

اصل شمول و عدم شمول

اگر تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ و متمم مجموعه A را با $\bar{A}$ نمایش دهیم، در این صورت اصل شمول و عدم شمول برای دو و سه مجموعه به صورت زیر بیان می شود:

(اصل شمول برای دو مجموعه)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(اصل عدم شمول برای دو مجموعه)

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

توجه دارید که دو مجموعه A و B هر دو از مجموعه S مرجع تعریف شده اند.

(اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

مثال ۱. معین کنید چند عدد مانند n وجود دارد، به طوری

که $1 \leq n \leq 3400$ و نیز n نه بر ۳ بخش پذیر باشد و نه بر ۷.

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته تر) (قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در این مقاله سعی می کنیم، با استفاده از اصولی هم چون «اصل شمول و عدم شمول»، به حل بعضی از مسائل شمارشی بپردازیم و شمار را با کاربردهای این اصل آشنا سازیم. هم چنین، با استفاده از قضیه تبدیل با تکرار، قضیه ای را اثبات کنیم و از آن قضیه در حل تعدادی دیگر از مسائل شمارشی و حتی یافتن تعداد جواب های صحیح و نامنفی یک معادله سیاله ی خطی و چند مجهولی، بهره خواهیم برد.

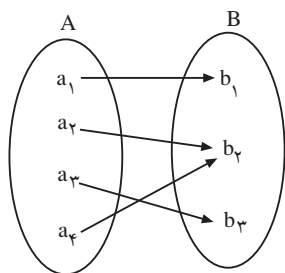
$(A \cap B)$ مجموعه‌ی سه رقمی‌هایی است که فاقد ۵ و ۶ هستند.

$$|A \cap B| = 7 \times 8 \times 8 = 448$$

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 900 - 2 \times 448 + 448$$

مثال ۴. اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

در این صورت چند تابع پوشا از روی A (توابعی که روی همه‌ی اعضای A اثر کنند) به روی B می‌توان تعریف کرد؟



پاسخ:

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid b_1, f\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid b_2, f\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid b_3, f\}$$

$$|\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - 3 \times 2^4 + 3 \times 0 = 36$$

$$|S| = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = 2^4 = |A_2| = |A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

توجه: تابع $f: A \rightarrow B$ را «نگاشت» می‌نامیم هرگاه: $D_f = A$.

نکات مهم: اگر $|B| = k$ و $|A| = m$ در این صورت:
I) اگر $m < k$ ، هیچ نگاشت پوشا از A به B تعریف نمی‌شود.

II) اگر $m > k$ ، هیچ نگاشت یک به یک از A به B تعریف نمی‌شود.

III) تعداد کل نگاشت‌های از A به B برابر است با: $|B|^{|A|} = k^m$.

$$A = \{1 \leq n \leq 3400: 3|n\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموعه‌ی} \\ \text{مورد نظر} \end{array} \right\} = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$B = \{1 \leq n \leq 3400: 7|n\}$$

$$|A \cup B| = \left[\frac{3400}{3} \right] + \left[\frac{3400}{7} \right] - \left[\frac{3400}{[3, 7]} \right]$$

$$= 1133 + 485 - 161 = 1457$$

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 3400 - 1457 = 1943$$

توجه: برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول، همواره مجموعه‌هایی می‌سازیم که دقیقاً ضد خاصیت یا حالتی باشند که مورد نظر است.

مثال ۲. چند عدد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۵۰۰ وجود دارد که بر ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
پاسخ:

$$100 \leq n \leq 2500$$

$$A = \{100 \leq n \leq 2500: 4|n\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموعه‌ی} \\ \text{مورد نظر} \end{array} \right\} = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$B = \{100 \leq n \leq 2500: 6|n\}$$

$$|A \cup B| = \left[\frac{2401}{4} \right] + 1 + \left[\frac{2401}{6} \right] - \left[\frac{2401}{12} \right]$$

چون ۱۰۰ بر ۴ بخش پذیر است.

$$= 601 + 400 - 200 = 801$$

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 2401 - 801 = 1600$$

تمرین: اگر n عددی طبیعی و $1 \leq n \leq 2600$ باشد، در این صورت چه تعداد از این اعداد بر ۴، ۶ و ۷ بخش پذیر نیستند؟
مثال ۳. چه تعداد عدد سه رقمی وجود دارد که در هریک از آن‌ها، هریک از ارقام ۵ و ۶ حداقل یک بار وجود داشته باشد؟
 $S = \{abc \mid a, b, c \text{ ارقام } 0 \text{ تا } 9\}$

پاسخ:

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) = \text{مجموعه‌ی مورد نظر}$$

$$A = \{abc \mid a, b, c \neq 5\}, B = \{abc \mid a, b, c \neq 6\} \Rightarrow$$

$$|S| = 9 \times 10 \times 10 = 900 \text{ و } |A| = 8 \times 9 \times 9 = 648 = |B|$$

A مجموعه‌ی سه رقمی‌هایی است که فاقد ۵ هستند.

