

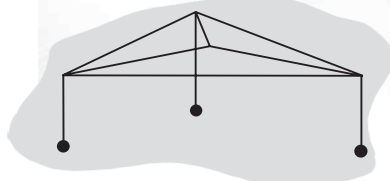
باراهیان



عنوان تمرین، به شما وامی گذاریم.
نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی مثلث حادالزَوایایی را بیابید که
دارای کمترین مجموع فواصل از رئوس آن مثلث باشد.



(شکل ۱)



روش لایب‌نیتس^۲ برای حل این مسئله چنین بود که مثلث
را روی یک میز قرار دهیم و سوراخ‌هایی در هر رأس آن تعبیه
کنیم. سپس از هریک از آن‌ها، مهره‌ای با وزن برابر، توسط

مسائلی با استفاده از فیزیک

در این بخش، به چند مسئله‌ی مقدماتی می‌پردازیم که به
سادگی و با دقتی فیزیکی می‌توانیم آن‌ها را حل کنیم، و در
موردشان توضیح می‌دهیم که چگونه شهود فیزیکی به یافتن
راه‌حلی ریاضی کمک می‌کنند. کار را با مثالی در مورد مسئله‌ی
«نقطه‌ی توریچلی»^۱ آغاز می‌کنیم، و حل بقیه‌ی مسائل را به

المپیادهای ریاضی

(قسمت هفتم)

● غلامرضا یاسی پور

داریم:

$$AQ + QD \geq AD$$

که برابری آن، اگر و تنها اگر بر پاره خط AD واقع باشد، برقرار است. در نتیجه:

$$AQ + BQ + CQ \geq AD$$

و برابری، تنها اگر Q بر تقاطع C و AD ، یعنی بر نقطه P منطبق باشد، برقرار است. در این صورت، نتیجه می شود که P ، در مورد مجموع فواصل آن از رأس ها می نیمم و تنها می نیمم است. و به این ترتیب، مسئله حل می شود.

در این جا از شمادعوت می کنیم که صورت سه بعدی نقطه ی توریچلی را همراه با بعضی مسائل دیگر از همین نوع، بررسی کنید:

۱. بر اضلاع یک چندضلعی، بردارهای متعامدی به طول هایی متناسب با طول های اضلاع چند ضلعی و متوجه به خارج آن، در نظر می گیریم. نشان دهید مجموع این بردارها صفر است.

۲. عمود بر هر وجه یک چندوجهی، برداری به طولی که از لحاظ عددی با سطح آن وجه برابر و متوجه به خارج است، در نظر می گیریم، ثابت کنید مجموع این بردارها برابر صفر است.

۳. ثابت کنید، مجموع کسینوس های زوایای فرجه های یک چهاروجهی، متجاوز از ۲ نیست و گذشته از این برابر ۲ است، اگر و تنها اگر وجوه چهاروجهی مزبور دارای سطح یکسان باشند.

۴. فرض می کنیم $ABCD$ یک چهاروجهی باشد و نیز فرض می کنیم، نقطه ی P ای واقع در درون آن و چنان باشد که مجموع فواصل P از رئوس آن می نیمم باشد. ثابت کنید،

نخی بیاوریم. آن گاه سه نخ را (مطابق شکل ۱) به هم گره بزنیم. در این صورت، دستگاه حاصل زمانی به تعادل می رسد که پتانسیل ثقل می نیمم باشد؛ یعنی زمانی که مجموع طول های اجزای نخ هایی که واقع بر میزند، می نیمم باشد. نقطه ی P ای که سه نخ در آن به هم بسته شده اند، نقطه ی مورد نظر ماست. از طرف دیگر، مجموع سه نیروی برابری که در P عمل می کنند، و نمایشگر وزن های مهره ها هستند، صفر می شود، زیرا تعادل برقرار است؛ در نتیجه:

$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$$

به این طریق، شهود فیزیکی به مشخص کردن مکان P کمک می کند. اکنون به طور دقیق ثابت می کنیم که اگر:

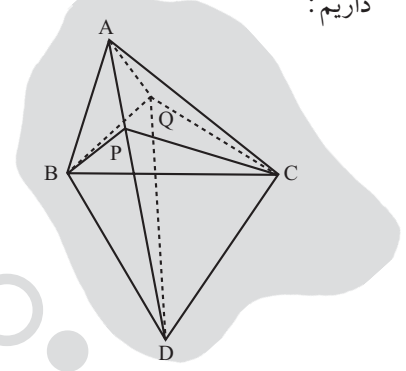
$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$$

در این صورت، $AP + BP + CP$ می نیمم است.

