فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شمارهٔ ۲۵(پاییز ۱۳۷۹)، صص. ۳۹ تا ۵۵

دوریها و متریکهای ناوردا در آنالیز مختلط *

آلکساندر.و.آیزاِاِف و ستیون.ج.کرانتس

ساختن یک دوری که نسبت به رده‌ای از نگاشتها ناوردا باشد یکی از ابزارهای اساسی در رهیافت هندسی ریاضیات است. ایدهٔ آن به کلاین[1] و حتی به ریمان[2] برمی‌گردد. در این مقاله دوریهایی را در نظر خواهیم گرفت که نسبت به نگاشتهای دو سو تمامریخت خمینه‌های مختلط ناوردا باشند. دوریهای متعددی با این خاصیت وجود دارند. تعدادی از آنها از توابع روی فضای مماس ناشی می‌شوند، به همان شیوه‌ای که متریک ریمانی روی یک خمینه یک دوری روی خمینه را نتیجه می‌دهد.

با پیروی از رهنمود ریمان، یک تابع مناسب روی فضاهای مماس را به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری «طول» بردارهای مماس در نظر می‌گیریم و می‌توانیم آن را برای تعریف طول خمها روی خمینه بکارگیریم و نهایتاً یک دوری روی خمینه بر مبنای آن تعریف کنیم. اصرار نداریم که این تابع وابسته به یک ضرب داخلی باشد. اگر خمینهٔ مختلط را با M و فضاهای مماس را با $T_p(M)$ نمایش دهیم، در این صورت با توابعی نامنفی مانند $f(p,v)$به ازای $p \in M$ و $v \in T_p(M)$ کار خواهیم کرد که $f(p,v)$ ضرب اسکالر را(اسکالرهای حقیقی یا مختلط بسته به مورد) به شکل مناسبی رعایت می‌کند. در بسیاری از موارد تابع مورد نظر نسبت به pو v پیوسته است، اما گاهی شرط پیوستگی را کنار می‌گذاریم. با انگیزه گرفتن از حالت ریمانی، تابع $f(p,v)$ را یک متریک خواهیم نامید مشروط بر آن که $f(p,v) = ۰$ فقط برای

*) Alexander V. Isaev and Steven G. Krantz, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Notices of the AMS, **47**(May 2000),546-553.

آلکساندر و. آیزاِاِف پژوهشگر ریاضی در دانشگاه ملی استرالیا است و از بورس ARC بهره گرفته است. نشانی پست الکترونیک وی چنین است: Alexander.Isaev@anu.edu.au.

ستیون ج. کرانتس ویراستارِ وابستهٔ مجلهٔ (Notices) و استاد دانشگاه واشینگتن در سن‌لویی است. نشانی پست الکترونیک وی چنین است: sk@math.wustl.edu . برای این مقاله از دو طرح پژوهشی NSF به شماره DMS-9531967 و DMS-9631359 نیز بهره گرفته است.

1) Klein 2) Riemann

$v = 0$ اتفاق افتد، وگرنه در حالت کلی آن را شبه متریک خواهیم گفت. نامساوی مثلث را برای $f(p, v)$ نسبت به v هنگامی که p ثابت است، تحمیل نخواهیم کرد؛ اما اگر نامساوی مثلث برقرار بود تابع f را نُرم یا شبه نُرم خواهیم نامید.

اگر تابع «طول» از ضرب داخلی ناشی شود، در این صورت متریک را طبق معمول ریمانی خواهیم نامید. اگر ضرب داخلی هرمیتی باشد، در این صورت متریک را هرمیتی[1] خواهیم نامید. اگر ضرب داخل هرمیتی مورد بحث تقریباً مانند یک متریک اقلیدسی رفتار کند (به این معنی که تا مرتبهٔ ۲ بر هم منطبق باشند) در این صورت متریک را کِهلری [2] خواهیم گفت. از سوی دیگر، اگر هیچ گونه ضرب داخلی وجود نداشته باشد، و فقط مفهوم طول بردار تعریف شده باشد، در این صورت متریک را فینسلری[3] خواهیم نامید.

از آنجا که ممکن است برای برخی از خوانندگان واژهٔ «هرمیتی»، با روشی که ما اینجا مطرح کرده‌ایم غیرعادی به نظر برسد، برای روشن شدن آن در حالت سادهٔ $\mathbb{C}^n$ توضیحی می‌آوریم. اگر $\mathbb{C}^n$ را به عنوان یک فضای مختلط در نظر بگیریم، طبیعی است که ضرب داخلی را در $\mathbb{C}^n$ با

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j .$$

برای $z = (z_1, \cdots, z_n)$ و $w = (w_1, \cdots, w_n)$ در $\mathbb{C}^n$ بکار بریم. این ضرب داخلی را ضرب داخلی هرمیتی (استانده) روی $\mathbb{C}^n$ می‌نامیم. اما گاهی مایلیم $\mathbb{C}^n$ را همان $\mathbb{R}^{2n}$ در نظر بگیریم. در این صورت با توجه به تساوی‌های معمول $z_j = x_j + iy_j \approx (x_j, y_j)$ و $w_j = (u_j + iv_j) \approx (u_j, v_j)$ چنین می‌نویسیم:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \approx (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \text{ و } w = (w_1, \ldots, w_n) \approx (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$$

در این شرایط ضرب داخلی زیر معمول است:

$$z.w = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j + y_j v_j .$$

توجه کنید که این ضرب داخلی حقیقی قسمت حقیقی همان ضرب داخلی هرمیتی $\langle z, w\rangle$ است که قبلاً معرفی شد.

همهٔ خمینه‌های مطرح شده در این مقاله خمینه‌های مختلط هستند. فضای مماس حقیقیِ یک خمینهٔ مختلط در یک نقطه را می‌توان به‌طور متعارف یک فضای برداری مختلط گرفت که البته بعد آن نصف بعد فضای مماس حقیقی است. در همهٔ بحث، فضای مماس را با این دید نگاه می‌کنیم. لذا دیفرانسیل یک نگاشت تمامریخت، یک نگاشت خطی مختلط است.

1) Hermitian 2) Kählerian 3) Finslerian

در این مقاله قصد داریم ثابت کنیم که هر دوری برای یک کاربرد مناسب است. در پنج زمینهٔ مختلف، سعی خواهیم کرد روشن کنیم که برخی از این کاربردها چگونه می‌تواند باشد.

نخستین نتیجه در این زمینه را، مدیون پوانکاره‌ایم. او روی قرص یکهٔ

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$$

در صفحهٔ مختلط، دوری زیر را که برحسب تبدیلات همدیس Δ ناورداست، درنظر گرفت:

$$\rho(z, w) := \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱ + |\frac{z-w}{۱-\bar{z}w}|}{۱ - |\frac{z-w}{۱-\bar{z}w}|} \qquad (۱)$$

پوانکاره این دوری را به عنوان نمونه‌ای از هندسهٔ لوباچفسکی[۱] در Δ مطرح کرد.

