

ماهیت ریاضی*

مترجمان: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

نرگس مرتاضی مهربانی

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی مدارس تهران

ریاضی بر منطق و خلاقیت استوار است و هم برای اهداف گوناگون کاربردی و هم برای علاقه درونی دنبال می شود. برای بعضی آدم ها، و نه فقط ریاضی دان های حرفه ای، ماهیت ریاضی، متکی بر زیبایی و چالش روشنفکرانه آن است. برای بعضی دیگر، از جمله بسیاری از دانشمندان و مهندسان، ارزش اصلی ریاضی به چگونگی به کارگیری آن، برای کارهای خودشان است. به دلیل این که ریاضی، چنین نقشی اساسی را در فرهنگ جدید بازی می کند، درک اولیه نسبت به ماهیت ریاضی، برای حصول به سوادآموزی علمی ضروری است. برای رسیدن به این فهم و درک، دانش آموزان نیاز دارند تا ریاضی را به عنوان بخشی از تلاش علمی در نظر بگیرند، ماهیت تفکر ریاضی را درک کنند و با ایده ها و مهارت های کلیدی ریاضی، آشنا بشوند.

پروژه علوم برای تمام آمریکایی ها، ۱۹۹۷

با علوم دیگر سهیم است. خصوصاً، تشابه های مرتبط شامل باور به نظم زیربنایی، ایده آل های صداقت و صراحت در رایه گزارش تحقیق، اهمیت نقادی توسط همکاران در قضاوت راجع به ارزش کار جدید، و نقش حیاتی تخیل می باشد. ریاضی از این جهت مانند علوم و تکنولوژی است که هم شامل یافتن پاسخ برای سؤال های اساسی و هم حل مسایل علمی است. . . *

الف. الگوها و روابط

دنیا از کهکشان ها، کوه ها، مخلوقات، ماشین ها و هر نوع چیزی ساخته شده است، که هر یک به نظر منحصر به فرد می آیند. هم چنین، دنیا یک امر آشوبی است که در آن، همه آن

نمی توان به ظرافت، حوزه پیچیده ای از تلاش و کوشش را در چند جمله یا چند بند، تعریف کرد. [حال فرقی نمی کند که این حوزه ها] علوم، هنر، تکنولوژی یا ریاضی باشند. اما فرد خارج از هر یک از این حوزه ها، می تواند با بررسی یک حوزه از دیدگاه های مختلف و با انجام بعضی چیزهایی که افراد آشنا با آن حوزه انجام می دهند، به تدریج یک حس غنی از ماهیت آن حوزه را [در خود]، ایجاد کند. هم چنین، این دو نوع تجربه-یادگیری درباره یک حوزه و تمرین عملی آن-باعث ایجاد مهارت هایی می شود که در زندگی بزرگسالی، فواید زیادی دارند و هم چنین، به توسعه فهم و درک منجر می شوند. ریاضی به عنوان علم الگوها و روابط، در بسیاری جنبه ها،

مفهومی، به طور سنتی به صورت خانواده‌هایی مانند حساب، هندسه، جبر، مثلثات، آمار و حسابان، باهم ترکیب شده‌اند. ریاضی‌دان‌ها در جستجوی الگوها و روابطی هستند که ایده‌های مختلف (که خودشان الگوها و روابط هستند) را در میان چنان خانواده‌هایی و بین هر کدام از آن‌ها، به هم متصل کنند. بعضی از موفقیت‌های ریاضی، حاصل احساس رضایت از این است که بینیم آن‌چه که قبلاً به عنوان دو بخش مجزای ریاضی به حساب می‌آمد، یا با هم موازی هستند یا آن‌که مثال‌هایی از یک صورت بندی واحد و مجردتر می‌باشند. اگر اصلاً امکان داشته باشد، باید تمام دانش‌آموزان، خودشان تجربه این کشف را داشته باشند که یک ایده، می‌تواند با بازنمایی‌های مختلف اما مشابه، ارایه شود.

یک بخش از تحقیق درباره چگونگی یادگیری انسان، بر مفید بودن ساختن بازنمایی‌های چندگانه برای یک ایده مشابه و انتقال از یک بازنمایی به دیگری، تأکید دارد. زمانی می‌توان مطمئن شد که دانش‌آموز معنای واقعی رابطه‌ای را درک کرده است که او بتواند آن رابطه را در جدول‌ها، نمودارها، نمادها و در کلمات، نشان دهد. و به استناد این نظر، راهی که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که این بازنمایی‌ها و انتقال‌ها [و تبدیل‌ها] را ایجاد کنند، دیدن و کار کردن با آن‌ها در زمینه و متنی است که به خاطر آن‌ها، به یافتن جواب اهمیت می‌دهند. دانش‌آموزان درگیر با این نوع فعالیت‌ها، در نهایت، به ایده اتصال و ارتباط^۲ در ریاضی می‌رسند. اگرچه ممکن است که آن‌ها، هر از گاهی نیاز داشته باشند که یک دوباره‌نگری به کارشان داشته باشند و اتصالات و ارتباطات بسیاری را که ایجاد کرده‌اند، تشخیص دهند.