فرض می کنیم D چنان باشد که BCD متساوی الاضلاع باشد و چنان که BC ، A و D را جدا کند (شکل ۲). بنابر «قضیه ی پومپو»^۳، به ازای هر نقطه ی Q واقع در صفحه، داریم:

$$BQ + CQ \geq QD$$

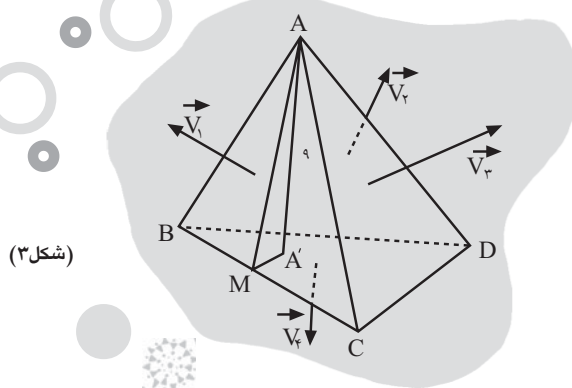
(شکل ۲)



که برابری آن، اگر و تنها اگر Q بر C ، دایره ی محیطی مثلث BCD قرار داشته باشد، برقرار است. بنابر نابرابری مثلثی،

یک چهاروجهی اثبات کنیم. در این صورت، حالت چندوجهی عمومی به سادگی با تقسیم چندوجهی به چهار وجهی‌ها و استفاده از این مطلب که نیروهای واقع بر دیواره‌های داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند، به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم ABCD چهاروجهی و $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ ، چنانچه در شکل ۳ نشان داده شده است، چهار بردار عمود بر وجوه آن باشند.



(شکل ۳)

فرض می‌کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ زاویه‌هایی باشند که صفحات (ABC)، (ABD)، و (ACD) با صفحه‌ی (BCD) می‌سازند. به خاطر سادگی کار، اثبات را در حالتی انجام می‌دهیم که هر سه زاویه حاده باشند. سایر حالات مشابه همین حالت هستند.

مؤلفه‌ی قائم $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ ، به طرف بالا متوجه، و دارای طول زیر است:

$$\|\vec{V}_1\| \cos \alpha_1 + \|\vec{V}_2\| \cos \alpha_2 + \|\vec{V}_3\| \cos \alpha_3$$

این مقدار با

$\delta_{ABC} \cos \alpha_1 + \delta_{ABD} \cos \alpha_2 + \delta_{ACD} \cos \alpha_3$ که در آن، سطح مثلث XYZ با δ_{XYZ} نمایش داده شده، یکسان است.

اگر فرض کنیم A' تصویر A روی صفحه‌ی (BCD) باشد، آن‌گاه سه جمله‌ی مجموع فوق، سطح‌های مثلث‌های $A'BC$ ، $A'BD$ و $A'CD$ هستند. بنابراین جمعشان برابر سطح مثلث BCD می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که مؤلفه‌ی قائم مجموع چهار بردار، صفر است.

از طرف دیگر، مؤلفه‌ی افقی $\vec{V}_1$ ، عمود بر BC و دارای طول $\delta_{ABC} \sin \alpha_1$ است. اگر فرض کنیم: $M \in BC$ ، چنانچه $AM \perp BC$ (شکل ۳)، آن‌گاه $\alpha_1 = \angle AMA'$ ؛ در نتیجه:

$$\sin \alpha_1 = AA' / AM$$

نیمسازهای زوایای APB و CPD بر یک خط قرار دارند و گذشته از این، خط مزبور بر خطی عمود است که توسط نیمسازهای $\angle BPC$ و $\angle APD$ معین می‌شود.

۵. نقطه‌ای در درون یک چندوجهی محدب مفروض است. نشان دهید وجهی از این چندوجهی موجود است که تصویر این نقطه بر آن، داخل آن قرار می‌گیرد.

