فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۵(پاییز ۱۳۷۹)، صص. ۱۱ تا ??

درونیابی هموگرافیک

میرکمال میرنیا و علیرضا غفاری

چکیده

در عمل بسیاری از توابع ، فقط با جدولی از مقادیر آنها در تعدادی از نقاط مشخص هستند و در عین حال لازم است ضابطه آنها، حتی در صورت امکان به صورت تقریبی معلوم باشد. از آنجا که از مشتقات این گونه توابع اطلاعات کمی در دسترس است لذا به جای استفاده از درونیابی چند جمله‌ای با درجه بالا، ترجیح داده می‌شود که از اسپلاین مکعبی [۱] استفاده شود. در این صورت وجود مشتقات پیوستهٔ آنها لااقل تا مرتبه دوم فرض گرفته می‌شود. درونیابی گویا [۱] نیز با توجه به وجود نقاط غیرقابل دسترس و حجم زیاد محاسبات، ممکن است چندان مفید نباشد. چنانچه جوانب احتیاط را رعایت کنیم اسپلاین درجه دو یا یک را به کار می‌بریم. اما برای اسپلاین خطی ممکن است خطای فاحشی ایجاد شود. در این مقاله جایگزینی اسپلاین گویا از درجهٔ مانند (۱،۱) را به جای درونیابی اسپلاین خطی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در عمل نشان داده می‌شود اسپلاین گویا عموماً بهتر از اسپلاین خطی است.

کلمات کلیدی: درونیابی، درونیابی اسپلاین، درونیابی گویا

مقدمه

فرض کنید مقادیر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ در نقاط حامی

$$a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_{۲n} = b$$

معلوم باشد و داشته باشیم:

$$f(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, 2n$$

هدف یافتن تابعی گویا و پیوسته مانند $R(x)$ در این بازه است که در زیربازهٔ $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ با تابعی گویا مانند

$$R(x) = R_i(x) = \frac{a_i + b_i x}{c_i + x} \qquad x_{2i} \leqslant x \leqslant x_{2i+2}$$

درونیابی شود و داشته باشیم:

$$\begin{cases} R_i(x_{2i}) = f_{2i} \\ R_i(x_{2i+1}) = f_{2i+1} \\ R_i(x_{2i+2}) = f_{2i+2} \end{cases} \qquad (1)$$

۱. پیداکردن پارامترهای تابع درونیاب

شرایط (۱) به حل دستگاه معادلات زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{a_i + b_i x_{2i}}{c_i + x_{2i}} = f_{2i} \\ \frac{a_i + b_i x_{2i+1}}{c_i + x_{2i+1}} = f_{2i+1} \\ \frac{a_i + b_i x_{2i+2}}{c_i + x_{2i+2}} = f_{2i+2} \end{cases} \qquad (2)$$

با توجه به شرایط درونیابی گویا، بعد از ساده‌کردن معادلات (۲)، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a_i + x_{2i} b_i - c_i f_{2i} = x_{2i} f_{2i} \\ a_i + x_{2i+1} b_i - c_i f_{2i+1} = x_{2i+1} f_{2i+1} \\ a_i + x_{2i+2} b_i - c_i f_{2i+2} = x_{2i+2} f_{2i+2} \end{cases} \qquad (3)$$

دستگاه معادلات (۳) را با استفاده از روش حذفی گاوس حل می‌کنیم. برای به دست آوردن فرمول بسته از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_{2i+1} - x_{2i} = h_0 \\ x_{2i+2} - x_{2i+1} = h_1 \\ f_{2i} = f_0 \\ f_{2i+1} = f_1 \\ f_{2i+2} = f_2 \\ f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{h_0} \\ f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{h_1} \\ f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{h_1} \end{cases} \qquad (4)$$

آنگاه جواب دستگاه معادلات (۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$c_i = -\left[x_{2i+2} + \frac{f_{01}}{f_{012}}(1 + \frac{h_0}{h_1})\right] \qquad (5)$$

$$b_i = f_0 + (c_i + x_{2i+1})f_{01} \qquad (6)$$

$$a_i = f_1(x_{2i+1} + c_i) - b_i x_{2i+1} \qquad (7)$$

همچنانکه در محاسبه پارامترها در معادله (۵) ملاحظه می‌شود، اگر $f_{012} = 0$ آنگاه درونیاب گویا در این بازه وجود نخواهد داشت. در چنین شرایطی از درونیابی خطی استفاده می‌کنیم. روش حل جدولی برای محاسبه پارامترهای (۷،۶،۵) مفید است.

مثال ۱. فرض کنید:

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{1 + x}$$

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$$

آنگاه

x_i	f_i	$f_{i,i+1}$	f_{012}
۰	۲	۰/۵	−۰/۱۸۷۵
۱	۲/۵	۰/۱۲۵	
۳	۲/۷۵		

$$c = -\left[3 + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{16}}(1 + \frac{1}{2})\right] = 1$$
$$b = 2 + (1 + 1)\frac{1}{2} = 3$$
$$a = \frac{5}{2}(1 + 1) - 3 \times 1 = 2$$

شکل ۱: نمودارهای هر دو تابع e^x و درونیاب خطی در فاصله‌های $[-۳,-۱], [-۱,۱], [۱,۳]$

۲. اجرای الگوریتم در چند مثال

الگوریتم ارائه شده را در چند مثال اجرا می‌کنیم و نتایج به‌دست آمده را با نتایج حاصل از درونیابی اسپلاین خطی مقایسه می‌کنیم. در تمامی این مثال‌ها بازه [۳،۳-] انتخاب شده و نقاط حامی به صورت

$$x_i = -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳$$

منظور شده‌اند.