متریک هرمیتی در Δ را که با نمادگذاریهای سنتی به شکل زیر نوشته می‌شود، در نظر بگیریم:

$$P(z) := \frac{dz\ d\bar{z}}{(۱ - |z|^۲)^۲}.$$

در این صورت به ازای یک بردار v مماس بر Δ در نقطهٔ z، می‌توان طول v را به شکل زیر محاسبه کرد (که در آن $|\ .\ |$ همان طول اقلیدسی است):

$$\mathfrak{p}(z, v) := \frac{|v|}{۱ - |z|^۲} \qquad (۲)$$

نتیجه آن که $\mathfrak{p}$ صورتِ بینهایتیک برای دوری ρ است. معنی این عبارت آن است که به ازای نقاط $p, q \in \Delta$، دوری $\rho(p, q)$ از روی تابع $\mathfrak{p}$ به شکل زیر به‌دست می‌آید: به ازای هر خم هموار γ (γ روی بازهٔ $[۰, ۱]$ پارامتری شده است) که نقطهٔ p را به نقطهٔ q وصل می‌کند، طول $|\gamma|_{\mathfrak{p}}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$|\gamma|_{\mathfrak{p}} := \int_۰^۱ \mathfrak{p}(\gamma(t), \gamma'(t))dt;$$

سپس دوری از p تا q را بزرگ‌ترین کران پایین (inf) طولهای همهٔ چنین خمهایی تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب، دوری ρ روی Δ را می‌توان با اندازه‌گیری طول بردارهای مماس بر حسب متریک $\mathfrak{p}$ به دست آورد. در مطالب ذیل که تعمیمهایی از توابع ρ و $\mathfrak{p}$ را خواهیم دید، رابطهٔ فوق برای ما کمال اهمیت را خواهد داشت.

در دستور (۱) که دوری پوانکاره را تعریف می‌کند، دوری دیگری نیز دیده می‌شود. تعریف کنیم

$$\tilde{\rho}(z, w) = \left|\frac{z - w}{۱ - \bar{z}w}\right|.$$

در این صورت، می‌توان ملاحظه کرد که $\tilde{\rho}$ یک تابع دوری است. نامی که در متون کلاسیک به $\tilde{\rho}$ می‌دهند دوری شبه هذلولوی است. (رجوع شود به [Gar])ـ اما برحذر باشید که با «شبه‌دوریها» که بعد شرح

1) Lobachevskii geometry

خواهیم داد، اشتباه نشود. اگر Φ نگاشت تمامریخت دلخواهی از قرص یکه به خودش باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\tilde{\rho}(\Phi(z), \Phi(w)) \leqslant \tilde{\rho}(z, w) \tag{۳}$$

این نامساوی از لم شوارتس-پیک[1] نتیجه می‌شود که آن هم به نوبهٔ خود نسخهٔ ناوردای همدیسِ لم کلاسیک شوارتس است.

بدین شکل توابع تمامریخت نسبت به متریک $\tilde{\rho}$ ناصعودی‌اند. اگر Φ یک خودریختی تمام‌ریخت قرص باشد، یعنی $\Phi : \Delta \to \Delta$ یک به یک پوشا و تمامریخت باشد، در این صورت نامساوی (۳) را می‌توان برای Φ و برای Φ^{-1} بکار برد و نتیجه گرفت که

$$\tilde{\rho}(\Phi(z), \Phi(w) = \tilde{\rho}(z, w).$$

اگر دوری شبه‌هذلولوی ویژگیهای ناوردایی مطلوبی داشته باشد، چرا خود را گرفتار متریک پوانکاره کنیم که به نظر می‌رسد از نظر پیچیدگی (محاسباتی) در سطح بالاتری قرار دارد؟ اجازه دهید جواب سؤال را به این شکل بیان کنیم. گروه خودریختیهای تمامریخت قرص یکه متشکل است از برخی تبدیلات موبیوس. این تبدیلات به‌طور ترایا در قرص عمل می‌کنند: اگر $z, w \in \Delta$، آنگاه یک خودریختی Φ وجود دارد به قسمی که $\Phi(z) = w$. درواقع بیش از این هم می‌توان گفت: اگر ξ و ζ به ترتیب امتدادهای مماس در z و w باشند، آنگاه یک خودریختی Φ وجود دارد به قسمی که $\Phi(z) = w$ و Φ امتداد مماس ξ را به مضربی عددی از امتداد مماس ζ تبدیل می‌کند. از این مطلب نتیجهٔ مهم زیر به دست می‌آید: با تقریب ضرب در یک اسکالر، فقط یک متریک ریمانی روی قرص وجود دارد که بر حسب گروه خودریختیها ناوردا باشد، و البته این متریک چیزی جز متریک پوانکاره نیست.

پس چگونه است که دوری شبه‌هذلولوی در داخل آن جا می‌گیرد؟ مسلماً مضرب ثابتی از متریک پوانکاره نیست. جواب سؤال این است که $\tilde{\rho}$ **از هیچ متریک ریمانی به‌دست نمی‌آید:** در واقع غیر ممکن است که با اندازه‌گیری طول بردارهای مماس بر Δبه طریقی بتوان $\tilde{\rho}$ را به‌دست آورد، مشابه آنچه که ρ را از روی $\mathfrak{p}$ به‌دست آوردیم. بااین وصف، دوری شبه هذلولوی به طور طبیعی به لم شوارتس-پیک مربوط می‌شود و در نتیجه مبنای نظریهٔ هندسی کلاسیک توابع است (رجوع کنید به [Gar])[2]

حال، پنج تعمیم متمایز برای متریک پوانکاره ارائه می‌دهیم و برای هر کدام یک کاربرد بیان خواهیم کرد. از میان مثالهای متعددی که بالقوه روشنگرند، فکر خود را روی آنهایی متمرکز می‌کنیم که در بررسی گروه $Aut(M)$مرکب از خودریختیهای دوسو و تمامریخت خمینهٔ مختلط مفروض M مفید هستند (همهٔ خمینه‌های مورد بحث در این مقاله همبند فرض می‌شوند). در اینجا

$$Aut(M) = \{\Phi : M \to M \mid \Phi \text{تمامریخت، یک به یک و پوشاست}\}.$$

1) Schwarz-Pick Lemma

۲) از دیدگاه متخصصین، دوری شبه هذلولوی از این نظر نیز حائز اهمیت است که با درونیابی نوانلینا-پیک هم به خوبی سازگار است و این درونیابی اساس مسألهٔ مشهور طوقه است.