۶. شهرهای A و B توسط رودخانه‌ی مستقیمی جدا شده‌اند. در کدام نقطه باید پل MN را بنا کرد تا طول جاده‌ی AMNB می‌نیمم باشد.

۷. پنج نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تشکیل شده از هر سه نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده رسم کرده‌ایم. چنین عمودی در مورد هر سه نقطه رسم شده است. ثابت کنید، ده خطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ای مشترک دارند. گزاره را در مورد n نقطه تعمیم دهید.

۸. جمیع مجموعه‌های متناهی S با دست کم سه نقطه‌ی واقع در صفحه را چنان بیابید که به ازای جمیع نقاط متمایز A و Bی واقع در S، عمود منصف AB محور تقارن S باشد.

حل مسائل

۱. فرض می‌کنیم $A_1 A_2 \dots A_n$ چندضلعی مورد نظر و $\vec{V}_i$ بردار عمود بر $A_i A_{i+1}$ ، $i=1, \dots, n$ ، $A_{n+1} = A_1$ باشد. مجموع:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n$$

متناسب با دوران:

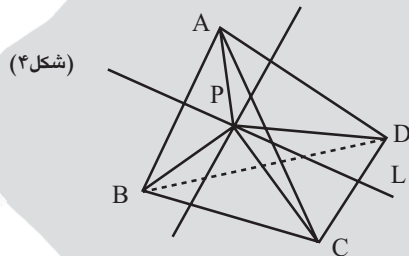
$\vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{A_n A_1}$ به اندازه‌ی 90° است. از آن‌جا که مجموع اخیر صفر است (بردارها، خطی چندضلعی و بسته می‌سازند)، مجموع بردارهای $\vec{V}_i$ نیز صفر است.

۲. این مسئله صورت خاصی از مسئله‌ی پیشین است که دارای «تعبیر فیزیکی» به این شرح است: اگر چندوجهی را با گازی، در فشار عددی برابر یک، پر کنیم، آن‌گاه بنابر قانون پاسکال، بردارها نیروهایی هستند که بر وجوه چندوجهی عمل می‌کنند. ویژگی مورد بحث این است که مجموع این نیروها صفر می‌شود. یعنی چندوجهی در حال تعادل است. این موضوع از نظر گاه فیزیکی واضح است، زیرا هیچ نیروی خارجی بر آن عمل نمی‌کند.

توجه داشته باشید که کافی است، ویژگی مورد نظر را برای

$$AX+BX=AP+PB$$

نیز فرض می‌کنیم، ε_2 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:



$$CY+DY=CP+DP$$

به علت می‌نیمال بودن مجموع فواصل، درون‌های ε_1 و ε_2 نقطه‌ی مشترک ندارند. در نتیجه، دو بیضیوار مماس‌اند. نیمسازهای $\angle APB$ و $\angle CPD$ بر صفحه‌ی مماس مشترک قائم‌اند. بنابراین، «خط حامل»^{۱۱} یکسان دارند. همین استدلال در مورد جفت زاویه‌ی دیگر برقرار است.

فرض می‌کنیم L خط حامل نیمسازهای $\angle APB$ و $\angle CPD$ باشد. اگر کل شکل را حول L به اندازه‌ی 180° دوران دهیم، خط AP به خط BP و DP به CP تبدیل می‌شود (شکل ۴). در نتیجه، نیمساز مشترک $\angle APD$ و $\angle BPC$ تحت این دوران بی‌تغییر است، و بنابراین، بر L عمود است.

۵. فرض می‌کنیم این مطلب درست نباشد. یک چند وجهی از ماده‌ی ناهمگنی چنان می‌سازیم که نقطه‌ی مفروض، مرکز جرم آن باشد. در این صورت، از آن‌جا که این نقطه همواره خارج هر وجه تصویر می‌شود، اگر چند وجهی بر صفحه‌ای قرار گیرد، برای همیشه می‌گلتد. به این ترتیب، متحرکی دائمی ساخته‌ایم که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است؛ زیرا زمانی که نقطه‌ی مزبور به پایین‌ترین پتانسیل می‌رسد، حرکت به طور واضح متوقف می‌شود.

