفکر محض و قابل انعطاف بودن در حل مسایل عملی، لازمه موفقیت در عرصه زندگی اجتماعی است.

حیطه های تحقیق دانش آموزی

طبیعی است که تحقیق دانش آموزان در اطراف موضوعاتی باشد که از طریق کتاب های درسی با آن ها آشنا می شوند. به هیچ وجه از دانش آموزان انتظار نمی رود مسأله ای را که سال هاست باز است، حل کنند. بلکه مسایلی از انواع زیر می تواند موضوع تحقیق برای آن ها باشد:

الف) اثبات قضیه های موجود در کتاب های درسی به روش های جدید.

منظور از روش های جدید، استفاده از مفاهیم ساده یا قضیه های مقدماتی در اثبات قضیه؛ ارایه اثبات کوتاه (و قابل



توانایی‌های اولیه برای تحقیق

تحقیق روی هر موضوع، نیاز به پیش‌نیازهایی دارد. مثلاً، وقتی قضیهٔ فرما اثبات شد، معلوم شد که این قضیه با استفاده از مفاهیم ابتدایی قابل اثبات نیست. لذا، دانش‌آموزان با توشهٔ اندک ریاضی، نباید به حل این مسایل بپردازند. برای ورود به تحقیقاتی که در بخش قبل به آن‌ها اشاره شد، لازم است دانش‌آموزان توانایی‌های زیر را داشته باشند:

الف) تسلط به مفاهیمی چون حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال،

ب) تسلط به مفهوم دنباله‌ها، رابطه‌های بازگشتی و حد دنباله‌ها،

ج) تسلط به جبر چندجمله‌ای‌ها،

د) آشنایی با مفاهیم هندسه،

ه) آشنایی کلی با روش‌های حل مسأله.

موضوع‌های مناسب برای پژوهش دانش‌آموزان

۱- مثلث خیام - پاسکال

در رابطه با مثلث خیام - پاسکال (شکل زیر)، سؤالات

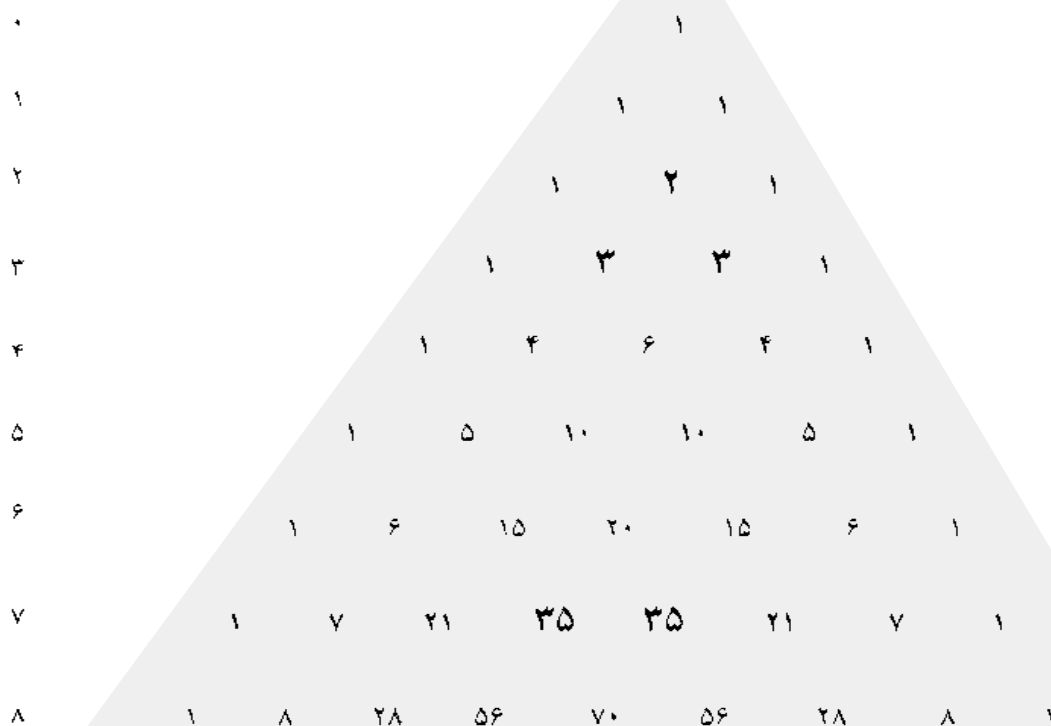
فهم)؛ یا ارایهٔ اثبات به کمک مقوله‌های دیگر است.