توجه کنید که $Aut(M)$با عمل دوتایی ترکیب نگاشتها، یک گروه است (وارون یک نگاشت تمامریخت یک به یک، خود به خود تمامریخت است). توپولوژی روی $Aut(M)$ را توپولوژی فشرده‌ـباز می‌گیریم که از $Aut(M)$ یک گروه توپولوژیک می‌سازد. در برخی از رده‌های خمینه‌ها، می‌توان $Aut(M)$ را به ساختار گروه لی نیز مجهز کرد. یکی از این رده‌ها از طریق دوری ناوردا مشخص می‌شود (به قضیهٔ ۲ ذیل مراجعه شود).

شبه دوری کاراتئودوری

«شبه دوری» موردبحث در سال ۱۹۲۶ توسط کاراتئودوری[۱] معرفی شد و اکنون به نام او خوانده می‌شود. فرض کنیم M یک خمینهٔ مختلط باشد و $p, q \in M$. قرار دهیم

$$C_M(p,q) := \sup_f \rho(f(p), f(q)) \qquad (۴)$$

که در آن سوپریموم روی همهٔ نگاشتهای تمامریخت $f : M \to \Delta$ از Mبه قرص یکه گرفته شده است و ρ دوری پوانکارهٔ دستور (۱) است. در عمل، C_M همان دوری ρ روی Δ است که به داخل M برده شده است (شکل ۱).

شکل ۱. ساختن شبه‌دوری کاراتئودوری

تابع C_Mواقعاً یک شبه دوری است یعنی در شرایط زیر برای هر $p, q, r \in M$ صدق می‌کند

(i) $C_M(p,q) \geqslant 0$

(ii) $C_M(p,p) = 0$

(iii) $C_M(p,q) = C_M(q,p)$

(iv) $C_M(p,q) \leqslant C_M(p,r) + C_M(r,q)$

1) Carathéodory

اما یک دوری نیست، یعنی ممکن است $p \neq q$ وجود داشته باشد به قسمی که $C_M(p,q) = ۰$. مثلاً $C_{\mathbb{C}^n} \equiv ۰$. از سوی دیگر، در مورد قرص یکه Δ ، با استفاده از لم شوارتس-پیک، نتیجه می‌شود $C_\Delta = \rho$. می‌توان ثابت کرد که شبه‌دوری کاراتئودوری C_M برحسب نگاشتهای دوسو تمامریخت، ناورداست و به علاوه، برحسب نگاشتهای تمامریخت، **ناصعودی** است. به طور دقیقتر، اگر $f : M_۱ \to M_۲$ نگاشتی تمامریخت بین خمینه‌های مختلط $M_۱$ و $M_۲$ باشد، آنگاه برای هر $p, q \in M_۱$،

$$C_{M_۲}(f(p), f(q)) \leqslant C_M(p,q).$$

نتیجهٔ بحث آن که C_Mکوچکترین شبه دوری بین همهٔ شبه دوریهای روی M است که تحت نگاشتهای تمامریخت از M به Δ ناصعودی‌اند، البته اینجا فاصله‌های روی Δ را با دوری پوانکاره اندازه گرفته‌ایم.

یک شبه‌دوری d را **داخلی** گوییم اگر $d(p,q)$ با$d^I(p,q)$ برابر باشد، که منظور از $d^I(p,q)$ بزرگترین کران پایین طولهای همهٔ خمهایی است که p را به q وصل می‌کنند. به نوبهٔ خود طول یک خم $\gamma : [۰,۱] \to M$ را به شکل سوپریمم $\sum_{i=۱}^{k} d(\gamma(t_{i-۱}), \gamma(t_i))$ روی همهٔ افرازهای $۰ = t_۰ < t_۱ < \ldots < t_k = ۱$ برای بازهٔ $[۰,۱]$ در نظر گرفته‌ایم.

شبه کاراتئودوری C_Mمعمولاً داخلی نیست. هر چند C_M به عنوان نگاشتی از $M \times M$ به $\mathbb{R}$، پیوسته است، اما حتی در حالتی که یک دوری باشد، معمولاً توپولوژی M را القا نمی‌کند.

به ازای یک نقطهٔ $p \in M$و یک بردار $v \in T_p(M)$ مماس بر M در نقطهٔ p، می‌توان شبه دوری فینسلری را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\mathfrak{c}_M(p,v) := \sup_f \mathfrak{p}(f(p), df(p)v)$$

که در آن سوپریمم روی همهٔ نگاشتهای fمانند رابطهٔ (۴) گرفته می‌شود و $\mathfrak{p}$ همان است که در (۲) تعریف شد. تابع $\mathfrak{c}_M$ یک شبه‌نرم در تاری مماس[1] $T(M)$ بر M است و معمولاً از یک شبه متریک هرمیتی حاصل نمی‌شود. شبه دوری فینسلری $\mathfrak{c}_M$ یک صورتِ بینهایتیک برای شبه دوری داخلی C^I_M القا شده از C_M است و روی $T(M)$ پیوسته است. شبه متریک $\mathfrak{c}_M$ تحت نگاشتهای تمامریخت، ناصعودی است. حکم اخیر تعمیم لم معمول شوارتس-پیک برای قرص یکه است. در واقع در مورد قرص یکهٔ Δ، داریم (رجوع شود به (۲)):

$$\mathfrak{c}_\Delta(z,v) = \mathfrak{p}(z,v) = \frac{|v|}{۱ - |z|^۲}$$

و این ویژگی که $\mathfrak{c}_\Delta$ برحسب نگاشتهای تمامریخت $\Phi : \Delta \to \Delta$ ناصعودی است به معنی نامساوی

$$\frac{|\Phi'(z)|}{۱ - |\Phi(z)|^۲} \leqslant \frac{۱}{۱ - |z|^۲}$$

1) tangent bundle

است که نسخهٔ بینهایتیک لم شوارتس-پیک است.

هم C_M و هم $\mathfrak{c}_M$ بیش از آن که برای مطالعهٔ هندسهٔ خمینه‌ها به کار روند، در جهت مطالعهٔ نگاشت‌های تمام‌ریخت بین خمینه‌ها سودمند هستند. کاربردهای عدیده‌ای از C_M و $\mathfrak{c}_M$ در جهت درک نگاشتهای تمامریخت وجود دارد که ما برخی از آنها را برخواهیم شمرد.

یک خمینهٔ مختلط M را C**ـهذلولوی** نامیم هرگاه روی پوشش جهانی آن M'، $C^I_{M'}$ یک دوری به تمام معنی باشد. به عنوان مثال، دامنه‌های کراندار در $\mathbb{C}^n$ خمینه‌های Cـهذلولوی هستند. هم‌چنین خارج قسمت یک دامنهٔ کراندار D بر یک گروه ناپیوسته که آزادانه در D عمل کند، اگر خارج قسمت فشرده باشد، آنگاه Cـهذلولوی است.

