

اشاره:
در شماره گذشته رسم نمودار توابع
چند جمله ای و مثلثاتی را بررسی کردیم، اینک به
رسم نمودار توابع کسری می پردازیم. بهتر است
قبل از مطالعه این مقاله، قسمت اول آن را از
شماره ی قبل مطالعه کنید.

رسم نمودار تابع بدوی مشتقی



(قسمت ۲)

رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی تابع f

الف) جهت حرکت f و $\frac{1}{f}$ خلاف یکدیگرند.

ب) همواره مقادیر f و $\frac{1}{f}$ هم علامت اند.

پ) اگر نقطه ی $M|_{f(a)}^a$ نقطه ی می نیمم (ماکزیمم) تابع f

باشد، نقطه ی $M'|_{\frac{1}{f(a)}}^a$ نقطه ی ماکزیمم (می نیمم) تابع $\frac{1}{f}$

است.

ت) هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ باشد، آن گاه $\frac{1}{f}$ در $x = a$ مجانب

قائم دارد.

ث) اگر $y = b$ مجانب افقی تابع f باشد، آن گاه $\frac{1}{b}$

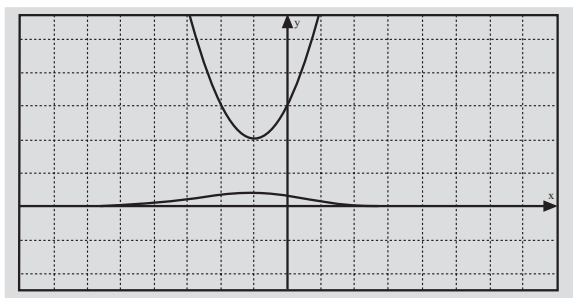
مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

● مجتبی رفیعی

دبیر ریاضی منطقه ی شهر قدس

ج) اگر در اثر میل x به سمت بی نهایت، تابع y نیز به سمت
بی نهایت میل کند، آن گاه $y = \frac{1}{f}$ دارای مجانب افقی به
معادله ی $y = 0$ است.

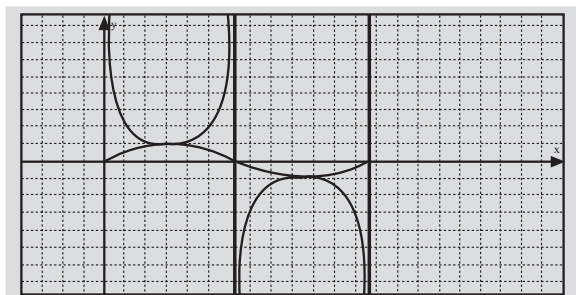
چ) اگر تابع f در یک بازه صفر شود، آن گاه تابع $\frac{1}{f}$ در آن
بازه تعریف نمی شود.



$$۲) y = \frac{1}{\sin x}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در نقاط $x = k\pi$ محور x ها را قطع می کند.

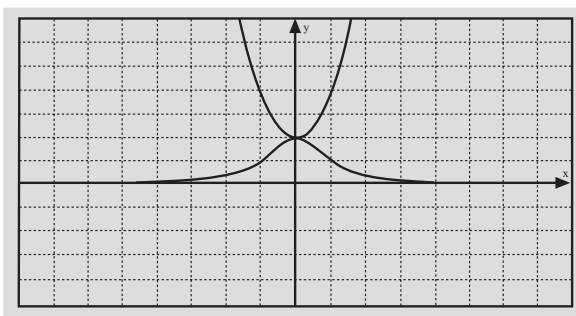
گام دوم: طبق قسمت های الف، ب و پ، نمودار به این صورت است.



$$۳) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 1$ را رسم می کنیم که رأس آن $S|_1$ است.

گام دوم: طبق قسمت های الف، ب و پ نمودار به این صورت است.