ب) بسط مفاهیم کتاب‌های درسی در حد توان دانش‌آموزان. بسیاری از مفاهیم کتاب‌های درسی قابل گسترش هستند. ضمناً، سؤالاتی در حاشیهٔ این مطالب قابل طرح است که پاسخ‌گویی به آن‌ها نیاز به تحقیق، مطالعهٔ بیش‌تر، و پرس‌وجو دارد. (بخش موضوع‌های مناسب برای پژوهش دانش‌آموزان را در همین مقاله، ملاحظه کنید.)

ج) پرداختن به مفاهیم نو و وارد کردن آن‌ها به آموزش‌های کلاسیک.

بعضی از دانش‌آموزان که اهل مطالعه هستند، مفاهیم نسبتاً ساده، ولی نو را مطالعه می‌کنند که در کتاب‌های درسی آن‌ها نیست. می‌توان از دیگر دانش‌آموزان نیز خواست که مطالبی از این نوع را مطالعه کنند و برای هم‌کلاسی‌های خود سمینار بدهند. از این مطالب می‌توان هندسهٔ ناقلیدسی، فرکتال‌ها، نظریهٔ مجموعه‌های فازی، نظریهٔ گراف، سیاه‌چاله‌های ریاضی و... را نام برد. [۱ و ۲]

به دانش‌آموزان توصیه می‌شود از پرداختن به مسایلی که ثابت شده است که حل نمی‌شوند، احتراز کنند که از آن جمله می‌توان به تثلیث زاویه و تربیع دایره اشاره کرد.

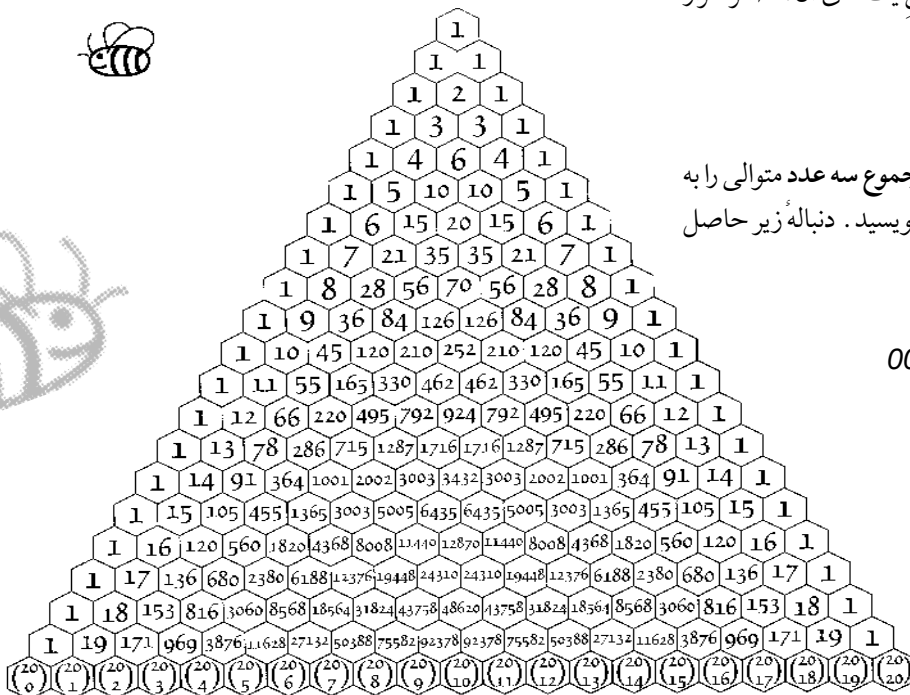


اگر این کار را ادامه دهید، و صفرها را پاک کنید به جدول اعداد زیر می رسید:

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

در رابطه با این جدول اعداد، می توان سؤالاتی مطرح کرد که دانش آموزان در مورد جواب آن ها تحقیق کنند. مثلاً:

(الف) در هر سطر چند عدد نوشته می شود و مجموع آن ها چیست؟



زیادی مطرح است. هر یک از این سؤالات می تواند به صورت پروژه ای کوچک به دانش آموزان داده شود تا پاسخ آن سؤال را بیابند. به نمونه های زیر توجه کنید:

(الف) تاریخچه پیدایش مثلث خیام - پاسکال،
(ب) در هر سطر مثلث خیام - پاسکال، چند عدد فرد وجود دارد؟ عددهای کدام سطرها تماماً فرد هستند؟
(ج) بزرگ ترین عدد در هر سطر چه ارتباطی با شماره آن سطر دارد؟ در هر سطر، چند عدد، بیش ترین مقدار را دارد؟
(د) آیا تعمیمی برای مثلث خیام - پاسکال وجود دارد؟ در رابطه با سؤال (د)، مطالبی را توضیح می دهم. فرض کنید دنباله نامتناهی از اعداد زیر را داریم:

L 0000001000000L (*)

از سمت چپ این دنباله شروع کنید: مجموع دو عدد متوالی دنباله را به دست آورید و در زیر و بین آن ها بنویسید. دنباله اعداد زیر حاصل می شود:

00000110000

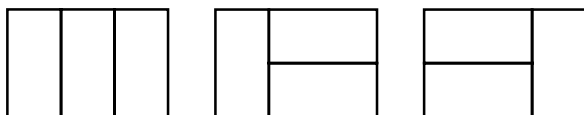
همین کار را با دنباله جدید انجام دهید. حالتی از مثلث خیام - پاسکال به دست می آید که در طرفین یک های آن، صفر قرار دارد!

تعمیم مثلث خیام - پاسکال

در دنباله (*)، از چپ به راست مجموع سه عدد متوالی را به دست آورید و در زیر و بین آن دو عدد بنویسید. دنباله زیر حاصل می شود:

00001110000

یک راهروی $2 \times n$ را با این موزائیک ها فرش کرد؟ (نحوه فرش کردن یک راهروی 2×3 در شکل زیر نشان داده شده است.)



(د) فرض کنید، n ، یک عدد طبیعی باشد. تعداد طرق نوشتن n به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی را تعداد افزایندهای مرتب n نامند. در زیر، افزایندهای عدد $n = 4$ نوشته شده است:

$4; 1+3; 2+2; 1+1+2; 1+1+1+1; 1+1+1+1$
۳- افزایندهای مرتب ۴ ۲- افزایندهای مرتب ۴

به طور کلی، هر جواب طبیعی معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$ را یک k -افزاینده مرتب n نامند و y_1 تا y_k را اجزای این افزاینده گویند. ثابت می شود تعداد

k -افزایندهای مرتب n ، مساوی $\binom{n-1}{k-1}$ است. [۵]

تعداد افزایندهای مرتب n ، با ویژگی های خاص، ارتباط نزدیکی با اعداد فیبوناتچی دارند. در این زمینه، می توان پرسش های زیر را مطرح کرد:

۱- تعداد افزایندهای مرتب n ، با اجزای ۱ یا ۲ را حساب کنید.

۲- تعداد افزایندهای مرتب n ، با اجزای ۱ یا ۳ را حساب کنید.

۳- تعداد افزایندهای مرتب n ، با اجزای فرد را حساب کنید.

۴- هر جواب معادله $y_1 + \dots + y_k = n$ که $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ ، یک k -افزاینده نامیده می شود. آیا برای k -افزایندهای n یا افزایندهای n ، با ویژگی اخیر، فرمولی وجود دارد؟

۳- شمارش توابع

با استفاده از جایگشت، جایگشت مکرر، ترکیب و...

