فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۵ (پاییز ۱۳۷۹)، صص. ۶۵ تا ۷۱

معرفی و نقد کتاب

ایده‌آل‌ها، واریته‌های جبری و الگوریتم‌ها

نویسندگان: دیوید کُکس، جان لیتل و دُنال اُ شی[1]

حسن حقیقی

مخاطبین کتاب:

این کتاب با هدف نگارش مقدمه‌ای بر هندسهٔ جبری و جبر جابه‌جایی تألیف شده است و مخاطبین آن دانشجویان سال دوم به بعد دوره کارشناسی می‌باشد. کل مطالب کتاب در ۹ فصل تنظیم شده و می‌توان آنرا در دو ترم ۱۵ هفته‌ای تدریس نمود. همچنین این کتاب برای افرادی که علاقه‌مند به موضوع هندسه جبری باشند و بخواهند به‌طور انفرادی آن را مطالعه نمایند نقطه شروع خوبی خواهد بود.

موضوع هندسه جبری، مطالعه خواص مجموعه جواب‌های مشترک دستگاه معادلات

$$f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0$$

1) David Cox, John Little, Donal O'Shea, **Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Second edition.** Undergraduate Texts in Mathematics. ***Springer-Verlag, New York,*** **1997. xiv+536 pp. ISBN: 0-387-94680-2**

می‌باشد که f_iها چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در k هستند. به عبارت دیگر اعضای حلقهٔ $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ می‌باشند. مجموعهٔ جواب‌ها، موسوم به مجموعهٔ جبری، نیز در مجموعهٔ k^n جستجو می‌شود که k میدانی به طور جبری بسته است. قضیهٔ صفرهای هیلبرت به کمک فرض اخیر بیان می‌دارد مجموعهٔ جواب‌های هر دستگاه معادلات چندجمله‌ای ناتهی است اگر و فقط اگر ایده‌آل پدیدآمده توسط این چندجمله‌ای‌ها شامل عنصر یکه نباشد.

هندسه جبری از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات است. ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد و یا حل معادله $x^3 = 2$ از جمله مسائلی بودند که حل آنها تلاش‌های زیادی را برانگیخت. مقاطع مخروطی، که بعد از خط ساده‌ترین نوع خم‌های جبری هستند در یونان باستان شناسائی و طبقه‌بندی شده بودند. حل معادلات درجه دوم و یا حل مسائل مربوط به مساحی زمین‌ها در بابل، مثال‌هایی در جهت تأیید ادعای فوق می‌باشند. به این ترتیب قدمت این رشته تقریباً به اندازه قدمت نظریه اعداد است. این ویژگی سبب شده تا این رشته نیز همانند نظریه اعداد راه رشد و تعالی خود را در طی زمان بپیماید و محل تلاقی شاخه‌های مختلف ریاضیات، همچون توپولوژی، آنالیز مختلط، نظریه گروه‌ها و ... و استفاده از مفاهیم و روش‌های آنها برای حل مسائل هندسی گردد به طوری که در ۱۴۰ سال اخیر، ۳ بار مبانی اصل موضوعی این شاخه، یکبار در دهه ۶۰ قرن نوزدهم توسط ماکس نوتر و ددکیند، یک بار در دهه‌های ۲۰ و ۳۰ قرن بیستم توسط وان‌دروردن و اسکارزاریسکی و یک بار نیز در دهه ۵۰ قرن بیستم، توسط گروندیک مورد بازبینی و تنظیم مجدد قرار گیرد.