پیش‌دبستانی تا پایه دوم

در چند پایه اول، کودکان به حالت‌های خیلی خاص و ملموس فکر می‌کنند. آن‌ها به مقوله‌های بزرگی مانند ریاضی، علوم و تکنولوژی، علاقه‌اندکی نشان می‌دهند، اما معمولاً به چالشی حاصل از یادگیری اعداد و چگونگی دست‌ورزی با آن‌ها، تشخیص شکل‌ها و الگوهای ساده، جمع‌آوری و شرح مجموعه‌ها، و ساخت چیزها، واکنش مثبت نشان می‌دهند. البته در بعضی اوقات، کودکان نیاز دارند ببینند که انواع معینی از ایده‌ها و فعالیت‌ها، ریاضی‌وار هستند؛ انواع معینی علمی و سایرین، تکنولوژیکی هستند. اما هنگامی که چنین

چیزها به راه‌های گوناگون، اغلب به طور خشونت‌بار اما گاهی هم بسیار نافذ، در کار هم دخالت می‌کنند. اما باید از ریاضی ممنون بود که مردم را قادر ساخته است تا درباره دنیای اشیا و رخدادها فکر کنند و با آن افکار، به گونه‌ای که وحدت و نظم را آشکار می‌سازد، ارتباط برقرار کنند.

اعداد، خطوط، زاویه‌ها، اشکال، ابعاد، میانگین‌ها، احتمالات، نسبت‌ها، عملیات، چرخه‌ها، همبستگی‌ها و نظایر آن‌ها که دنیای ریاضی را می‌سازند، مردم را توانمند می‌کنند تا جهان را معنادار ببینند، جهانی که در غیاب ریاضی ممکن بود به طور ناامیدکننده‌ای، به نظر پیچیده بیاید. الگوها و روابط ریاضی، در طی قرن‌ها توسعه یافته و پالوده شده‌اند و این فرآیند فعلی، به همان اندازه دقیق و مولد است که در هر دوره‌ای از تاریخ، چنین بوده است. شاید علت آن، این باشد که امروز، ریاضی در حوزه‌های بیش‌تری از تلاش و فعالیت مورد استفاده قرار گرفته است و هم‌چنین، در زندگی روزانه نقش اساسی‌تری پیدا کرده است.

با توجه به هدف‌های سوادآموزی عمومی علوم، برای دانش‌آموزان مهم است که (۱) بفهمند که به چه معنا، ریاضی مطالعه الگوها و روابط است، (۲) با بعضی از آن الگوها و روابط آشنا شوند، و (۳) یادگیرند که از آن‌ها در زندگی روزانه استفاده کنند. دو مورد آخر، به جای دو هدف پشت‌سرهم، باید به عنوان دو هدف موازی دیده شوند. در بیش‌تر قسمت‌ها، ثابت شده است که یادگیری ریاضی در تجرید (انتزاع) و قبل از یافتن مورد استفاده آن، ناکارآمد است. پس، برنامه درسی، باید طوری تدریس را تنظیم کند که در بسیاری از زمینه‌های مختلف، دانش‌آموزان با هر الگو یا رابطه ریاضی؛ قبل، در طی، و بعد از معرفی آن در خود ریاضی، رویاروی شوند.

بعد از آن، گاه به گاه به منظور فهمیدن ماهیت ریاضی، دانش‌آموزان باید فرصتی در ریاضی پیدا کنند که بر ماهیت الگوها و روابط به شکل کاملاً مجرد، بازتاب داشته باشند. می‌توان از پرونده‌های تحصیلی^۲ فردی یا کلاسی شامل مثال‌هایی از الگوها و روابطی که به مرور جمع‌آوری شده‌اند، به عنوان مواد خامی برای بازتاب بر چگونگی تعریف یک الگو یا رابطه توسط ریاضی استفاده کرد، به گونه‌ای که ریاضی بیش‌تر تعالی یابد و الگوها و رابطه‌ها، از هر مثال یا مورد مجزای [ریاضی]، قوی‌تر شوند. ایده‌های مجزا که توسط ریاضی‌دان‌ها خلق و استفاده شده‌اند، اغلب هم به دلایل پداگوژیکی و هم به دلایل منحصراً

برچسب زدنی رخ می دهد، اهمیت آن کمتر از آن است که از همان ابتدا، کودکان اعداد و شکل ها و عملیات ساده روی آن ها را مطالعه و این کار را تا حد امکان، در زمینه های مختلف انجام دهند.

در پایان پایه دوم، دانش آموزان باید بدانند که:

- دایره ها، مربع ها، مثلث ها و سایر شکل ها می توانند در چیزهایی که در طبیعت یافت می شوند و در چیزهایی که مردم می سازند، پیدا شوند.
- الگوها می توانند با وصل کردن شکل های مختلف یا جدا کردن آن ها از هم، ساخته شوند.
- چیزها می توانند برای شمارش هر مجموعه ای از چیزها، مورد استفاده قرار گیرند.

