فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۵ (پاییز ۱۳۷۹)، صص. ۶۱ تا ۶۴

حلقه‌هایی بدون ایده‌آل‌های ماکسیمال*

پیترمالکولمسون و فرانک اکو

در کلاس جبر مجرد معمولاً رسم بر این است که با استفاده از لم زرن ثابت می‌کنند که حلقهٔ یکدار باید ایده‌ال‌های ماکسیمال داشته باشد. این مطلب بدون عنصر یکه نمی‌تواند درست باشد. در اینجا چند مثال نقض از حلقه‌های جابجایی ارائه می‌دهیم. ابتدا حلقه‌های با ضرب بدیهی، یعنی آنهایی که برایشان حاصلضرب هر دو عنصر صفر باشد را در نظر می‌گیریم. در این صورت، یک ایده‌آل دقیقاً یک زیرگروه جمعی است و ما در جستجوی گروه‌های آبلی بدون زیرگروه‌های ماکسیمال می‌باشیم.

چنین گروه‌هایی به آسانی با استفاده از نظریهٔ بخش‌پذیری مشخص می‌شوند. اگر G یک گروه آبلی باشد که به طور جمعی نوشته شده و m عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه مجموعه $\{mg|g \in G\}$ را با mG نشان می‌دهیم. دراین‌صورت G بخش‌پذیر گفته می‌شود اگر $mG = G$ برای هر عدد صحیح و مثبت m. به سادگی ثابت می‌شود گروه جمعی Q از اعداد گویا بخش‌پذیر است، و هر حاصل‌جمع مستقیم از گروه‌های بخش‌پذیر، بخش‌پذیر است.

برای هر حلقهٔ R، $R^۲$ نشان‌دهندهٔ ایده‌آل تولیدشده به وسیلهٔ مجموعهٔ تمام حاصلضرب‌ها است. در مثال بعدی داریم $R \neq R^۲ \neq 0$.

قضیهٔ ۱. یک گروه آبلی بخش‌پذیر G، زیرگروه ماکسیمال ندارد.

اثبات. فرض می‌کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد. آنگاه G/M یک گروه آبلی بدون زیرگروه سره است و لذا ایزومورف با Z_p برای یک عدد اول p است. پس $p(G/M) = 0$ که نتیجه می‌دهد $pG \subseteq M$ با توجه به خاصیت بخش‌پذیری $pG = G$ و لذا $G \subseteq M$ و این با ماکسیمال بودن M در

*) Peter Malcolmson and FranK Okoh, "Rings Without Maximal ideals"

تناقض است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $K[[X]]$ حلقه سری‌های توانی روی میدان K با مشخصهٔ صفر باشد و $R = XK[[X]]$. در این‌صورت حلقه R ایده‌آل ماکسیمال ندارد.

اثبات. توجه می‌کنیم که $R^۲ = X^۲K[[X]]$. فرض کنیم M ایده‌آل ماکسیمال موردنظر از R باشد. و یادآور می‌شویم که در $K[[X]]$ هر عنصر با جملهٔ ثابت غیرصفر دارای معکوسی در $K[[X]]$ است. ابتدا نشان می‌دهیم $R^۲ \subseteq M$. در حقیقت یا $M \subseteq R^۲$ (و لذا تساوی برقرار است چون M ایده‌آل ماکسیمال است) یا M شامل عنصری مانند XF از R می‌باشد که در $R^۲$ نیست اما در این حالت f معکوس‌پذیر است و هر عنصر $X^۲g \in R^۲$ به صورت زیر می‌باشد:

$$X^۲g = (X\ f)(X\ F^{-۱}X) \in M$$

و لذا $R^۲ \subseteq M$.

حال $R/R^۲$ ضرب بدیهی دارد و یک فضای برداری روی میدان اعداد گویا می‌باشد. بنابراین $R/R^۲$ یک گروه بخش‌پذیر است که بنابر قضیه ۱ زیرگروه ماکسیمال ندارد. اما چون $R^۲ \subseteq M$، $M/R^۲$ یک ایده‌آل ماکسیمال از $R/R^۲$ است. این تناقض بیان می‌کند که R ایده‌آل ماکسیمال ندارد.

اکنون مثال‌هایی درنظر می‌گیریم که $R = R^۲$. این موضوع نیازمند نوعی خاصیت تجزیه‌ای غیرمعمول است که برای حذف ایده‌آل‌های ماکسیمال مورد نیاز است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم A حلقهٔ چند جمله‌ای از متغیرهای (تعداد نامتناهی) $X_۱, X_۲, \ldots, X_n, \ldots$ روی حلقه جابجایی دلخواهی باشد که متغیرها در روابط $X_i^۲ = X_{i-۱}$ و $X_۰ = 0$ صدق می‌کند. فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از A متشکل از چندجمله‌ای‌ها با جملات ثابت صفر باشد. آنگاه R ایده‌آل ماکسیمال ندارد.

