

نکته:

تعداد جملات بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ برابر است با
تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad ; \quad \text{یعنی برابر است با: } \binom{n+k-1}{k-1}.$$

زیرا هر جمله‌ی بسط فوق شامل عبارت $(a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k})$ است که در آن باید: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. تعداد جواب‌های معادله‌ی اخیر نیز همان تعداد جملات بسط است.

مثال ۱۳. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^9$ را به دست آورید.

$$x+y+z=9 \rightarrow \binom{11}{2} = 55$$

توجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$ ($x_{k+1} > 0$)؛
یعنی برابر است با: $\binom{n-1}{k}$.

مثال ۱۴. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این نامعادله را بیابید.

$$x+y+z < 7$$

$$x+y+z < 7 \leftrightarrow x+y+z+t=7 \rightarrow \binom{6}{3}$$

نکته:

الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$ ، با شرط $x_{k+1} \geq 1$ ،
یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n-1$ ،
یعنی: $\binom{n-1+k}{k}$ ، برابر است.

ب) در اعداد صحیح همواره می‌توان از نامساوی $a \leq b$ نامساوی $a < b+1$ را نتیجه گرفت. بنابراین، اگر نامعادله با رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی ($\leq$) مورد نظر باشد، ابتدا یک واحد به عدد n می‌افزاییم و سپس با توجه به دو نکته‌ی قبل، تعداد جواب‌های مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b+1$$

$$x+y+z \leq 7 \rightarrow x+y+z < 8$$

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

پارادوکس (متناقض نما)

آیا قبول دارید که پول توجیبی شما همیشه برابر است با پول توجیبی دوستان؟! اگر قبول ندارید این مطلب را بخوانید:

فرض کنید پول توجیبی شما A تومان و پول توجیبی دوستان B تومان باشد. بنابراین میانگین پول شما و دوستان برابر است با:

$$C = \frac{A+B}{2} \quad \text{یا} \quad 2C = A+B$$

با ضرب $(A-B)$ در رابطه قبل داریم:

$$(A-B)(A+B) = (A-B)2C$$

$$A^2 - B^2 = 2CA - 2CB$$

$$A^2 - 2CA = B^2 - 2CB$$

C^2 را به طرفین بیفزاییم:

$$A^2 - 2CA + C^2 = B^2 - 2CB + C^2$$

$$(A-C)^2 = (B-C)^2$$

پس:

$$(A-C) = (B-C)$$

حذف $(-C)$ از طرفین:

$$A=B$$

ادب ریاضی

لابد میل دارید بدانید که «اراتوستن» چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او، این بود: با توجه به این که محیط دایره به 360° درجه تقسیم می‌شود، اگر من بتوانم طول یک درجه‌ی آن را بر حسب استاد «stade» معین کنم (هر استاد تقریباً $157/5$ متر است)، برای تعیین محیط کره‌ی زمین کافی است که عدد حاصل را در 360° ضرب کنم. در واقع، مطلب رجوع شده بود به این که طول کمان یک درجه را معین کنند.