(ب) در هر سطر بزرگ ترین عضو کجا قرار دارد؟ در هر سطر چند عدد با بیش ترین مقدار وجود دارد؟ (رجوع کنید به [۳])

۲- اعداد فیبوناتچی

دنباله اعداد فیبوناتچی چنین است:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$

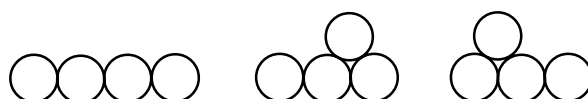
این دنباله از اعداد در جاهای مختلف، به ویژه در طبیعت، نمود پیدا می کند [۴]. به عنوان نمونه، دنباله اعداد فیبوناتچی، تبیین کننده تعداد زاد و ولد خرگوش ها در شرایط ویژه است. در مورد ظهور این اعداد در شمارش موجودات جدید ریاضی می توان مسایل زیادی مطرح کرد که پیدا کردن جواب هر مسأله، نیاز به تحقیق دارد.

(الف) دنباله اعداد فیبوناتچی در رابطه بازگشتی زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & , n \geq 3 \\ f_1 = f_2 = 1 \end{cases}$$

سؤال این است که اگر دنباله $\{U_n\}$ در رابطه بازگشتی $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ ، برای $n \geq 3$ صدق کند ولی $U_1 = a$ و $U_2 = b$ ، چه ارتباطی بین U_n و جملات دنباله $\{f_n\}$ وجود دارد؟

(ب) n سکه داریم. به چند طریق می توان این سکه ها را در یک یا دو ردیف کنار هم قرار داد؟ (نحوه قرار دادن سکه ها، برای چهار سکه، در شکل زیر نشان داده شده است.)



(ج) موزائیک هایی داریم به ابعاد 1×2 . به چند طریق می توان

می دانید که :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad (1)$$

ولی :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad (2)$$

در این رابطه می توان سؤالات زیر را مطرح کرد :

الف) آیا دنباله دیگری با ویژگی های (۱) و (۲) وجود دارد؟

ب) دنباله $\{a_n\}$ کراندار نیست. آیا دنباله $\{b_n\}$ با ویژگی های زیر وجود دارد؟

$\{b_n\}$ کراندار است، $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ وجود ندارد و

$$(b_{n+1} - b_n) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

می توان تعداد توابع خاصی را شمارش کرد. در این پروژه ها دانش آموز نحوه استفاده از مطالب درسی را در درسی دیگر آموزش می بیند. به نمونه های زیر توجه کنید.

فرض کنید $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ و $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ و $F: N_m \rightarrow N_k$

الف) چند تابع از N_m به N_k وجود دارد؟

ب) اگر $m \leq k$ ، چند تابع از N_m به N_k یک به یک است؟

ج) اگر $m = k$ ، چند تناظر یک به یک از N_m به N_k وجود دارد؟

د) چند تابع صعودی از N_m به N_k وجود دارد؟

ه) اگر $m \leq k$ ، چند تابع اکیداً صعودی از N_m به N_k وجود دارد؟ [۶]

۴- دنباله ها

دنباله $\{a_n\}$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید. [۷]

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

مراجع

- [۴] درباره اعداد فیبوناتچی، اسماعیل بابلیان، رشد آموزش ریاضی، شماره ۵ و ۶، سال ۱۳۶۴.
- [۵] مباحثی در ریاضیات گسسته، اسماعیل بابلیان، انتشارات مبتکران، ۱۳۸۰.
- [۶] شمارش توابع و رابطه ها، اسماعیل بابلیان، مجله فرنود، نشریه انجمن معلمان ریاضی استان اصفهان، سال ۱۳۷۹.
- [۷] حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ پیش دانشگاهی، چاپ وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۱.

- [۱] اثبات احکام ریاضی به وسیله کامپیوتر، اسماعیل بابلیان، رشد آموزش ریاضی، شماره ۵ و ۶، سال ۱۳۶۴.
- [۲] ویژگی ها و تولید فرکتال ها، اسماعیل بابلیان، رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۳، سال ۱۳۷۷.
- [۳] بررسی ویژگی های مثلث خیام- پاسکال و تعمیم آن، پایان نامه کارشناسی، خانم مهناز گرجی قزوینی نژاد، مرکز آموزش عالی ضمن خدمت فرهنگیان شهید باهنر (تهران)، ۱۳۸۰.