این موضوع نشان می‌دهد که نقطه‌ی مزبور داخل وجهی تصویر می‌شود که از همه به آن نزدیک‌تر است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، و P نقطه‌ی مزبور، F نزدیک‌ترین وجه به آن، و P' تصویر مربوطه روی صفحه‌ی F باشد (شکل ۵) را ملاحظه کنید). فرض می‌کنیم F' وجهی باشد که توسط PP' قطع شده است، و M نقطه‌ی تقاطع باشد. در این صورت، PM بر F' عمود نیست، و در نتیجه، فاصله‌ی P از F' ، اکیداً کمتر از PM است که به نوبه‌ی خود کمتر از فاصله‌ی P از F می‌باشد. این موضوع، مناقض می‌نیمال بودن فاصله‌ی P از F است، و

که مستلزم برابری زیر است:

$$\delta_{ABC} \sin \alpha_1 = AA' \cdot BC / 2$$

به همین ترتیب،

$$\delta_{ABD} \sin \alpha_2 = AA' \cdot BD / 2$$

و

$$\delta_{ACD} \sin \alpha_3 = AA' \cdot CD / 2$$

از مسئله‌ی پیش نتیجه می‌شود که مجموع سه مؤلفه‌ی افقی صفر می‌شود، و از آن‌جا که بردار چهارم دارای مؤلفه‌ی افقی نیست، مسئله حل می‌شود.

۳. بردارهای یکه‌ی $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ را عمود بر وجوه و متوجه به خارج، در نظر می‌گیریم. S ، مجموع کسینوس‌های زوایای فرجه‌های چهاروجهی منفی مجموع «حاصل ضرب‌های نقطه‌ای» $\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j$ ، به ازای هر $i \neq j$ است. به این ترتیب،

$$-2S + (\vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + \vec{V}_3^2 + \vec{V}_4^2) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$S = 2 - \frac{1}{2}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4)^2$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در مورد برابری، $S = 2$ اگر و تنها اگر:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = 0$$

از طرف دیگر، بنابر مسئله‌ی پیشین، مجموع بردارهایی که بر وجوه عمودند، و طول‌هایی برابر سطح‌های این وجوه دارند نیز صفر است. از آن‌جا که این بردارها در یک صفحه نیستند، نتیجه می‌شود که متناسب با $\vec{V}_i$ ‌ها هستند. در نتیجه، سطوح وجوه برابرند، و مسئله حل می‌شود.

۴. فرض می‌کنیم $ABCD$ یک چهاروجهی باشد. در هر رأس چهاروجهی سیاره‌ای به جرم ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت، نقطه‌ی P نسبت به «میدان‌های گرانشی»^۶ چهار سیاره، «پتانسیل مینی‌مال»^۷ دارد. بنابراین، شیء قرار گرفته در P باید در تعادل باشد. نتیجه می‌شود که مجموع «نیروهای جاذبه»^۸ سیاره‌های A و B هم‌اندازه و در جهت مقابل مجموع نیروهای جاذبه‌ی سیاره‌های C و D است. جهت براینده^۹ اول توسط نیمساز $\angle APB$ و جهت دومی توسط نیمساز $\angle CPD$ داده می‌شود.

در مورد اثباتی دقیق، فرض می‌کنیم ε_1 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:

G_1 و G_2 مراکز ثقل دستگاه‌های

$A_1, A_2, \dots, A_k$

و

$B_1, B_2, \dots, B_j$

هستند.

با بازگشت به مسئله‌ی مورد بحث، فرض می‌کنیم O مرکز دایره، G مرکز ثقل n نقطه‌ی مفروض، G_1 مرکز ثقل $n-2$ نقطه از آن‌ها، و M وسط وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی مانده (که در ضمن مرکز ثقل دستگاه حاصل از این دو نقطه نیز هست) باشد. نیز، فرض می‌کنیم L عمود از G_1 بر وتر حاصل از این دو نقطه‌ی باقی مانده باشد.

بنابر ویژگی فوق‌الذکر، نقاط G ، G_1 و M هم‌خط‌اند، و:

$$G_1G:GM = 2:(n-2)$$

نقطه‌ی تقاطع خطوط L و OG را با P نمایش می‌دهیم.

مثلث‌های GG_1P و GMO مشابه‌اند، زیرا OM موازی L است؛ در نتیجه:

$$GP:OG = 2:(n-2)$$

و به این ترتیب، نقطه‌ی P به گونه‌ای یکتا، توسط O و G معین می‌شود، و بنابراین، مشترک بین جمیع نقاط تحت بررسی است.