قضیهٔ ۱. فقط تعدادی متناهی نگاشت تمامریخت از یک خمینهٔ مختلط فشردهٔ M_1 روی یک خمینهٔ مختلط Cـهذلولوی M_2 وجود دارد. به ویژه گروه خودریختیهای دو سو تمامریخت یک خمینهٔ C-هذلولوی فشرده، یک گروه متناهی است.

طرح اثبات قضیهٔ ۱ (اوراتا[1]). مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای تمامریخت از M_1 به M_2 را با $\mathrm{Hol}(M_1, M_2)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم $\mathrm{Hol}(M_1, M_2)$ با توپولوژی فشرده-باز، یک ساختار مختلط می‌پذیرد (می‌توان نمودار نگاشتها را به منزلهٔ تشکیل دهندهٔ یک نوع فضای تیخمولر[2] درنظر گرفت). با استفاده از Cـهذلولوی بودنِ M_2، می‌توان نشان داد که $\mathrm{Hol}(M_1, M_2)$ فشرده است.

حال مجموعهٔ $S \subset \mathrm{Hol}(M_1, M_2)$ مرکب از همهٔ نگاشتهای تمامریخت پوشا را در نظر بگیریم. مجموعهٔ S یک زیرخمینهٔ مختلط $\mathrm{Hol}(M_1, M_2)$ است زیرا S با معادلهٔ $f(M_1) = M_2$ مشخص می‌شود، یعنی

$$S = \{f \in \mathrm{Hol}(M_1, M_2) \mid f(M_1) = M_2\}$$

و لذا فشرده است. اساس اثبات آن است که $\dim S = 0$ (ولی این قسمت بیش از حد تکنیکی است و مجال بحث آن در اینجا نیست). از آنجا که S فشرده است معلوم می‌شود که S متناهی است. $\square$

شبه دوری کوبایاشی

شبه دوری موسوم به کوبایاشی را کوبایاشی[3] در ۱۹۶۷ ارائه کرد. فرض کنیم M یک خمینهٔ مختلط باشد و $p, q \in M$. یک زنجیر دوایر از p به q مشتمل است بر مجموعه‌ای از نقاط M به شکل $p = p_0, p_1, \ldots, p_k = q$، مجموعه‌ای از نقاط Δ به شکل $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ و مجموعه‌ای از نگاشتهای تمامریخت از Δ به M به شکل $f_1, \ldots, f_k$ به قسمی که $f_j(a_j) = p_{j-1}$ و $f_j(b_j) = p_j$ برای هر j. (شکل ۲)

1) URATA 2) Teichmüller space 3) Kobayashi

طول یک زنجیر α حاصل جمع $l(\alpha) = \rho(a_1, b_1) + \cdots + \rho(a_k, b_k)$ است که در آن ρ دوری پوانکاره است که در رابطهٔ (۱) تعریف شده است.

شکل ۲. ساختن شبه‌دوری کوبایاشی

اکنون شبه دوری کوبایاشی K_M را با ضابطهٔ

$$K_M(p, q) := \inf_{\alpha} l(\alpha) \qquad (5)$$

تعریف می‌کنیم که اینفیمم روی همهٔ زنجیرهای دوایر از p به q گرفته می‌شود.

تابع K_Mواقعاً یک شبه دوری است ولی معمولاً یک دوری نیست (مثلاً $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$). در مورد Δ با دوری پوانکاره (۱) فرق ندارد، و در حالت کلی بر حسب نگاشتهای تمامریخت ناصعودی است. شبه‌دوری کوبایاشی بزرگترین شبه‌دوری بین همهٔ شبه‌دوریهای روی M است که برحسب نگاشتهای تمامریخت از Δبه M ناصعودی هستند، به شرط آن که دوری روی Δ را دوری پوانکاره در نظر بگیریم. برای هر خمینهٔ مختلط M داریم

$$C_M(p, q) \leqslant K_M(p, q).$$

شبه‌دوری کوبایاشی به عنوان تابعی از $M \times M$ به $\mathbb{R}$ پیوسته است و بر خلاف شبه‌دوری کاراتئودوری، شبه‌دوری کوبایاشی همواره داخلی است. به ویژه اگر K_M یک دوری باشد، آنگاه توپولوژی M را القا می‌کند. خمینهٔ مختلطی که برای آن K_M یک دوری تمام عیار باشد، خمینهٔ هذلولوی (کوبایاشی) نامیده می‌شود. به ویژه هر خمینهٔ C- هذلولوی و هر دامنهٔ کراندار در فضای مختلط، هذلولوی است. ویژگی «هذلولوی» بودن، بر حسب نگاشتهای دو سو تمامریخت حفظ می‌شود. دامنه‌های بیکرانی وجود دارند که با هیچ دامنهٔ کراندار، یکریختِ دوسو تمامریخت نیستند، ولی با این وجود هذلولوی‌اند. مثلاً می‌توان

نشان داد که دامنهٔ

$$V := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1/(1 - |z_1|)\}$$

هذلولوی است اما با هیچ دامنهٔ کراندار در $\mathbb{C}^2$ یکریخت دو سو تمامریخت نیست، زیرا هر تابع تمامریخت کراندار بر V مستقل از z_2 است. همین نکتهٔ اخیر نشان می‌دهد که V خمینهٔ C-هذلولوی نیست.

یک صورتِ بینهایتیک برای شبه‌دوری کوبایاشی را می‌توان با شبه‌دوری فینسلری

$$\mathfrak{f}_M(p, v) := \inf_{f,z,u} \mathfrak{p}(z, u)$$

ارائه کرد به شرط آن که در اینجا اینفیمم را روی همهٔ نگاشتهای تمامریخت f از Δ به M، همهٔ نقاط $z \in \Delta$ و همهٔ بردارهای مماس $u \in T_z(\Delta)$ که در شرط $f(z) = p$ و $df(z)u = v$ صدق می‌کنند، بگیریم. در حالت کلی $\mathfrak{f}_M$ مانند $\mathfrak{c}_M$ شبه نرم نیست (یعنی $\mathfrak{f}_M$ در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کند). مشابه $\mathfrak{c}_M$ شبه‌دوری بینهایتیک $\mathfrak{f}_M$ بر حسب نگاشتهای تمامریخت ناصعودی است.

همانند شبه‌دوری کاراتئودوری، K_M و $\mathfrak{f}_M$ نیز پیش از آنکه برای هندسهٔ ذاتی خمینه‌ها مطرح باشند، برای بررسی نگاشتهای تمامریخت بین خمینه‌ها به‌کار رفته‌اند. احتمالاً شبه‌دوری کوبایاشی در این میان از هر شبه‌دوری ناوردای دیگر کاربرد بیشتری داشته باشد، تازه این وقتی است که نخواهیم همهٔ زمینه‌های آنالیز مختلط را که این شبه‌دوری در آن بکار می‌رود نام ببریم. در قضیهٔ زیر فقط مثالی از این کاربرد را ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم M خمینه‌ای هذلولوی با بعد مختلط nباشد. در این صورت خواص زیر برقرار است:

(i) گروه $Aut(M)$ ساختار یک گروه لی حقیقی را می‌پذیرد که توپولوژی آن همان توپولوژی فشرده-باز است، و به علاوه برای هر $p \in M$ گروه پایدارگر p که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_p(M) := \{f \in Aut(M) | f(p) = p\}$$

در $Aut(M)$ فشرده است.