وان‌دروردن و زاریسکی مفاهیم و تکنیک‌های جبر جابه‌جایی را برای اثبات قضایای هندسی به طور وسیعی به کارگرفتند. ژان پیر سر با ابداع مفهوم شیف، آندره ویل با ابداع مفهوم بافه‌های خطی و گروتندیک با ابداع مفهوم اسکیم تحولی شگرف در این رشته پدید آوردند و این تحولات سبب شد تا دامنه اشیایی که در تئوری جدید هندسه جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرند بسیار وسیع‌تر از هندسه جبری کلاسیک، که تنها جواب‌های دستگاه معادلات را در یک فضای آفین یا تصویری مورد مطالعه قرار می‌داد، باشد. کتاب‌هایی که در زمینه هندسه جبری، در سال‌های ۱۹۵۵ به بعد منتشر شده‌اند با تأثیر از این تحولات، موضوعات هندسه جبری را با کمک مفاهیم جدید پدید آمده توسط افراد فوق، بیان کرده‌اند. این زبان به دلیل ماهیت مجرد خود و استفاده وسیع از مفاهیمی انتزاعی چون شیف، اسکیم، بافه‌ها، دستگاه‌های خطی، بخشیاب‌ها و ... در نگاه اول کمی نامأنوس و غریب می‌نماید. دانشجوی جدید این رشته، در مقایسه می‌بایست زمان بیشتری را صرف کند تا با مفاهیم اصلی و زیبای هندسه جبری مأنوس شود و از آن لذت ببرد. اگرچه این مفاهیم دامنه اشیاء مورد مطالعه این رشته را بسیار گسترده کرده است اما برای درک آنها لازم است خواننده با مثال‌های بسیاری از هندسه جبری کلاسیک آشنا باشد تا با متبلور ساختن این مفاهیم مجرد در این مثال‌ها، به طور مؤثرتری مفاهیم مطروحه در هندسه جبری جدید را دریابد. بنا بر قضیه صفرهای هیلبرت به هر شیء هندسی، یعنی مجموعه‌های جبری، یک شیء جبری، یعنی ایده‌آل پدیدآمده توسط معادلات تعریف‌کننده مجموعه جبری در A، که ایده‌آلی رادیکال است نظیر می‌گردد و برعکس به هر ایده‌آل

رادیکال A یک مجموعه جبری در k^n. اگر نتوان مجموعه جبری X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه سره و بسته آن نوشت، مجموعه تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود. ایده‌آل متناظر به این مجموعه یک ایده‌آل اول A می‌باشد. زوج $(X, A/P)$ را یک واریته آفین می‌نامند. برعکس هر $k-$جبر متناهی تولیدشده، که هیچ مقسوم علیه صفری نداشته باشد یک واریته آفین را معین می‌کند. واریته‌های آفین از جمله اشیای اصلی مورد مطالعه در هندسه جبری هستند.

به این ترتیب این تناظر دوسویی بین kـجبرهای متناهی تولیدشده و واریته‌های آفین سبب می‌شود تا خواص جبری حلقه A نقطه تلاقی مفاهیم جبر جابه‌جایی و هندسه گردیده و هر دو رشته از موضوعات و مفاهیم مطروحه در یکدیگر بهره‌مند گردند. به‌خصوص تکنیک‌های جبر جابه‌جایی به طور وسیعی برای حل مسائل هندسی از نوع فوق به کار برده می‌شوند. به عنوان مثال هموار بودن X را می‌توان بر حسب خواص ژاکوبین ایده‌آل تعریف کنندهٔ X بیان کرد. یا بعد X را می‌توان از بعد حلقهٔ متناظر به آن که محاسبه آن آسان‌تر است به دست آورد. می‌توان هر زیرواریتهٔ X را به یک ایده‌آل اول A/P نظیر کرد و خواص این زیرواریته‌ها را بر حسب حلقه‌های متناظر به آن مطالعه نمود و یا بسیاری از خواص X را بر حسب خواص حلقه‌های موضعی‌شدهٔ A در یک ایده‌آل اول بیان و اثبات نمود. همچنین این تناظرها نقطه آغاز نظریه جدید هندسه جبری است.