ح) محل تقاطع f و $\frac{1}{f}$ در صورت وجود، روی خطوط $y = \pm 1$ است (زیرا $f = \pm 1 \Rightarrow \frac{1}{f} = f$).
نمودار توابع ذیل را رسم کنید:

$$۱) y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 2x + 3$ را رسم می کنیم.

گام دوم: طبق قسمت ج $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

گام سوم: طبق قسمت پ $M|_{\frac{1}{2}}^{-1}$ ماکزیمم تابع $\frac{1}{f}$ است.

گام چهارم: طبق قسمت الف دو تابع f و $\frac{1}{f}$ جهت حرکتشان مخالف یکدیگر است و طبق قسمت ب بالای محور x ها قرار دارند.

رسم نمودار توابع کسری

نمودار توابع کسری زیر را رسم کنید:

$$۲) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت نقاط $x=0$ و $x=2$ مجانب قائم منحنی هستند.
۲. $y=1$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} = 1$$

۳. چون درجه‌ی صورت با مخرج برابر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

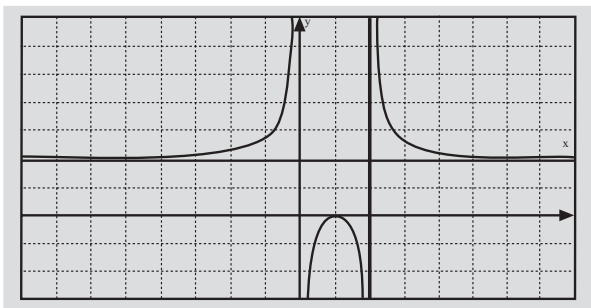
گام دوم: با حل $f(x)=0$ عامل $(x-1)^2$ به دست می‌آید که با توجه به نکته‌ی ۳ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل)، نقطه‌ی $x=1$ ریشه‌ی مضاعف دارد و مماس بر محور x است. که منحنی در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد، زیرا: اگر در معادله‌ی

$$f(x) = (x-1)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{x^2 - 2x} \right)}_{g(x)}$$

در تابع $g(x)$ مقدار ۱ را قرار دهیم، داریم:

$$g(1) = \frac{1}{(1)^2 - 2(1)} = -1 < 0$$

گام سوم: با توجه به این که مجانب‌های قائم منحنی ریشه‌های ساده‌ی مخرج هستند، بنابراین دو طرف مجانب‌ها انفصال ساده داریم. (یک شاخه مثبت بی‌نهایت و دیگری منفی بی‌نهایت)



نمودار تابع بالا را به روش $\frac{1}{f}$ نیز می‌توان رسم کرد.

$$۱) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. چون مخرج ریشه ندارد، بنابراین منحنی فاقد مجانب قائم است.
۲. $y=0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

۳. چون درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

گام دوم: با حل $f(x)=0$ مقدار $x=0$ به دست می‌آید که طبق نکته‌ی ۱ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) ریشه‌ی ساده‌ی منحنی است، زیرا:

$$y = x \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)$$

گام سوم: برای رسم نمودار این تابع، دو نقطه‌ی دلخواه در دو طرف ریشه‌ی ساده‌ی $x=0$ ، انتخاب می‌کنیم و در تابع اصلی قرار می‌دهیم:

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{1 + (-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین منحنی از دو نقطه‌ی $A(-1, -\frac{1}{2})$ و $B(1, \frac{1}{2})$ در

ناحیه‌ی سوم و ناحیه‌ی اول عبور می‌کند. یعنی: منحنی از منفی بی‌نهایت و پایین مجانب افقی $y=0$ شروع می‌شود و باید با عبور از نقطه‌ی A ، در ناحیه‌ی سوم دارای یک می‌نیم شود و نقطه‌ی $(0,0)$ را قطع کند و سپس با عبور از نقطه‌ی B در ناحیه‌ی اول، دارای یک ماکزیمم شود و به سمت مثبت بی‌نهایت و بالای مجانب افقی $y=0$ ادامه پیدا کند.