پایه های سوم تا پنجم

اگر یک استراتژی اساسی برای یادگیری درباره ماهیت ریاضی، بازتاب بر چیزهایی باشد که در حال حاضر، در زمینه های گوناگون آموخته شده است، در این صورت، یک احتمال این است که فهرستی در کلاس درس با عنوان «در ریاضی چه انجام می دهیم» داشته باشیم، به طوری که هر ماه، اقلام جدیدی به این فهرست اضافه شود. گاه به گاه، این اقلام می توانند به صورت یک گروه به هم پیوندند یا به عنوان زیرمجموعه ای از اقلام دیگر نشان داده شوند، یا نشان دهیم که مشابه این اقلام، فهرست های دیگری با عنوان های «در علوم چه انجام می دهیم» و «در زبان چه انجام می دهیم»، هستند. اگر قرار باشد که بر اختلاف های موضوعی کمتر تأکید شود، یک بدیل احتمالی برای استفاده، می تواند «اعدادی که استفاده کرده ایم»، «شکل هایی که استفاده کرده ایم (یا ساخته ایم)»، «مشاهداتی که انجام داده ایم» و نظایر آن ها باشد.

برای مثال، فهرست ریاضی می تواند ابتدا شامل شمارش، اندازه گیری، تخمین و دیدن شکل ها در چیزها باشد. سپس، این فهرست گسترش یابد تا شامل جمع، تفریق و غیره گردد. بعداً، دانش آموزان می توانند جمع، تفریق و غیره را تحت عنوان انجام عملیات روی اعداد گروه بندی کنند و [به همین ترتیب] رسم نمودارها، نمایش داده ها و مقایسه دو گروه از داده ها تحت عنوان تجزیه و تحلیل داده ها را نیز در یک گروه جای دهند. ممکن است اندازه گیری در فهرست های ریاضی و علوم قرار

گرفته باشد، هم چنان که اغلب اقلام مربوط به داده ها نیز می تواند در این فهرست قرار گیرد و اتصالات را به نمایش بگذارد. اقلامی مانند الگویابی، شرح روابط و ارایه استدلال، ممکن است هم در فهرست زبان، و هم در فهرست های دیگر نیز ظاهر شوند. بدین ترتیب، دانش آموزان فهرستی از [دانشته های] ریاضی خود و سیر تاریخی آن چه که یاد گرفته اند را می سازند و تازه واردها می توانند به نسبت این که توقع درک چه ایده هایی (و در چه زمان هایی) از آن ها می رود، ایده ای به دست آورند.

در پایان پایه پنجم، دانش آموزان باید بدانند که:

- ریاضی [علم] مطالعه انواع زیادی از الگوها شامل اعداد و شکل ها و عملیات روی آن ها است. در بعضی اوقات، الگوها به دلیل این که به شرح چگونگی کار جهان یا چگونگی حل مسایل عملی کمک می کنند، مطالعه می شوند. در مواقعی نیز، الگوها به خاطر جالب بودنشان مورد مطالعه قرار می گیرند.
- ایده های ریاضی می توانند به صورت ملموس، نموداری و نمادین معرفی شوند.

پایه های ششم تا هشتم

[معادل اول تا سوم راهنمایی در ایران]

در پایه های قبلی و خوش بینانه، در سایر کلاس ها نیز دانش آموزان الگوهای ریاضی و روابط موجود در ریاضی را مطالعه کرده اند. حالا، آن ها باید تجربه قابل ملاحظه ای در ایجاد جدول داده ها، نمودارها، و رسم های هندسی داشته باشند تا به همراه نمادها و انگلیسی سلیس، بتوانند از آن ها برای شرح گوناگونی وسیع الگوها و روابط، استفاده کنند. پس، در حال حاضر، دانش آموزان آماده هستند تا نسبت به گذشته، بر جنبه های خلاقانه تر حل مسأله ریاضی، عمیق تر تمرکز کنند و نسبت به این که ریاضی دان ها چگونه کار ریاضی خود را انجام می دهند، احساسی به دست آورند.

دانش آموزان با بازتاب بر آن چه که در ریاضی انجام می دهند، شروع می کنند. گروه های دانش آموزان باید به طور مستقل، راه حل های مسایل را پیشنهاد دهند و راه حل هایشان را با راه حل دیگران مقایسه کنند، در مورد اختلاف ها بحث کنند، و از آن ها دفاع نمایند. گروه ها باید به ابداع بعضی از روش های محاسباتی توسط خودشان، ترغیب شوند. یکی از نتایجی که می تواند حاصل شود این است که برای حل یک مسأله، بیش از

که ممکن است استعداد ریاضی از کار دریاید، ترغیب کنیم. درک ماهیت ریاضی فعلی، که هنوز مشغول استخراج الگوها و روابط جدید است تقریباً برای تمام دانش‌آموزان یک چالش محسوب می‌شود. ممکن است که ریاضی نظری مدرن، با تلاش برای حل انواع مسایل عملی- از جمله رنگ کردن نقشه‌ها، بهینه‌سازی خطوط هوایی، بازیابی جزئیات از تصاویر مبهم- تولید شود. اگر دانش‌آموزان باور کنند که تجربه‌های مربوط به یک موقعیت عملی، احتمالاً به سایر موقعیت‌ها نیز مربوط است، [در این صورت] انتقال پداگوژیکی از ریاضی کاربردی به ریاضی محض، نمی‌تواند این اندیشه که علاقه ریاضی‌دان‌ها جنبه نظری دارد را، تضعیف کند.