اثبات. فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل سرهٔ R باشد. فرض کنیم برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $X_n \in I$. آنگاه برای هر $a \in A$ داریم:

$$aX_n = (aX_{n+۱})X_{n+۱} \in I$$

و لذا $R = I$.

چون I ایده‌آل سره است n را کوچکترین عدد صحیح و مثبت که $X_n \notin I$ انتخاب می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم که ایده‌آل $J = \langle I, X_n \rangle$ (ایده‌آل تولیدشده توسط I و X_n) یک ایده‌آل سره از R می‌باشد. فرض می‌کنیم $J = R$. آنگاه

$$X_{n+۱} = a + mX_n + gX_n \qquad (۱)$$

که $a \in I$ و $g \in R$ و m یک عدد صحیح است. با ضرب دو طرف (۱) در X_n به دست می‌آوریم $X_n X_{n+1} \in I$ زیرا $X_n^2 = X_{n-1} \in I$. با استفاده از این نتیجه و ضرب کردن طرفین رابطهٔ (۱) در X_{n+1} نتیجه می‌شود $X_n \in I$. این تناقض نشان می‌دهد که ایده‌آل J سره است و بنابراین R، ایده‌آل ماکسیمال ندارد.

با یک مثال که ویژگی‌های مقسوم‌علیه صفر را نداشته باشد (قضیهٔ ۲) و در شرط $R = R^2$ (قضیهٔ ۳) صدق کند به بحث خاتمه می‌دهیم. فرض کنیم K یک میدان باشد و متغیرهای X_n را که در شرط $X_n^2 = X_{n-1}$ برای $n = 1, 2, \ldots$ صدق می‌کنند به آن الصاق می‌کنیم. در این صورت زنجیری از حلقه‌های سری‌های توانی $K[[X_0]] \subseteq K[[X_1]] \subseteq \ldots$ به دست می‌آوریم که هر متغیر می‌تواند به عنوان ریشهٔ دوم متغیر قبلی‌اش در نظر گرفته شود. اکنون علاقه‌مندیم که تنها زیرحلقه‌های $K^\circ[[X]] \subseteq K[[X]]$ متشکل از سری‌های با جمله ثابت صفر را مورد بررسی قرار دهیم. در این صورت زنجیر زیر را خواهیم داشت.

$$K^\circ[[X_0]] \subseteq K^\circ[[X_1]] \subseteq \ldots \qquad (2)$$

فرض کنیم R اجتماع حلقه‌های (۲) باشد.

قضیهٔ ۴. حلقهٔ R ایده‌آل ماکسیمال ندارد.

اثبات. فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. اگر I صفر باشد ماکسیمال نیست زیرا هر X_n یک ایده‌آل سرهٔ ناصفر تولید می‌کند. هر عنصر غیرصفر I در یکی از $K[[X_n]]$ها قرار می‌گیرد و به شکل $X_n^k f$ می‌باشد که در آن f در $K[[X_n]]$ معکوس‌پذیر است و $K > 0$. بنابر این:

$$X_n^{k+1} = (X_n^k f)(X_n f^{-1})$$

متعلق به I می‌باشد و لذا I شامل همه توان‌های بالاتر X_n است. بنابر این I شامل توانی از X_0 می‌باشد؛ فرض کنیم m کوچکترین این توان‌ها باشد. اگر $m = 1$ آنگاه $X_0 \in I$ و بحث اثبات قضیهٔ سوم نشان می‌دهد که برای عددی صحیح و مثبت n، $I \subsetneqq \langle I, X_m \rangle \neq R$. اگر $m > 1$ آنگاه ادعا می‌کنیم که ایده‌آل $J = \langle I, X_0^{m-1} \rangle$ یک ایده‌آل سره از R است. در غیراین‌صورت X_1 در J است، بنابر این:

$$X_1 = a + pX_0^{m-1} + gX_0^{m-1} \qquad (3)$$

که $a \in I$ و $g \in R$ و p یک عدد صحیح است.

حال اگر دو طرف (۳) را در X_0 ضرب کنیم آنگاه همانند قضیه (۳)، بدست می‌آوریم $X_0 X_1 \in I$. سپس، اگر دوباره طرفین (۳) را در X_1 ضرب نماییم نتیجه خواهیم گرفت $X_1^2 = X_0 \in I$ که یک تناقض است. بنابراین I نمی‌تواند ماکسیمال باشد.

متذکر می‌شویم که اگر یک حلقه یکدار R یک ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد M داشته باشد که در

رابطه $M = M^2$ صدق کند، آنگاه می‌توان نشان داد که حلقه M هیچ ایده‌آل ماکسیمالی ندارد. بنابر این، به‌ویژه حلقهٔ جرم‌های توابع پیوسته روی خط حقیقی که در نقطه صفر، صفر می‌شوند ایده‌آل ماکسیمال ندارند.

مراجع

[1] T. Hungerford Algebra, Holt, Reinhart, New York, 1974

مترجم: فرج‌الله اکرم
سمنان، آموزشکده فنی سمنان
پست الکترونیک: G.shahverani@kumesh.irost.net