(ii) اگر $n \geqslant 2$ و $\dim Aut(M) \geqslant n^2 + 3$ آنگاه M یکریخت دو سو تمامریخت با گوی یکهٔ $B^n \subset \mathbb{C}^n$ است.

برهان قضیهٔ ۲ شامل بحث جالبی در مورد شمارش بعد است و به علاوه مطالب دقیقی از نظریهٔ گروههای لی را بکار می‌گیرد. در اینجا به این ایده‌ها اشاره خواهیم کرد.

۱) برهان بخش (i) اقتباس ازکتاب کوبایاشی [Kob 1] است، حال آنکه اثبات (ii) بر مبنای نتیجهٔ جدیدی است که خود یافته‌ایم (و در دست انتشار است) و این نتیجه راجع‌به رده‌بندی خمینه‌های هذلولوی بوسیلهٔ بعد گروه خودریختیهای آن است.

طرح اثبات[1] قضیهٔ ۲. از آنجا که K_M یک دوری داخلی روی M است، توپولوژی M را القا می‌کند و لذا M یک فضای متری موضعاً فشرده است. حال بنا بر یک قضیهٔ کلاسیکِ دانتزیک[1] و وان در واردن[2]، گروه ایزومتریهای M یک گروه موضعاً فشردهٔ $G(M)$ است و $St_p(M) := \{f \in G(M) | f(p) = p\}$، پایدارگر p، یک بخش فشرده برای توپولوژی فشرده‌ـباز است. از آنجا که $\mathrm{Aut}(M)$ و $I_p(M)$ به ترتیب بخشی بسته از $G(M)$ و $St_p(M)$ هستند، نتیجه می‌شود که $Aut(M)$ موضعاً فشرده و $I_p(M)$ فشرده است. به علاوه، بنابر قضیه‌ای از بوکنر[3] و مونتگومری[4]، یک گروه موضعاً فشرده از تبدیلات دیفرانسیل‌پذیر یک خمینه، یک گروه لی تبدیلات است و به این ترتیب اثبات (i) به پایان می‌رسد.

برای (ii) به قضیهٔ زیر نیازمندیم که مدیون گرین و کرانتس[5] (۱۹۸۵) و بلاند‌ـ دوشان‌ـ کالکا[6] (۱۹۸۷) است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم M یک خمینهٔ مختلط n بعدی و pنقطه‌ای از M باشد. فرض کنیم زیرگروه فشرده‌ای چون $K < I_p(M)$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر زوج از بردارهای $v, u \in T_p(M)$، یک $\Phi \in K$ و یک $\mu \in \mathbb{C}$ موجود باشد به قسمی که $d\Phi(p)u = \mu V$. در این صورت، M یکریخت دو سو تمامریخت با گوی یکه $\mathbb{B}^n$ یا فضای مختلط $\mathbb{C}^n$ یا فضای مختلط $\mathbb{CP}^n$ است.

حال برهان بخش (ii) قضیهٔ ۲ را می‌آوریم. از آنجا که بعد مختلط M برابر n است، نتیجه می‌شود که بعد حقیقی هر مدار در عمل گروه $\mathrm{Aut}(M)$ روی M از $۲n$ بیشتر نیست و در نتیجه برای هر $p \in M$، $\dim I_p(M) \geqslant n^۲ - ۲n + ۳$. اکنون نمایش ایزوتروپی $\alpha_p : I_p(M) \to \mathrm{GL}(T_p(M); \mathbb{C})$ را در نظر بگیریم:

$$\alpha_p(\Phi) := d\Phi(p), \quad \Phi \in I_p(M).$$

می‌توان نشان داد که α_p وفادار (یک به یک) است. اما بنابر (i)از قضیهٔ ۲، $I_p(M)$فشرده است، لذا یک صورت هرمیتی مثبت معین h_p روی $T_p(M)$موجود است به قسمی که $\alpha_p(I_p(M)) \subset U_{h_p}(n)$، که منظور از $U_{h_p}(n)$ گروه آن تبدیلات خطی‌ـمختلط $T_p(M)$ است که صورت h_p را حفظ می‌کنند. یک پایه برای $T_p(M)$ را به قسمی در نظر می‌گیریم که نسبت به این پایه، h_p با ماتریس یکه بیان شود. از آنجا که α_p وفادار است، می‌بینیم که $\alpha(I_p(M))$ یک زیرگروه فشردهٔ $U(n)$ با بعد بزرگتر یا مساوی $n^۲ - ۲n + ۳$ است.

برای آن که به جمعبندی قسمت آخر اثبات برسیم، لازم است برخی از نتایج مربوط به گروههای لی را که درواقع نتایج تکنیکی هستند بکار بریم و ببینیم که یک زیرگروه همبند $U(n)$ با بعد بزرگتر یا مساوی $n^۲ - ۲n + ۳$ الزاماً یا خود $U(n)$ ویا $SU(n)$ است (این حکم برای $n \neq ۴$ معتبر است ولی برای

1) Van Dantzig 2) Van Der Waerden 3) Bochner 4) Montgomery 5) Greene-Krantz
6) Bland-Duchamp-Kalka

$n = ۴$ امکانات دیگری هم موجود است). هر یک از گروههای $U(n)$ و $SU(n)$ به‌طور ترایا روی کرهٔ یکه $S^{۲n-۱} \subset \mathbb{C}^n$ عمل می‌کنند. پس با فرض آن که $n \neq ۴$، می‌توان $p \in M$ را ثابت گرفت و قضیهٔ ۳ را در مورد $K = \alpha_p(I_p(M))$ بکار برد و نتیجه گرفت که M یا با $\mathbb{B}^n$ دوسو تمامریخت است یا با $\mathbb{C}^n$ یا با $\mathbb{CP}^n$. از آنجا که Mهذلولوی است، ناچار M باید با $\mathbb{B}^n$ یکریخت دوسو تمامریخت باشد (زیرا $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{CP}^n$ هذلولوی نیستند). در مورد $n = ۴$، اثبات تکنیکی دیگری نیز مورد نیاز است.

شبه‌دوری برگمن

شبه دوری برگمن یک شبه دوری هرمیتی بر خمینه‌های مختلط است که نخست در ۱۹۲۲ برای یک متغیر و سپس در ۱۹۳۳ برای چند متغیر توسط برگمن[1] ارائه شد.