در پایان پایه دوازدهم [پایان پیش‌دانشگاهی در ایران]، دانش‌آموزان باید بدانند که:

■ ریاضی [علم] مطالعه هر نوع الگو یا رابطه‌ای است، درحالی‌که علوم طبیعی، تنها ملاحظه آن الگوهای را دارد که مربوط به جهان قابل مشاهده هستند. اگرچه از مدت‌ها پیش، ریاضی از مسایل عملی سرچشمه گرفت، به‌زودی به تجربه‌های دنیای مادی و سپس، حتی بر روابط مجردتر میان آن تجربه‌ها، متمرکز شد.

■ در ریاضی نیز مانند سایر علوم، سادگی، یکی از بالاترین ارزش‌ها محسوب می‌شود. برخی ریاضی‌دان‌ها سعی در مشخص کردن کوچک‌ترین مجموعه از قوانینی را دارند که از آن‌ها، بتوان بسیاری از گزاره‌های دیگر را به‌طور منطقی، نتیجه گرفت.

■ نظریه‌ها و کاربردهای ریاضی، بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند. گاهی اوقات، این مسأله عملی به ایجاد نظریه‌های جدید ریاضی منجر می‌شود؛ [و] اغلب، ریاضیاتی که حتی فقط به خاطر جذابیت خودش ایجاد شده است نیز، به کاربردهای عملی منجر می‌شود.

■ از این گذشته، ریاضی جدید هم‌چنان خلق و اختراع می‌شود و هم‌چنان اتصالات و ارتباطات بین قسمت‌های مختلف ریاضی، پیدا می‌شوند.

ب. ریاضی، علوم و تکنولوژی

بیش‌تر ریاضیات، به خاطر جذابیت درونی و بدون توجه به مفید بودنش، انجام می‌شود. هنوز، بیش‌تر ریاضی کاربرد

یک‌راه حل وجود دارد. اما گروه‌های مختلف، ممکن است درباره این‌که کدام روش بهترین است، یک احساس قوی داشته باشند. در نتیجه، بعضی از شور و هیجان‌های تاریخی ناشی از اختلاف نظر درباره تجرید ریاضی را، تجربه کنند. بررسی مجموعه‌های داده‌ها، باید گروه‌های مختلف دانش‌آموزان را توانمند سازند تا روابط متفاوت و حتی متناقضی را در آن‌ها، بیابند. دانش‌آموزان هم‌چنین، می‌توانند شروع به ابداع مسایل خودشان کنند و ببینند که چگونه این مسایل با آن‌هایی که به نظر دانش‌آموزان دیگر جالب آمده است، فرق دارند.

برای بسیاری از دانش‌آموزان، «ظریف‌ترین» ریاضی ممکن است به نظر، پیچیده‌ترین ریاضی باشد. برای اثبات این‌که ساده‌ترین راه نمایش و اتصال ایده‌ها، اغلب آن‌هایی هستند که ریاضی‌دان‌ها بیش‌ترین ارزش را برایشان قایل می‌باشند، تقویت‌کننده‌های مکرر، ضروری است. اما یک اتصال و ارتباط ساده ریاضی ممکن است با یک مطالعه بسیار در هم و بر هم طولانی مدت که شامل حرکت مداوم و پرسش از یک قسمت مسأله به قسمت‌های دیگر و گاهی اوقات مواجه شدن با بن‌بست است، پیدا شده باشد.

در پایان پایه هشتم [معادل پایه سوم راهنمایی در ایران]، دانش‌آموزان باید بدانند که:

■ معمولاً، برای حل یک مسأله ریاضی تنها یک راه صحیح وجود ندارد؛ روش‌های مختلف، مزایا و مشکلات مختلفی دارند.

■ بین قسمت‌های مختلف ریاضی، می‌توان ارتباطات و اتصالات منطقی یافت.

پایه‌های نهم تا دوازدهم

[معادل اول تا سوم متوسطه و پیش‌دانشگاهی در ایران]

به منظور نشان دادن برخی از جنبه‌های اصلی چگونگی کارایی ریاضی و انواع الگوها و روابط حاصل از بررسی‌های ریاضی، می‌توان علاوه بر بازتاب بر تجربه شخصی حل مسأله، از مطالعات موردی انجام شده در رابطه با چگونگی وقوع پیشرفت‌ها در ریاضی نیز، استفاده کرد. گاهی اوقات، دانش‌آموزان ممکن است ریاضی را برای خودشان کشف کنند، و اگرچه، بعید است که این نوع کشف‌ها اصیل باشند، با این حال نسبت به این کشف‌ها، خیلی هیجان‌شان داد تا آن‌چه را

معیارهایی برای این سطح وجود ندارد.