در اواخر دههٔ شصت میلادی قرن بیستم، بوخ‌برگر موفق شد مسأله تعمیم الگوریتم تقسیم در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های از یک متغیر و با ضرایب در یک میدان را به حالت nمتغیر، که از ابتدای قرن بیستم توسط مک‌آولی مطرح شده بود، حل کند و به کمک آن تعداد جواب‌های متناهی یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای از چند متغیر را، در صورت وجود، تعیین کند. اگرچه الگوریتم وی برای یافتن تعداد جواب‌های متناهی ابداع شده بود ولی به‌زودی دریافتند که این الگوریتم را می‌توان برای پیداکردن مجموعهٔ جواب‌های هر دستگاه از معادلات چندجمله‌ای به کار بست. اولین کاربردهای آن محاسبه بعضی ناورداهای واریته‌های جبری مانند بعد، چندجمله‌ای هیلبرت ایده‌آل متناظر به آن، مخروط مماس، الگوریتم‌هایی برای محاسبه اجتماع و اشتراک دو واریته، رادیکال یک ایده‌آل، تجزیهٔ یک مجموعه جبری به مجموعه‌های تحویل‌ناپذیر و ... می‌باشند. به این ترتیب روش‌های الگوریتمیک در هندسهٔ جبری، که برای مدتها مهجور مانده بود، دوباره به‌کار گرفته شدند و زمینهٔ تحقیقاتی جدیدی تحت عنوان هندسهٔ جبری محاسباتی جای خود را به عنوان یک زیرشاخهٔ مستقل در این رشته بازکرد.
الگوریتم ابداع‌شده توسط بوخ‌برگر یک مجموعهٔ مولد برای هر ایده‌آل حلقه A تولید می‌کند که به پایه گروبنر برای آن ایده‌آل موسوم است. بزرگ‌ترین جمله هر یک از این مولدها، نقش اساسی در محاسبات مربوط به آن ایده‌آل ایفا می‌کند.

الگوریتم‌هایی که بر پایه این الگوریتم پدید آمدند به همراه زبان‌های برنامه‌نویسی و سیستم‌های قوی کامپیوتری راهگشای پیدایش نرم‌افزارهایی موسوم به جبر کامپیوتری گردیده‌اند، نرم افزارهایی همچون Singular, Reduce, COCOA, Macaulay 2, Maple, Mathematica و غیره محصول این

تلاش‌ها می‌باشند که موارد استفادهٔ آموزشی برای ساختن برخی اشیاء هندسی و متناظر آنها در حلقه چندجمله‌ای‌ها، و نیز موارد استفادهٔ صنعتی فراوانی پیدا کرده‌اند.

گستردگی و پراکندگی دانش هندسه جبری و وجود سه رهیافت مستقل به موضوع، یعنی رهیافت توپولوژیک، رهیافت تحلیلی و رهیافت مبتنی بر جبر جابه‌جایی، نه‌تنها انتخاب مطالب لازم برای آموزش این مطالب را مشکل می‌سازد، بلکه بیان آنها به زبانی ساده، که حافظ چارچوب منطقی و کلی اشیائی باشد که با این مفاهیم شناسانده می‌شوند، نیز کار نویسنده را مشکل‌تر می‌سازد.

کتاب مورد بررسی به عنوان مقدمه‌ای بر هندسهٔ جبری و جبر جابه‌جایی به رشته تحریر درآمده است. رهیافت نویسندگان به موضوع به شیوه‌ای غیرمستقیم بوده و برخلاف کتاب‌های دیگر هندسه جبری، پیش‌نیازهای لازم برای بیان یک قضیه یا یک مفهوم را شرح می‌دهند و خواننده را از مراجعه به کتاب‌های مرجع برای دسترسی به اثبات احکام مورد ارجاع رها می‌سازند. این شیوهٔ بیان مطالب، کتاب را برای دانشجویانی که رشتهٔ تحصیلی‌شان ریاضی نیست و علاقه‌مند به این موضوع هستند قابل فهم‌تر می‌سازد. برای تقویت و کمک به شهود خواننده در بعضی فصل‌ها اشکال هندسی بسیار گویا و دقیقی رسم شده است. در هر بخش تمرین‌های فراوانی درج گردیده که تلاش برای حل آنها نه تنها به دانشجو کمک می‌کند تا از میزان درک خود از موضوع آگاه شود بلکه او را در تجزیه و تحلیل بیشتر موضوع مطرح‌شده در آن بخش و درک آن یاری می‌دهد. تمرین‌ها به‌نحوی تنظیم شده‌اند که دانشجو را وادار به فکرکردن و انجام محاسباتی برای به‌دست آوردنِ نتیجه می‌کند.