ما نخست برای حالتی که M یک دامنهٔ کراندار $\mathbb{C}^n$ باشد، ساختمان برگمن را شرح می‌دهیم. فضای $L^۲(M)$ را نسبت به اندازهٔ لبگ در نظر بگیرید. زیرفضای $L^۲(M)$ مرکب از توابع تمامریخت یک زیرفضای بسته است و ما یک پایهٔ متعامد یکه‌ای آن مانند $\{f_j\}_{j=۱}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، **تابع هستهٔ برگمن** با ضابطهٔ

$$b_M(z, \bar{w}) = \sum_{j=۱}^{\infty} f_j(z)\overline{f_j(w)}.$$

تعریف می‌شود. این تابع مستقل از انتخاب پایهٔ متعامد یکه‌ای است. به ازای $z = w$، داریم $b_M(z, \bar{z}) > ۰$.

در حالت کلی که M خمینهٔ مختلط nبعدی است، در فضای nـصورتهای تمامریخت مربع‌ـانتگرالپذیر روی M، یک پایهٔ متعامد یکه‌ای کامل $\omega_۱, \omega_۲, \dots$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، صورت دیفرانسیل

$$B_M(z, \bar{w}) := \sum_{j=۱}^{\infty} \omega_j(z) \wedge \overline{\omega_j(w)}$$

برای $z, w \in M$، مستقل از پایه است و **صورت هستهٔ برگمن** نامیده می‌شود. در یک دستگاه مختصات موضعی $z_۱, \dots, z_n$ برای M، هر $\omega_j(z)$ را به شکل $\omega_j(z) = f_j(z) dz_۱ \wedge \dots \wedge dz_n$ می‌نویسیم که $f_j(z)$ توابع موضعاً تعریف شده و تمامریخت هستند و لذا B_M را می‌توان به شکل

$$B_M(z, \overline{w}) = b_M(z, \overline{w}) dz_۱ \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\overline{w_۱} \wedge \dots \wedge d\overline{w_n}$$

نوشت که در آن $b_M(z, \overline{w}) := \sum_{j=۱}^{\infty} f_j(z)\overline{f_j(w)}$.

اکنون فرض کنید که $b_M(z, \bar{z}) > ۰$ برای هر $z \in M$، و شبه‌دوری برگمن را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{B}_M(z) := \frac{۱}{۲} \sum_{m,k=۱}^{n} \frac{\partial^۲ \log b_M(z, \overline{z})}{\partial z_m \partial \overline{z_k}} dz_m d\overline{z_k}.$$

1) Bergman

جالب توجه است که $\mathcal{B}_M$ مستقل از دستگاه مختصات، مثبتِ نیمه‌معین، ناوردای دوسو تمامریخت، هموار و نهایتاً کهلری است. در مورد قرص یکهٔ Δ داریم $\mathcal{B}_\Delta = \mathcal{P}$. اما در حالت کلی $\mathcal{B}_M$ بر حسب نگاشتهای تمامریخت ناصعودی نیست. آن خمینه‌هایی که برای آنها $\mathcal{B}_M$ خوشتعریف و مثبت معین (و در نتیجه متریک هرمیتی) است، خصوصاً جالب توجه‌اند، هرچند که نسبتاً تعدادشان کم است. دامنه‌های کراندار در فضاهای مختلط دسته‌ای از این خمینه‌ها هستند و متریک برگمن برای آنها مورد مطالعهٔ وسیعی قرارگرفته است. اگر D دامنهٔ کرانداری در $\mathbb{C}^n$ باشد، آنگاه $\mathfrak{c}_D^2(p,v) \leqslant 4\langle v,v\rangle_{\mathcal{B}_D(p)}$ ، اما هیچگونه رابطهٔ کلی بین $\mathfrak{f}_D$ و $\mathcal{B}_D$ شناخته نشده است، (در واقع مثال جالب و مشهوری از دیدریک[1] و فورنائس[2] بر اینکه اصلاً چنین رابطه‌ای وجود ندارد دلالت می‌کند).

برخلاف $\mathfrak{c}_D$ و $\mathfrak{f}_D$، شبه متریک برگمن $\mathcal{B}_D$، هرمیتی و حتی کهلری است، و از این رو می‌توان انتظار داشت که از آن اطلاعاتی از دید هندسهٔ دیفرانسیل برای D به‌دست آید. ذیلاً مثالی از چنین کاربردی را ارائه می‌کنیم.

برای هر متریک ناوردا روی یک دامنهٔ $D \subset \mathbb{C}^n$، یکی از مشخصه‌های مهم رفتار مرزی آن است، به ویژه رفتار مرزی تانسور انحنای آن. بهترین حالتی که مورد مطالعه قرارگرفته است. مربوط به دامنه‌های **قویاً شبه محدب**[3] با مرز هموار C^∞است. معنای شبه تحدب قوی آن است که مرز دامنه را می‌توان موضعاً پس از تأثیر یک تغییر متغیر دوسو تمامریخت به یک مرز قویاً محدب[4] تبدیل کرد. برای چنین دامنه‌هایی، در ۱۹۷۴ فِفِرمان [5] دستور مجانبی جالبی برای صورت هستهٔ برگمن پیدا کرد. او با استفاده از آن نشان داد که ژئودزیک‌های مناسبی نسبت به متریک برگمن، به شیوهٔ «شبه ترانسورس»[6] به مرز نزدیک می‌شوند و لذا نگاشت‌های دو سو تمامریخت دامنه‌های قویاً شبه محدب را می توان به طریق هموار به مرز نیز توسیع داد.

با استفاده از دستور مجانبی ففرمان، کلمبک[7] نشان داد که ـدر مورد یک دامنهٔ کراندار قویاً شبه محدب D با مرز هموار C^∞ـانحنای مقطعیِ تمامریخت $\mathcal{B}_D$ در نزدیکی مرز D به عدد ثابت منفی $-\frac{2}{n+1}$ نزدیک می‌شود؛ این عدد، انحنای مقطعی تمامریخت متریک برگمن برای گوی یکهٔ $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ است. این مطلب در مشخصهٔ ذیل برای گوی یکه نکته‌ای اساسی است، و البته با مشخصهٔ بیان شده در قضیهٔ ۲ اساساً متفاوت است. اثبات را به طور مختصر شرح خواهیم داد، زیرا به آسانی قابل فهم است و تکنیک‌های به‌کار رفته در اثبات نسبتاً مؤثرند.