پایه‌های ششم تا هشتم

[اول تا سوم راهنمایی در ایران]

برای یادگیری ارزش ریاضی و توسعه مهارت‌های حل مسئله ریاضی، علوم و تکنولوژی زمینه‌های غنی و به خصوص مهمی هستند. اما چنین زمینه‌هایی، منحصر به علوم و تکنولوژی نمی‌شوند. هنر، موسیقی، مطالعات اجتماعی، تاریخ، تربیت بدنی و ورزش‌ها، آموزش رانندگی، اقتصاد خانواده و سایر موضوعات درسی مدرسه‌ای نیز مکان‌های مناسبی برای یادگیری و همین‌طور، استفاده ریاضی می‌باشند.

در پایان پایه هشتم [سوم راهنمایی]، دانش‌آموزان باید بدانند که:

■ ریاضی تقریباً در تمام تلاش‌های انسانی- از چیدن آجر تا تجویز دارو و یا نقاشی یک چهره، مفید است. خصوصاً، هزارها سال است که ریاضی در پیشرفت علوم و تکنولوژی سهمیم بوده است و هنوز این مشارکت، ادامه دارد.

پایه‌های نهم تا دوازدهم

[اول دبیرستان تا پیش دانشگاهی]

در این محدوده سنی، دانش‌آموزان باید با مثال‌های تاریخی مواجه شوند تا بدانند که چگونه ریاضی در پیشرفت علوم و تکنولوژی- و برعکس- سهمیم بوده است. این مثال‌ها به قدری زیادند که در یافتن آن‌هایی که مربوط به ریاضی مورد مطالعه [در کلاس] هستند، مشکلی وجود ندارد. در بعضی مواقع، باید به استفاده از مدل‌های ریاضی در علوم و تکنولوژی توجه خاصی معطوف شود. هم‌چنین، لازم است که برنامه درسی، فرصت‌هایی را برای دانش‌آموزان ایجاد کند تا آن‌ها به وضوح، ارتباط بین ریاضی و علوم و تکنولوژی را بررسی کنند.

در پایان پایه دوازدهم [پیش دانشگاهی]، دانش‌آموزان باید بدانند که:

■ مدل‌سازی ریاضی با شبیه‌سازی این که چگونه یک دستگاه پیشنهادی ممکن است به طور نظری رفتار کند، به طراحی تکنولوژیکی کمک می‌کند.

■ ریاضی و علوم به عنوان دو حوزه عظیم، در ارزش‌ها و جنبه‌های بسیاری سهمیم هستند: باور به نظم، ایده‌آل‌های

دارد، و محرک بیش تر کارهای ریاضی، مسایل کاربردی است. علوم و تکنولوژی سهم بزرگی برای فراهم کردن چنین کاربردها و انگیزه‌هایی دارند. دانشمندان و مهندسان در حین انجام کارهایشان، یا تلاش می‌کنند تا قسمتی از ریاضی مفید را، خودشان انجام دهند، یا ممکن است از ریاضی‌دان‌ها کمک بگیرند. این کمک می‌تواند به صورت پیشنهاد یک بخش از ریاضی که در حال حاضر تمام شده است باشد که برای انجام کار آن‌ها، کافی خواهد بود یا این که ریاضی جدیدی برای انجام آن کار، تولید شود. از یک سو، موارد قابل ملاحظه‌ای از یافتن استفاده‌های جدید برای ریاضیاتی که قرن‌ها قدمت دارد، وجود دارد. از طرف دیگر، نیازهای علوم طبیعی یا تکنولوژی، اغلب منجر به صورت‌بندی ریاضی جدیدی شده است.

پیش دبستانی تا پایه دوم

در پایه‌های اولیه، دانش‌آموزان مشاهده می‌کنند، چیزها را جمع‌آوری و جور می‌نمایند، از ابزارها استفاده می‌کنند و چیزها را می‌سازند. آن‌ها نسبت به سطح رشد و توسعه خود، علوم را انجام می‌دهند و از تکنولوژی استفاده می‌کنند. در عمل مدرسه‌ای، علوم و تکنولوژی باید در ایجاد درک ارزش ریاضی، سهمیم باشند، و ریاضی باید در انجام علوم و مهندسی، کمک کند. اگر اغلب اوقات، دانش‌آموزان ریاضی را تجربه کنند، در این صورت، مفید بودن ریاضی در علوم و تکنولوژی، برای آن‌ها آشکار خواهد شد.

معیارهایی برای این سطح وجود ندارد.