آن قضایایی از هندسه جبری که در محدودهٔ موضوعات مورد بحث کتاب قرارگرفته‌اند به زبانی ساده و به دور از پیچیدگی‌های ناشی از پیش‌نیازهایی که برای بیان صورت تعمیم یافتهٔ قضیه درکتاب‌های پیشرفته هندسهٔ جبری لازم است، بیان شده‌اند. این ویژگی سبب می‌شود تا ذهن خواننده سریع‌تر با نتایج این قضایا مأنوس شود.

مثال‌های ساده و گویا، که با دقتی خاص انتخاب شده‌اند و به همان اندازه قضایا و اثبات‌های آن، حامل مفاهیم هندسه جبری هستند، نه تنها ذهن خواننده را با حالت‌های خاص مفاهیم مورد بحث آشنا می‌سازد و به سادگی به‌خاطر سپرده می‌شوند بلکه شیوهٔ بدیع و خاص تجزیه و تحلیل مثال، خوانندهٔ ریزبین را به سمت تعمیم آن ویژگی‌هایی که در مثال بر آن تأکید شده و یافتن قانون کلی حاکم بر آن هدایت می‌کند، به طوری که با کمی دقت می‌تواند به زبانی نادقیق صورت قضیه‌ای را که این مثال حالت خاصی از آن را نشان می‌دهد، بیان کند. این شیوه حامل این نکته آموزشی نیز هست که چگونه می‌توان از مطالعهٔ حالت‌های خاص موضوع، به حالت تعمیم یافتهٔ آن دست یافت. همچنین نویسندگان از شیوهٔ آموزش از طریق مثال، برای تقویت شهود خواننده استفاده می‌کنند و سپس با آموزش دقیق موضوع از طریق قضیه، شهود خواننده را به اثبات می‌رسانند. این روش سبب می‌شود تا خواننده خود به سمت حدس صورت قضیه رهنمون شود و با خواندن اثبات قضیه، درک عمیق‌تری از آنچه قضیه بیان می‌کند به‌دست آورد.

این کتاب جزء اولین کتاب‌هایی است که مفهوم پایه گروبنر را به‌صورتی مدون آموزش داده و به کارگرفته

است و بخشی از یک نظریه را به زبان پایهٔ گروبنر بیان کرده است. تا قبل از انتشار این کتاب مفاهیم مربوط به پایهٔ گروبنر را می‌بایست به طور پراکنده در مجلات تحقیقاتی جستجو و مطالعه نمود. به همین دلیل اغلب مقالاتی که بعد از انتشار این کتاب، در زمینهٔ پایهٔ گروبنر و مفاهیم مرتبط با آن چاپ می‌شوند این کتاب را به عنوان یک مرجع اصلی معرفی می‌کنند. همچنین در اغلب گروه‌های ریاضی دانشگاه‌های دنیا، این کتاب به عنوان اولین متن درسی برای یک درس هندسه جبری محاسباتی و جبر جابه‌جایی محاسباتی معرفی می‌شود.

مطالب کتاب در ۹ فصل و چهار ضمیمه تنظیم شده‌اند.

فصل دوم به تعریف و بررسی خواص پایه گروبنر پرداخته است و قسمت پایه‌ای مطالب کتاب را تشکیل می‌دهد. تقریباً مطالب تمامی بخش‌های بعدی به کمک مفاهیم و مطالب این بخش بیان می‌شود. با استفاده از این مفهوم اثبات قضایایی چون قضیه پایهٔ هیلبرت و قضیهٔ صفرهای هیلبرت که در کتاب‌های هندسهٔ جبری در سطح پیشرفته با کمک پیش‌نیازهای جبر جابه‌جایی به اثبات می‌رسند، به شیوه‌ای ساده ارائه می‌گردند. این شیوه سبب می‌شود تا خواننده احساس روشنی از آنچه قضیه بیان می‌کند به‌دست آورد. ارتباط تابع هیلبرت یک ایده‌آل همگن با مجموعه جبری که آن ایده‌آل تعریف می‌کند در نگاه اول کمی اسرارآمیز جلوه می‌کند، اما با دقیق خواندن اثبات قضیه این ارتباط به‌خوبی و بدون ابهام نمایان می‌شود. نویسندگان سعی کرده‌اند با استفاده از پایه گروبنر کاربردهای آن را در هندسه جبری نشان دهند.