قضیهٔ ۴. (بون وُنگ[8]، روزِی[9]) فرض کنیم $D \subset \mathbb{C}^n$ دامنه‌ای کراندار، قویاً شبه محدب با مرز هموار

---

1) Diederich 2) Fornæss 3) strongly pseudoconvex 4) strongly convex 5) C. Fefferman
6) pseudotransverse 7) Klembeck 8) Bun Wong 9) Rosay

C^∞ باشد و فرض کنیم که گروه خودریختیهای آن یعنی $Aut(D)$ با توپولوژی فشرده‌ـباز، فشرده نباشد. در این صورت D هم‌ارز دوسو تمامریخت با گوی یکه $\mathbb{B}^n$ است.

شکل ۳. برهان قضیهٔ ۴.

برهان قضیهٔ ۴ (از کلمبک). به‌ازای هر دامنهٔ کراندار $D \subset \mathbb{C}^n$، فشرده نبودن $Aut(D)$ هم‌ارز است با وجود دنباله‌ای از اعضای $Aut(D)$ مانند $\{\Phi_j\}$ به قسمی که روی بخش‌های فشردهٔ D، Φ_j همگرای یکنواخت به یک Φ باشد که $\Phi : D \to \mathbb{C}^n$ نگاشت تمامریخت باشد اما $\Phi \notin \mathrm{Aut}(D)$. واضح است که Φ دامنهٔ D را در $\bar{D}$ می‌نگارد. اما، قضیه‌ای مشهور از هـ. کارتان[1] می‌گوید که درواقع Φ دامنهٔ D را در مرز ∂D می‌نگارد. لذا $\Phi(D)$ یک واریتهٔ مختلط در ∂D است.

در حالتی که D قویاً شبه‌محدب باشد، در این صورت (طبق اصل ماکسیمم قدرمطلق)، ∂D نمی‌تواند شامل واریتهٔ مختلط غیربدیهی باشد، و لذا Φ یک نگاشت ثابت است که مثلاً D را به نقطهٔ $q \in \partial D$ می‌نگارد. پس به ازای هر $p \in D$، داریم $\Phi_j(p) \to q$ هنگامی که j به ∞ میل می‌کند (شکل ۳). از سوی دیگر، می‌دانیم که نزدیک نقطهٔ q، انحنای مقطعی تمامریخت $\mathcal{B}_D$ به $-\frac{2}{n+1}$ می‌گراید. از آنجا که متریک برگمن، بر حسب هر یک از خودریختیهای Φ_j ناورداست، نتیجه می‌شود که انحنای مقطعی تمامریخت $\mathcal{B}_D$ ثابت و برابر است با $-\frac{2}{n+1}$.

اکنون نشان خواهیم داد که D همبندِ ساده است. فرض کنید γ یک خم بسته در D باشد. از آنجا که Φ_j به طور یکنواخت روی فشرده‌های D همگرا به Φ است، ملاحظه می‌شود که به ازای j بسیار بزرگ، $\Phi_j(\gamma)$ در یک همسایگی مفروض نقطهٔ q قرار می‌گیرد و این همسایگی را می‌توان همبند ساده انتخاب کرد (زیرا مرز را هموار فرض کرده‌ایم). پس $\Phi_j(\gamma)$ مانسته‌جا[2] با صفر است، و لذا خود γ نیز مانسته‌جا با صفر است، و همین ثابت می‌کند که D همبند ساده است.

1) H. Cartan 2) homotopic

به طور خلاصه، D خمینهٔ کهلری و همبند ساده‌ای است که انحنای مقطعی تمامریخت آن ثابت و منفی است. بنا به دلایل استانده از هندسهٔ دیفرانسیل (رجوع شود به [KoN])، نتیجه می‌شود که D هم‌ارز دو سو تمامریخت با $\mathbb{B}^n$ است. □

بررسی رفتار مرزی متریک برگمن برای دامنه‌های کلی‌تر، موضوع پژوهشی جالبی از حیث خود موضوع است. مثلاً در مسائل مربوط به توسیع نگاشت‌های تمامریخت بین دامنه‌ها به مرز آنها، نقش مهمی ایفا می‌کند. مکتوبات این زمینه بسیار وسیع است و ما در اینجا وارد بحث آنها نمی‌شویم (مثلاً، رجوع شود به [Kra]).

متریک کهلر_آینشتاین

منظور از متریک کهلر_آینشتاین[1] روی یک خمینهٔ مختلط، متریکی هرمیتی است که تانسور ریچی[2] برای آن، با تقریب یک ضریب حقیقی ثابت، بر تانسور متریک مفروض منطبق باشد. به لطف نتایج چنگ_یاو[3] (۱۹۸۰) و موک_یاو[4] (۱۹۸۳)، می‌دانیم که در مورد هر دامنهٔ $D \subset \mathbb{C}^n$ که کراندار و **شبه‌محدب**[5] باشد، چنین متریکی موجود است (منظور از دامنهٔ شبه محدب دامنه‌ای است که بتوان آن را به صورت اجتماعی صعودی از دامنه‌های قویاً شبه‌محدب نوشت).

متریک کهلر_آینشتاین با دستور

$$\mathcal{E}_D(Z) := \sum_{m,k=۱}^{n} \frac{\partial^۲ u(z)}{\partial z_m \partial \overline{z_k}} dz_m d\overline{z_k}$$

نوشته می‌شود که در آن u جواب مسألهٔ مقدار مرزی زیر است:

$$\begin{cases} \det\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial z_m \partial \overline{z_k}}\right) = e^{۲u} & \text{روی } \mathrm{D}، \\ u = \infty & \text{روی مرز } \mathrm{D}، \end{cases} \tag{۶}$$

می‌خواهیم جواب این مسأله قویاً **چند زیرهمساز** (psh) باشد، یعنی می‌خواهیم ماتریس $(\partial^۲ u/\partial z_m \partial \overline{z_k})$ مثبت معین باشد. متریک $\mathcal{E}_D$ یک متریک کهلری، کامل، و ناوردای دوسو تمامریخت است. در مورد قرص یکه Δ داریم $\mathcal{E}_D = \mathcal{P}$. اما در حالت کلی نمی‌توان گفت که $\mathcal{E}_M$ بر حسب نگاشت‌های تمامریخت ناصعودی است.

در مورد دامنه‌های D که کراندار، قویاً شبه‌محدب و با مرز هموار C^∞ باشند، از تحقیقات چنگ_یاو نتیجه می‌شود که انحنای مقطعی تمامریخت $\mathcal{E}_D$ در نزدیکی مرز D، به مقدار منفی ثابت $-\frac{۲}{n+۱}$ نزدیک

1) Kähler-Einstein metric 2) Ricci tensor 3) Cheng-Yau 4) Mok-Yau
5) pseudoconvex

می‌شود. درنتیجه می‌توان در اثبات قضیهٔ ۴ به جای $\mathcal{B}_D$ از $\mathcal{E}_D$ استفاده کرد. در برخی موارد، رفتار مرزی $\mathcal{E}_D$ را می‌توان به شکل ساده‌تر از رفتار مرزی $\mathcal{B}_D$ مشخص کرد زیرا $\mathcal{E}_D$ از یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی (۶) حاصل می‌شود و در نتیجه می‌توان از روش‌های معادلات مشتقات جزئی بهره گرفت.