پایه‌های سوم تا پنجم

هم‌چنان که دانش‌آموزان به سمت پایه‌های بالاتر ابتدایی و راهنمایی پیش می‌روند، تعامل باید مداوم‌تر و پیچیده‌تر شود. هم‌چنین، استفاده از مفاهیم هندسی و ریاضی مانند خط قائم، محیط، حجم، توان‌ها، ریشه‌ها و اعداد منفی، رسم نمودار، ساختن جدول، مقیاس نقشه‌کشی نیز باید در تحقیق دانش‌آموزی و طراحی پروژه‌ها، متداول شوند. مسایلی که ممکن است برای به چالش انداختن دانش‌آموزان استفاده شود، می‌توانند شکل مسابقه‌ها و بازی‌ها را به خود بگیرند، اما حداقل، بعضی از مسئله‌ها باید به طور مستقیم، از علوم و تکنولوژی مورد مطالعه [در کلاس]، نشأت بگیرند.

مطالعه قرار گیرند. دانش آموزان باید شانس استفاده از تمام قسمت های این چرخه را در هنگام انجام بررسی های ریاضی خود، داشته باشند. هدف این تجربه، تربیت ریاضی دان های حرفه ای نیست، بلکه هدف، تربیت بزرگسالانی است که با تحقیق ریاضی، آشنا باشند.

هر قسمت از این چرخه، برخی مشکلات یادگیری را مطرح می سازد. برای خیلی از دانش آموزان، فرآیند بازنمایی چیزی به وسیله یک نماد یا عبارت، فقط به «اشیای واقعی» ارجاع داده می شود. برای دانش آموزان، درک این عبارت که «فرض کنید A مساحت کف این اتاق باشد»، نسبت به درک «فرض کنید Y مساحت هر مستطیلی باشد»، آسان تر است. اولاً، دانش آموزان باید متقاعد شوند که جانشین کردن نمادهای مجرد به جای کمیت های واقعی، ارزش تلاش را دارد. سپس آن ها، نیاز دارند که به گونه ای کار کنند تا تشخیص دهند که استفاده از نمادها برای معرفی تجربدها و تجربدهای تجریدهها نیز در حل مسأله ها، به درد می خورد. شاید این روش ها سبب شوند تا دانش آموزان ببینند همان طور که آجرها، گاوها و دلارها واقعی هستند، به همان ترتیب نیز در دنیای ریاضی؛ اعداد، شکل ها، عملیات، نمادها و نمادهایی که مجموعه هایی از نمادها را بیان می کنند، واقعی هستند.

در رابطه با دست ورزی، دو شرط وجود دارد که ممکن است به نظر دانش آموزان، با هم متناقض باشند. یکی از این شرط ها این است که همیشه، مجموعه ای از قوانین وجود دارند و باید آن ها را اکیداً رعایت کرد؛ و شرط دیگر این است که قوانین می توانند ساخته شوند. این جایی است که دقت و روح بازی ریاضی، با هم تلاقی می کنند. بعضی کمیت ها را تصور کنید، خواصی به آن ها نسبت دهید، بعضی عملیات را انتخاب کنید، هر چیزی را با نمادها نمایش دهید، یک مسأله تنظیم کنید و سپس، با پیروی از قوانین منطقی که به کار گرفته شده است، نمادها را برای دیدن این که چه راه حل هایی بروز می کنند، حرکت دهید.

اما راه حل ها چقدر خوب هستند؟ خوب بودن راه حل ها، بستگی به این دارد که چه چیزی است که ممکن است دانش آموزان در درک آن، مشکل داشته باشند. دانش آموزان به حل مسأله های ریاضی که در آن ها، رویه ها از قبل تعیین شده اند و جواب های «صحیح» مورد انتظارند، خو گرفته اند. اما در تحقیقات واقعی ریاضی، یک راه حل خوب، آن است که به

صداقت و صراحت، اهمیت نقادی توسط همکاران علمی و نقش بنیادینی که تخیل بازی می کند.

■ ریاضی به منظور شرح اشیا و رخدادها، مشخص کردن روابط بین متغیرها و بحث منطقی، زبانی دقیق در اختیار علوم و تکنولوژی قرار می دهد.

■ پیشرفت های علوم یا تکنولوژی، اغلب با معرفی انواع جدید مسایلی که باید حل شوند، نوآوری ها را در ریاضی، تحریک و ترغیب می کنند. به خصوص، توسعه تکنولوژی کامپیوتر (که خود به ریاضی متکی است) انواع جدیدی از مسایل و روش های کار را در ریاضی، تولید کرده است.

■ توسعه ها و پیشرفت های ریاضی اغلب باعث تحریک و ترغیب نوآوری ها در علوم و تکنولوژی می شود.

ج. بررسی تحقیق ریاضی

واقعاً، ریاضی دان ها هنگام انجام ریاضی، دقیقاً چه می کنند؟ برای اغلب کارها، افراد نسبت به چگونگی انجام آن ها، درکی دارند، حتی اگر آن درک، در جزئیاتش، دقیق نباشد؛ زیرا به طور شخصی یا غیر مستقیم، و از طریق کتاب ها، فیلم ها و تلویزیون، با آن ها مواجه شده اند. اما در مورد ریاضی [چنین نیست، زیرا] مردم، شانس کمی برای این که ریاضی دان ها را هنگام کار ببینند یا وصف کارهایشان را از زبان خودشان بشنوند، داشته اند. برای دانش آموزان، یادگیری چگونگی حل انواع معینی از مسایل خوش تعریف ریاضی مهم است، اما این یادگیری، دانش آموزان را به طور خود به خودی به درک وسیعی از چگونگی انجام تحقیقات ریاضی، هدایت نمی کند.