نظریه حذف متغیرها از دستگاه معادلات چندجمله‌ای، برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های دستگاه، از قدیمی‌ترین نظریه‌های این رشته است که همیشه توأم با محاسبات جبری کسل‌کننده بوده است و حل مسائل به کمک روش‌های آن به کندی پیش می‌رود. نویسندگان در فصل سوم کتاب بعضی مفاهیم و قضایای این نظریه را به کمک مفهوم پایهٔ گروبنر بیان می‌کنند و نتایجی که از به دست می‌آورند بسیار زیبا و به دور از کسالتی است که ممکن است از محاسبات طولانی مربوط به حذف متغیرها پدید آید. به‌خصوص با توصیف چندجمله‌ای‌های دستگاه معادلات به صورت یک ایده‌آل و با تعریف یک رابطهٔ ترتیب بر روی تک جمله‌ای‌های حلقهٔ A، ایده‌آلی که با حذف متغیرها با شیوه قدیم ممکن بود با محاسبات زیادی به‌دست آید با شرط مذکور و با استفاده از یک پایهٔ گروبنر برای آن ایده‌آل به سادگی به دست می‌آید. این شیوه نتایج نظری زیبایی به همراه دارد. به عنوان مثال مسألهٔ پیدا کردن معادلات واریته‌ای که به صورت پارامتری با معادلات

$$t_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \ 1 \leqslant i \leqslant m$$

تعریف شده به کمک پایهٔ گروبنر برای ایده‌آل $(t_1 - f_1, t_2 - f_2, \ldots, t_m - f_m)$ سریعتر به نتیجه می‌رسد. در این فصل توصیف هندسی زیبایی از فرآیند حذف متغیرها در دستگاه معادلات چندجمله‌ای که همانا تصویر واریته به مرکز یک زیرفضاست به دست می‌دهد. در قرن نوزدهم این توصیف منشاء پیدایش قضایای مهمی مانند قضیه نرمال‌سازی نوتر بوده است.

در فصل چهارم به کمک قضیهٔ صفرهای هیلبرت یک سلسله از مفاهیم معادل در هندسه و جبر

جابه‌جایی ارائه می‌شود. به کمک پایه گروبنر قضایایی را دربارهٔ واریته‌های آفین و جبر جابه‌جایی بیان و اثبات می‌نماید. به خصوص مسأله تعلق یک عنصر به یک ایده‌آل داده‌شده، حاصل جمع دو ایده‌آل، حاصل‌ضرب دو ایده‌آل، تجزیهٔ یک مجموعهٔ جبری به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر و قضایایی دیگر که همگی از قضایای مهم هندسه جبری مقدماتی و جبر جابه‌جایی مقدماتی می‌باشند را عمدتاً به کمک تکنیک‌های پایهٔ گروبنر اثبات می‌کند و برای بعضی از آنها الگوریتم‌هایی ارائه می‌نماید.

در صورت‌بندی جدید هندسه جبری مرفیسم‌های بین دو واریته یا اسکیم بیشتر از خود آنها اهمیت دارند. به همین دلیل مطالعهٔ رفتار چنین مرفیسم‌هایی همیشه در کانون توجه هندسهٔ جبری‌دانان قرار دارد. این مفهوم به دلیل تعریف مجردش ممکن است خواننده را برای یافتن مثالی مشخص در مورد آن با دشواری‌هایی مواجه نماید. با روایتی مقدماتی و طبیعی از این مرفیسم‌ها خواننده بهتر می‌تواند به علت وجودی تعاریف مجرد آن پی ببرد. فصل پنجم کتاب به معرفی توابع چندجمله‌ای از یک واریته به یک میدان و از یک واریته به یک واریتهٔ دیگر که حالت خاص مرفیسم‌ها می‌باشند و بررسی بعضی خواص آن پرداخته است.

به دلیل ماهیت مجرد هندسهٔ جبری و جبر جابه‌جایی در نگاه اول ممکن است کاربرد هندسهٔ جبری و پایه گروبنر در صنعت بعید به نظر برسد. در فصل ششم این کتاب بعضی کاربردهای پایه گروبنر در روبوتیک را توصیف می‌کند.