مثال ۲. تابع $f(x) = e^x$ را در نظر بگیرید. تابع گویای اسپلاین به صورت زیر است:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{-0.563530-0.135335x}{-0.163953+x} & -3 \leqslant x \leqslant -1 \\ \frac{-2.163953-x}{-2.163953+x} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{-1.211461-7.389059x}{-4.163953+x} & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

در درونیابی اسپلاین گویا، حداکثر خطای نسبی تقریباً ۰/۰۳۰۱۳ است در حالی که این مقدار در درونیابی اسپلاین خطی تقریباً ۰/۶۰۷۱۷ است ملاحظه می‌شود که حداکثر خطای نسبی در درونیابی اسپلاین خطی تقریباً ۲۰ برابر بیشتر از حداکثر خطای نسبی در درونیابی اسپلاین گویا است (شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴).

مثال ۳. تابع $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خصوصیات این تابع، در بازهٔ $[-1, 1]$ داریم $f_{012} = 0$ و در این زیربازه درونیاب گویا وجود ندارد. در دو زیربازهٔ دیگر، درونیاب گویا به صورت زیر است:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{-0.546302+0.642093x}{3.175343+x} & -3 \leqslant x \leqslant -1 \\ \frac{-0.546302-0.642093x}{-3.175343+x} & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

حداکثر خطای نسبی برای درونیاب اسپلاین گویا در نقاط ۲/۸+ و ۲/۸− تقریباً برابر ۰/۰۷۷۱۸۵است؛ در حالی که این مقدار برای درونیابی اسپلاین خطی در نقاط تقریبی ۱/۹+ و ۱/۹− تقریباً برابر۳/۱۵۲۷۰۹ است. این مقدار تقریباً ۴۰ برابر خطای درونیابی اسپلاین خطی است (شکل‌های ۵،۶،۷،۸).

مثال ۴. فرض کنید $f(x) = \tanh(x)$. دوباره با توجه به خواص تابع، در زیربازهٔ $[-1, 1]$ تابع درونیاب گویا وجود ندارد. برای دو زیربازهٔ دیگر داریم:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{-0.761594-1.037315x}{0.637969+x} & -3 \leqslant x \leqslant -1 \\ \frac{-0.761594+1.037315x}{-0.637969+x} & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

حداکثر خطای نسبی برای درونیابی اسپلاین خطی در نقاط ۱/۷+ و ۱/۷− تقریباً برابر ۰/۰۹۸۴۶۴ است، در حالی که این مقدار برای درونیابی اسپلاین گویا در ۱/۲+ و ۱/۲− تقریباً برابر ۰/۰۳۱۲۵۴ است

که حدوداً سه برابر کوچکتر است (شکل‌های ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲).

شکل ۲: نمودارهای خطای نسبی تابع درونیاب خطی در فاصله‌های [۱, ۳], [−۱, ۱], [−۳, −۱]

شکل ۳: نمودارهای هر دو تابع e^x و $R(x)$ در فاصله‌های $[۱,۳], [-۱,۱], [-۳,-۱]$

شکل ۴: نمودارهای خطای نسبی تابع $R(x)$ در فاصله‌های $[-۳,-۱], [-۱,۱], [۱,۳]$

شکل ۵: نمودارهای هر دو تابع $\tan(\frac{x}{۲})$ و درونیاب خطی در فاصله‌های $[-۳,-۱], [۱,۳]$

شکل ۶: نمودارهای خطای نسبی تابع درونیاب خطی در فاصله‌های $[-۳, -۱], [۱, ۳]$

شکل ۷: نمودارهای هر دو تابع $\tan(\frac{x}{۲})$ و $R(x)$ در فاصله‌های $[-۳, -۱], [۱, ۳]$

شکل ۸: نمودارهای خطای نسبی تابع $R(x)$ در فاصله‌های $[۱,۳]$, $[-۳,-۱]$

شکل ۹: نمودارهای هر دو تابع $\tanh(x)$ و درونیاب خطی در فاصله‌های $[۱,۳]$, $[-۳,-۱]$

شکل ۱۰: نمودارهای خطای نسبی تابع درونیاب خطی در فاصله‌های $[-۳, -۱], [۱, ۳]$

شکل ۱۱: نمودارهای هر دو تابع $\tanh(x)$ و $R(x)$ در فاصله‌های $[-۳, -۱], [۱, ۳]$

شکل ۱۲: نمودارهای خطای نسبی تابع $R(x)$ در فاصله‌های $[۱,۳]$, $[-۳,-۱]$

۳. نتیجه

ملاحظه می‌شود در توابعی که رفتار گویا دارند معمولاً توابع اسپلاین گویا بهتر از توابع اسپلاین خطی است.

مراجع

[1] J. Stoer & R. Borlisch, *"Introduction to Numerical Analysis"* Springer-Verlag, Inc. 1980.

میرکمال میرنیا
دانشگاه تبریز، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: Mirnia-kam@Tabrizu.ac.ir
علیرضا غفاری
دانشگاه تبریز، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: a-r-ghaffari@Tabrizu.ac.ir