ریاضی می تواند به عنوان چرخه ای از تحقیق هایی شناخته شود که هدف آن ها، تمایل به سمت توسعه ایده های معتبر ریاضی است. این رویکردی است که در علوم برای تمام آمریکایی ها و در بخش معیارها، اتخاذ شده است.

به خاطر سپردن این نکته مهم است که همان گونه که کشف در علوم، حاصل مجموعه ای از گام های دقیق نیست، کشف در ریاضی نیز همین طور است. درست است که تحقیق های ریاضی، دیر یا زود با فرآیندهای مشخص درگیر می شود، اما ترتیب این درگیری، ثابت نیست و تأکیدی که بر هر فرآیند گذاشته می شود، بسیار متفاوت است. هر یک از سه قسمت این چرخه - بازنمایی، دست ورزی و اعتبار بخشی - به عنوان قسمتی از آن چه که یادگیری ریاضی را تشکیل می دهد، باید به نوبه خود، مورد

پایه های ششم تا هشتم

[اول تا سوم راهنمایی]

دانش آموزان باید شروع به تخصیص حروف به عنوان اسامی موقت اشیای ریاضی یا غیر ریاضی - که هیچ نام دیگری برای آن‌ها مشخص نیست - بکنند تا از این طریق، بتوانند راجع به آن اشیاء بحث کنند. تدریجاً، اندیشه استفاده از یک نماد برای نمایش یک مجهول خاص می تواند به ایده جایگزین کردن یک نماد برای مجموعه ای از مجهول های ممکن، گسترش یابد. بدون شک، هنگامی که دانش آموزان، ریاضی جدیدی را یاد می گیرند، اغلب باید به ایده های ملموس، رجوع کنند.

دانش آموزان باید محدودیت های بعضی از مدل های ریاضی را در شرح و پیش بینی رخدادها در دنیای واقعی، بررسی کنند. (نتایج دلسردکننده مدل سازی ریاضی، ممکن است حاصل تغییرات غیرقابل پیش بینی در دنیای واقعی و نیز استفاده از یک مدل ریاضی نامناسب باشد. دانش آموزان باید ترغیب شوند تا ضوابط خودشان را برای تشخیص رضایت بخش بودن یک نتیجه، تعیین کنند و با توجه به اهداف خود، قضاوت های خود را به بحث بگذارند.)

تصنعی بودن مسایل، باید به حداقل برسد؛ زیرا همیشه، یک جواب درست شسته رفته وجود ندارد. و بنابراین، بهبودها و بدیل ها در راه حل ها می توانند از طریق چرخه ریاضی آزمون، ارزشیابی و تجدیدنظر، صورت گیرند. باید بین اشتباهات (مانند عمل ضرب نادرست) و انتخاب های منطقی که ناموفق از کار درمی آیند (و می توانند دوباره، در نظر گرفته شوند) تمایز قایل شد.

در پایان پایه هشتم [پایه سوم راهنمایی]، دانش آموزان باید بدانند که:

■ ریاضی دان ها، اغلب چیزها را با ایده های مجردی مانند اعداد یا خطوط کاملاً راست، نمایش می دهند و سپس، با آن ایده ها به تنهایی کار می کنند. «چیزهایی» که ریاضی دان ها به ایده های مجرد تبدیلشان می کنند، ممکن است خود ایده ها باشند (برای مثال، یک گزاره درباره «تمام مثلث های متساوی الساقین» یا «تمام اعداد منفی»).

■ هنگامی که ریاضی دان ها برای کار با بازنمایی های چیزها، از قوانین منطقی استفاده می کنند، نتایج حاصل، ممکن است برای خود چیزها معتبر باشند یا نباشند. حل یک مسأله مستلزم این

کشف های جدید ریاضی منتهی شود یا به نتایج عملی در علوم، پزشکی، مهندسی، بازرگانی یا جای دیگر، منجر گردد. پس، معتبر سازی در ریاضی، مسأله اقتدار نیست بلکه مسأله قضاوت است و وقتی که یک راه حل، رضایت بخش نیست، ممکن است علت آن، حسی باشد که بخواهیم بدانیم چه راه حلی، به اندازه کافی خوب است یا این که مسأله، چگونه صورت بندی شده و چگونه حل شده است؟

پیش دبستانی تا پایه دوم

اشیای ملموس، باید به کرات به کار گرفته شوند تا به کودکان، در کشف و شرح روابط نمادین کمک شود. دانش آموزان باید ببینند که اعداد و شکل ها می توانند برای توصیف بسیاری چیزها در دنیای اطرافشان مورد استفاده قرار گیرند. سرانجام، آن ها باید تشخیص دهند که همان طور که در خواندن و نوشتن، حروف و کلمه ها یک زبان را می سازند؛ اعداد و شکل ها نیز زبانی در ریاضی ایجاد می کنند.