نظریه ناورداهای جبری، موضوع تحقیق هیلبرت، کلاین، امی‌نوتر، جردن و بسیاری دیگر از ریاضی‌دانان نیمهٔ دوم قرن نوزدهم بوده و خاستگاه بسیاری از قضایای هندسه جبری و جبر جابه‌جایی، از قبیل قضیهٔ صفرهای هیلبرت، قضیهٔ پایه هیلبرت و قضیهٔ نرمال‌سازی نوتر بوده است. در فصل هفتم برخی کاربردهای پایه گروبنر در این نظریه را بیان و قضایایی چند از آن را مانند قضیهٔ اساسی توابع متقارن، به کمک پایه گروبنر، به شیوه‌ای روشن و زیبا اثبات می‌کند.

مهم‌ترین شیء مورد مطالعه در هندسه جبری کلاسیک، واریته‌های تصویری می‌باشد. با این تفاوت که این چندجمله‌ای‌ها همگی همگن می‌باشند. این واریته‌ها دارای این خاصیت مهم هستند که هر یک از آنها را می‌توان توسط زیرواریته‌های آفین پوشاند. این خاصیت جوهرهٔ اصلی تعریف اسکیم‌ها می‌باشد. همچنین این خاصیت سبب می‌شود تا بتوان تکنیک‌های مربوط به بررسی واریته‌های آفین را در مورد بررسی خاص واریته‌های تصویری به‌کار برد. بخصوص معادلات تعریف کننده بستار تصویری یک واریته را با استفاده از همگن‌سازی پایه گروبنر ایده‌آل تعریف‌کننده آن به‌دست آورد. فصل هشتم کتاب به بررسی خواص مقدماتی واریته‌های تصویری پرداخته است و برخی مفاهیم متناظر به واریته‌های تصویری در حلقهٔ مدرج

$$k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

را بیان می‌کند. فصل نهم کتاب به مسألهٔ یافتن بعد یک واریته به کمک پایه گروبنر پرداخته است. اگرچه بسیاری از قضایای این کتاب به کمک پایه گروبنر اثبات شده و به کمک آنها برای ساختن بعضی اشیای

هندسی الگوریتمی ارائه شده است اما نمی‌توان نتیجه گرفت تمام اشیاء هندسی را می‌توان با روش‌های الگوریتمیک ساخت. این روش‌ها تنها بخشی از تفکر ریاضی هستند و کمک می‌کنند تا درک عمیق‌تری از موضوع به دست آید. خوانندهٔ محترم حتماً به این نکته پی خواهد برد که برای ارائه یک الگوریتم برای ساختن یک شییء ریاضی تسلط کافی داشتن بر نظریه بسیار ضروری است.

در پایان می‌توان گفت که نویسندگان در تلاش برای ارائهٔ عاری از پیچیدگی‌های ناشی صورت تعمیم‌یافته مطالب و آماده ساختن خواننده برای حلاجی کردن و فهم مطالب کتاب بسیار موفق بوده‌اند. سطح کتاب چشم‌انداز مناسبی از موضوع را در مقابل دیدگان خواننده قرار می‌دهد، تا به هنگام مطالعهٔ کتاب‌های پیشرفته‌تر در زمینهٔ هندسه جبری یا جبر جابه‌جایی دارای ذخیره‌ای غنی از مثال‌های خاص و روشن باشد تا با کمک آنها سرعت یادگیری خود را از مفاهیم این رشته افزایش دهد. به همین دلیل این کتاب می‌تواند آغاز خوبی برای وارد شدن به دنیای وسیع موضوعات فوق و مطالعهٔ کتاب‌های جامع‌تر و غنی‌تر در این دو رشته باشد.

در صفحه اینترنتی این کتاب، http://www.cs.amherst.edu/~dac/iva.html، اطلاعات تکمیلی مفیدتری نیز به نمایش درآمده است. به خصوص لیست غلط‌های چاپی چاپ‌های اول و دوم کتاب، بسته‌های نرم‌افزاری در محیط‌های Maple و Mathematicaبرای انجام بعضی محاسباتی که در هندسه جبری و جبر جابه‌جایی محاسباتی به تحقیق پرداخته‌اند را در بر دارد.

حسن حقیقی
دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده علوم، گروه ریاضی
پست الکترونیک: haghighi@sc.kntu.ac.ir