شبه‌متریک‌ها و شبه دوری‌های بیشتر

در ۱۹۹۳، هونگ‌ـهسی وو[1] راهی را پیشنهاد کرد که به کمک آن می‌توان خانوادهٔ جدیدی از شبه‌متریک‌های ناوردای دوسو تمامریخت را تعریف کرد. این تعاریف در عمل خیلی پیچیده‌اند و ما فقط به ذکر قضیهٔ وجودی زیر در مورد این شبه متریک‌ها می‌پردازیم (برای جزئیات بیشتر به [WU] مراجعه شود.)

قضیه ۵. روی هر خمینهٔ مختلط M می‌توان یک شبه متریک $\mathcal{W}_M$ ساخت که نیم‌پیوستهٔ بالایی و هرمیتی (و نه فقط فینسلری) باشد به قسمی که:

(i) $\mathcal{W}_\Delta = \mathcal{P}$.

(ii) اگر $f : M_1 \to M_2$ نگاشت تمامریخت باشد و $\dim M_1 = n$، آنگاه $f^*\mathcal{W}_{M_2} \leqslant \sqrt{n}\mathcal{W}_{M_1}$.

(iii) اگر $f : M_1 \to M_2$ نگاشت دوسو تمامریخت باشد آنگاه $f^*\mathcal{W}_{M_2} = \mathcal{W}_{M_1}$.

(iv) اگر M هذلولوی باشد، آنگاه $\mathcal{W}_M$ یک متریک هرمیتی نیم‌پیوستهٔ بالایی است.

شبه‌متریک وو، $\mathcal{W}_M$، در واقع جلوه‌های جاذب شبه‌متریک‌های فینسلری (کوبایاشی و کاراتئودوری) و شبه متریک‌های هرمیتی (برگمن و کهلرـآینشتاین) را که قبلاً بحث کردیم، در هم می‌آمیزد، زیرا شبه متریک وو، $\mathcal{W}_M$ برحسب نگاشت‌های تمام‌ریخت، شبه‌متریکی است (اساساً) ناصعودی، و در عین حال هرمیتی. یکی از نخستین دستاوردهای شبه‌متریک وو قضیهٔ زیر است که به‌وسیلهٔ خود وو ثابت شد:

قضیهٔ ۶. هر خمینهٔ فشردهٔ Cـهذلولوی یک واریتهٔ تصویری است.

به عنوان یک حدس می‌توان گفت که نتیجهٔ مشابهی برای تمام خمینه‌های هذلولوی به معنی کوبایاشی نیز صحت دارد.

شبه‌متریک $\mathcal{W}_M$ در مورد خمینه‌های هذلولوی به متریک هرمیتی تبدیل می‌شود. این موضوع یک بار دیگر نیز اهمیت موضوع هذلولوی بودن را برای خمینه‌ها نشان می‌دهد. باید دانست که هذلولوی بودن یک خمینه را می‌توان به کمک شبه‌متریکی که سیبونی[2] از طریق توابع چند زیرهمساز در ۱۹۸۱ معرفی کرد (در صفحات ۳۷۲ـ۳۵۷ از [For]جزئیات را خواهید دید)، تشخیص داد. کلیمک[3] در ۱۹۸۵ و آزوکاوا[4] در ۱۹۸۶ نیز توابع چند زیر همساز را برای تعریف شبه دوری و شبه متریکی متفاوت با آنچه سیبونی آورده بود به کار بردند. اطلاعات بیشتری در این زمینه را می‌توان در [Kob 2] یافت.

درواقع شبه دوری‌ها و شبه‌متریک‌های ناوردای دیگری نیز وجود دارند، که تعداد آنها بیش از آن است

1) Hung-Hsi Wu 2) Sibony 3) Klimek 4) Azukawa

که بتوان در اینجا نام برد، و هریک برای برآوردن منظور خاصی در آنالیز مختلط ساخته شده‌اند. در اینجا به‌ویژه به شبه‌متریک هان[1] و تابع لمپرت[2] اشاره می‌کنیم. رسالهٔ [JaP] منبع بسیار خوبی برای دستیابی به تصویری کلّی از این ایده‌ها می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقالهٔ کوتاه چند ایده را در دیدگاه هندسی نسبت به آنالیز مختلط مورد بحث قرار دادیم، به ویژه ایده‌هایی را که از دوری‌ها و متریک‌های ناوردا بهره می‌گرفت. باز هم تأکید می‌کنیم که این دوری‌ها و متریک‌ها کاربردهای فراوانی دارند و ما فقط اندکی از کاربردها را نشان دادیم. با این وجود امیدواریم توانسته باشیم تا اندازه‌ای برخی زیبائی‌های این شاخهٔ فعال و شدیداً در حال رشد را نشان دهیم. دیدگاه هندسی، در نظریهٔ توابع روی خمینه‌ها، تعبیرهای توانمند جدیدی را فراهم ساخته است و مسائلی که اخیراً تحت بررسی هستند پژوهشگران را برای سالیان آینده به خود مشغول خواهند کرد. برای اطلاع بیشتر، خواننده را به رساله‌ها و مقالات توصیفی در فهرست مراجع ذیل ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[Din] S. DINEEN, *The Schwarz Lemma,* Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, New York, 1989.

[For] J. FORNÆSS, *Recent Developments in Several Complex Variables, Proceedings of a Conference Held at Princeton University, Princeton, NJ, April 16-20*, 1979, Ann. of Math. Stud., vol. 100, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[Gar] J. GARNETT, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[JaP] M. JARNICKI and P. PFLUG, *Invariant Metrics and Distances in Complex Analysis,* de Gruyter, Berlin and New York, 1993.

[Kob1] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[Kob2] ——, *Hyperbolic Complex Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

1) HaHn 2) Lempert

[KoN] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley, New York, 1996.

[Kra] S. KRANTZ, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wadsworth, Belmont, 1992.

[KrP] S. KRANTZ and H. PARKS, *A Primer of Real Analytic Functions,* Birkhäuser, Basel, 1992.

[PoS] E. A. POLETSKII and B. V. SHABAT, Invariant metrics (translated from Russian), *Encyclopedia Math. Sci.*, vol. 9: Several Complex Variables III, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989, pp. 63-111.

[Wu] H. WU, Old and new invariant metrics on complex manifolds, *Several Complex Variables: Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987-1988* (J. E. Fornæss,ed.), Math. Notes, vol. 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, pp. 640-682.

مترجم: ارسلان شادمان
دانشگاه تهران، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر،
صندوق پستی ۱۴۱۵۵،۶۴۵۵،
پست الکترونیک: chademan@khayam.ut.ac.ir