در پایان پایه دوم، دانش آموزان باید بدانند که:

■ اعداد و شکل ها، برای صحبت درباره چیزها می توانند مورد استفاده قرار می گیرند.

پایه های سوم تا پنجم

علاوه بر این، استفاده معمولی (روتین) از اشیای ملموس، در کمک به دانش آموزان در اتصال چیزها و پیشامدهای واقعی به بازنمایی های مجردشان، اساسی هستند. توانایی به تصویر کشیدن چیزها و انجام چیزها در ذهن با ارجاع مکرر به کاربردهای دنیای واقعی، ارتقا خواهد یافت. دانش آموزان باید ترغیب شوند تا انواع چیزها را به صورت ریاضی - بر حسب اعداد، شکل ها و عملیات - توضیح دهند.

در پایان پایه پنجم، دانش آموزان باید بدانند که:

■ اعداد و شکل ها - و عملیات روی آن ها - به توضیح و پیش بینی چیزهای دنیای اطرافمان، کمک می کنند.

■ در استفاده از ریاضی، در مورد این که کدام عملیات بهترین نتیجه را خواهند داد، باید انتخاب هایی صورت گیرد. قضاوت در مورد نتایج، باید همیشه بر حسب معناداری و سودمندی آن عملیات باشد.

به طور وسیعی، کاربردی باشد. قوانین بازی نباید به طور دو طرفه، متناقض باشند. حداقل درون هر کاربرد مورد نظری، نباید متناقض باشند.

در پایان پایه دوازدهم [پیش دانشگاهی] دانش آموزان باید بدانند که:

■ بعضی کارها در ریاضی، بسیار شبیه یک بازی است. ریاضی دان ها مجموعه جالبی از قوانین را انتخاب می کنند و سپس طبق آن ها، بازی می کنند تا ببینند چه اتفاقی می افتد. جالب ترین نتیجه، بهترین نتیجه است. تنها محدودیت بر مجموعه این قوانین، این است که آن ها نباید یکدیگر را نقض کنند.

■ بیش تر کار ریاضی دان ها، درگیر یک چرخه مدل سازی است که شامل سه گام می باشد: (۱) استفاده از تجربی ها برای نمایش چیزها یا ایده ها. (۲) دست ورزی با تجربی ها مطابق با بعضی قوانین منطقی و (۳) کنترل این که نتایج، چقدر خوب با چیزها یا ایده های اصلی، تطابق دارند. اگر این تطابق به اندازه کافی خوب باشد، در این صورت ممکن است که دور جدیدی از تجرید و دست ورزی شروع شود. لازم نیست که تفکر واقعی، با نظم منطقی این فرآیندها را طی کند، بلکه ممکن است با هر نظم دیگری، از یکی به دیگری، انتقال یابد.

است که انتخاب کنیم که چه ریاضی ای استفاده کنیم؛ مانند ساده کردن فرض ها، تخمین ها یا تقریب ها؛ انجام محاسبات؛ و سپس کنترل این که، آیا جواب معنادار است یا خیر. اگر به نظر برسد که یک جواب، برای هدف خواسته شده به اندازه کافی معنادار نیست، آن وقت ممکن است هریک از این گام ها، نامناسب باشد.

پایه های نهم تا دوازدهم

[اول تا سوم متوسطه و پیش دانشگاهی]

برای جلوگیری از کسب این ایده که همیشه، یک مدل ریاضی به عنوان بهترین مدل برای مسایل تکنولوژی و علوم وجود ندارد، باید فرصت هایی برای دانش آموزان فراهم شود تا طی آن ها، دانش آموزان ببینند که بیش از یک توصیف ریاضی برای یک مسأله، وجود دارد که به نظر می رسد تمامی آن ها، از درجه اهمیت یکسانی برخوردارند. در ابتدا، چرخه استدلال ریاضی می تواند از طریق وادار کردن دانش آموز به مرور مسأله ای که قبلاً حل کرده اند و سپس با توجه به آن حل، در هر زمانی که به مسأله های جدید میل می کنند، به طور شفاف مورد ملاحظه قرار می گیرد. تصور بعضی از قسمت های ریاضی به عنوان یک «بازی» که قوانین اختیاری خود را دارد، باید شامل ایده ای باشد که بازی، با این هدف انتخاب می شود که نتایج آن جالب و

زیرنویس ها

ضمن آن به دو پروژه معروف «علوم برای تمام امریکایی ها» و «معیارها برای سواد آموزی علوم»، ارجاع داده شده است، حذف گردیده است.

1. Designs for Science Literacy
2. Portfolios
3. Mathematical Connection

* ترجمه اولیه این مقاله، به سفارش «مؤسسه پژوهشی، برنامه ریزی درسی، نوآوری های آموزشی» صورت گرفته است. مقاله حاضر، با اندکی ویرایش و تلخیص از متن اولیه به دست آمده است.

** قسمتی از مقاله که به معرفی جایگاه این فصل در پروژه ۲۰۶۱ اشاره شده است و در