۸. کار را بر مرکز ثقل S متمرکز می‌کنیم. می‌دانیم که مرکز ثقل بر عمود منصف قطعه‌ی مشخص شده با هر دو نقطه، در S قرار دارد. بنابراین، جمیع نقاط واقع در S ، بر دایره‌ای به مرکز در مرکز ثقل، قرار می‌گیرند. از این مرحله به بعد، حل مسئله آسان است.

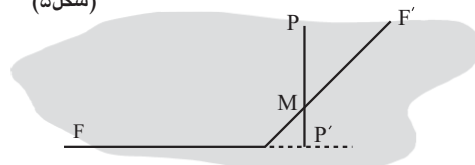
سه نقطه‌ی متوالی A ، B ، C را اختیار می‌کنیم. از آن‌جا که S نسبت به عمود منصف AC متقارن است، B باید بر این عمود منصف واقع باشد. در نتیجه: $AB=BC$. با تکرار این استدلال برای جمیع سه‌تایی‌های نقاط متوالی، نتیجه می‌گیریم که S یک چندضلعی منتظم است، و واضح است که جمیع چندضلعی‌های منتظم، شرط داده شده را برقرار می‌کنند.

زیرنویس

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1. Toricelli Point | 2. Leibniz |
| 3. Pompeiu's theorem | 4. Vertical Component |
| 5. dot products | 6. gravitational fields |
| 7. minimal potential | 8. attractive forces |
| 9. resultant | 10. supporting line |
| 11. Centroid | |

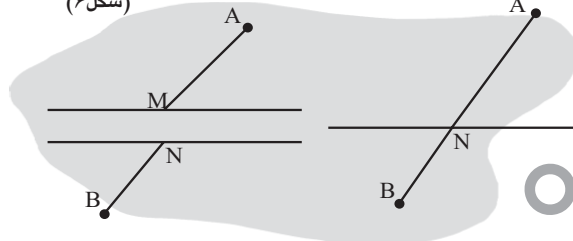
مسئله حل می‌شود.

(شکل ۵)



۶. می‌توان جاده را به عنوان مسیری در نظر گرفت که توسط دسته‌ای از شعاع‌های نورانی ایجاد شده و از محیط بسیار چگالی (رودخانه) گذشته است. از آن‌جا که دسته شعاع نورانی مزبور از سریع‌ترین مسیر می‌گذرد، از محیط چگال مزبور در جهتی عمود بر اطراف آن خواهد گذشت. در نتیجه، دسته شعاع مورد بحث مسیر $AMNB$ را خواهد پیمود. خواننده‌ی دارای معلوماتی از فیزیک، می‌داند که دسته شعاع وارد شونده به یک محیط، طبق همان زاویه‌ی ورود از آن خارج می‌شود. بنابراین، می‌توان عملاً وجود رودخانه را فراموش کرد، و شهرها را به اندازه‌ی پهنای رودخانه، به طرف یکدیگر جابه‌جا کرد و کوتاه‌ترین مسیر را در نظر گرفت، و سپس رودخانه را وارد کرد (شکل ۶ را ملاحظه کنید).

(شکل ۶)



به طور دقیق‌تر، از آن‌جا که طول پل همواره ثابت است، انتقال A' از A به طرف B را با بردار عمود بر کناره‌ی رودخانه، و طولی برابر طول پل، در نظر می‌گیریم. می‌نیم کردن طول $AMNB$ برابر می‌نیم کردن طول $A'NB$ است، و مورد اخیر زمانی می‌نیم است که A' ، N و B هم‌خط باشند. این موضوع امکان N را مشخص می‌کند، و کار تمام است.

۷. گزاره‌ی عمومی زیر را اثبات می‌کنیم.

n نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز ثقل

(مرکزوار) $n-2$ هر نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی مانده رسم می‌کنیم. ثابت کنید، جمیع خطوطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ی مشترکی دارند.

اثبات را بر مبنای این ویژگی مرکز ثقل می‌گذاریم: مرکز ثقل دستگاه $k+j$ نقطه‌ای

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_j$

پاره خط G_1G_2 را به نسبت $k:j$ تقسیم می‌کند که در آن،