گل نوع اول	گل نوع دوم	...	گل نوع $(k-1)$ ام	گل نوع k ام
***	**	...	***	*
:	:	:	:	:

(شکل ۱)

مثال ۶. به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، ۷ شاخه گل انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$= \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

مثال ۷. به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی داریم و سپس سه شاخه ی باقی را به دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب می کنیم که این تعداد انتخاب برابر با $\binom{7}{4}$ در حالت کلی می توان از

فرمول $\binom{n-1}{k-1}$ برای حل این نوع مسائل استفاده کرد:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{7}{4}$$

مثال ۸. به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۹ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن که از هر نوع گل حداقل دو شاخه و از هر نوع گل چهارم حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا دو شاخه گل از نوع دوم و یک شاخه از نوع چهارم برمی داریم که در این صورت تعداد $6 = 9 - 3$ شاخه گل برای انتخاب از بین ۵ نوع گل باقی می ماند. چون این انتخاب دلخواه است، طبق قضیه برابر است با:

$$\binom{10}{5}$$

(IV) اگر $m < k$ ، در این صورت تعداد نگاشت یک به یک از A به B برابر است با: $(k)_m$ یا $P(k, m)$.

(V) اگر $m = k$ ، در این صورت تعداد نگاشت های یک به یک و در نتیجه پوشا برابر است با: $m!$ یا $k!$ (چون m با k برابر است).

(VI) اگر $|B| = 3$ و $|A| = m \geq 4$ ، در این صورت تعداد نگاشت های پوشا از A به B برابر است با:

$$3^m - 3 \times 2^m + 3 \times 1^m$$

مثال ۵. چند نگاشت پوشا از یک مجموعه ی ۵ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی تعریف می شود؟

پاسخ:

$$3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$$

قضیه:

اگر k نوع گل مفروض باشند و از هر نوع، به تعداد کافی وجود داشته باشد، در این صورت تعداد حالت هایی که می توان یک دسته گل شامل n شاخه گل انتخاب کرد، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

اثبات: k نوع گل را با $k-1$ خط عمودی می توان جدا کرد (شکل ۱) و اگر انتخاب هر شاخه گل از یک نوع گل را با یک ستاره مشخص کنیم، برای نمایش انتخاب n شاخه گل از بین این k نوع گل می باید از n ستاره استفاده کنیم. بنابراین تعداد ستاره ها و خط های عمودی برابر است با: $(n+k-1)$. تعداد کل تبدیلات این اشیا نیز برابر است با: $[n+(k-1)]!$. اما می دانیم، جابه جایی های n ستاره با یکدیگر و $k-1$ خط عمودی با یکدیگر، حالت جدید یا دسته گل جدیدی تولید نمی کند و طبق قضیه ی تبدیل با تکرار، باید تعداد کل تبدیلات را بر $(k-1)! \times n!$ تقسیم کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{تعداد دسته گل های } n \text{ شاخه ای از } k \text{ نوع گل} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 \geq 2 &\rightarrow x_2 - 2 \geq 0 \text{ و } x_2 - 2 = y_2 & x_2 &= y_2 + 2 \\
 x_4 \geq 1 &\rightarrow x_4 - 1 \geq 0 \text{ و } x_4 - 1 = y_4 & x_4 &= y_4 + 1 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\
 \rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + y_4 + 1 + x_5 &= 8 \\
 x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 &= \underbrace{8-2-1}_5 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$= \binom{9}{4} \text{ تعداد جواب های صحیح و نامنفی}$$

این مسئله نیز با حالتی که بخواهیم از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه انتخاب کنیم، با شرط آن که از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع چهارم حداقل ۱ شاخه انتخاب شده باشد، معادل است.

مثال ۱۲. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $0 \leq x_i \leq 2$ و $i = 1, 2, 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ پاسخ:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 3\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \geq 3\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geq 3\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow \binom{3}{2} = 3 \Rightarrow |A_1| = 3$$

مجموعه ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$$

$$= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 - 3 \times 3 = 6$$

$$|S| = \binom{6}{2} = 15 \quad (\text{کل جواب ها})$$

$$|A_1| = 3 = |A_2| = |A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 0$$

(برای محاسبه ی $|A_i|$ می باید تعداد جواب های معادله را با

شرط $x_1 \geq 3$ پیدا کنیم که برابر است با تعداد جواب های

$$\text{معادله ی } y_1 + x_2 + x_3 = 4 - 3 \text{ ؛ یعنی: } \binom{3}{2}.$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

قضیه: تعداد جواب های صحیح و

نامنفی معادله ی $(n \in \mathbb{N}) x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$$\text{برابر است با: } \binom{n+k-1}{k-1}.$$

اثبات: هر جواب صحیح و نامنفی برای معادله ی فوق

درواقع یک روش انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل است، به شرط آن که x_i را تعداد انتخاب ها از گل نوع i ام فرض کنیم، و برعکس؛ یعنی هر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل، جوابی برای معادله ی فوق است. قبلاً ثابت کردیم، تعداد این انتخاب ها یا تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی فوق برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال ۹. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ چند جواب صحیح

و نامنفی دارد؟

پاسخ: راه اول:

$$\begin{array}{l} \circ \quad \circ \quad 4 \rightarrow \text{جواب } 3 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \rightarrow \text{جواب } 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \circ \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{جواب } 3 \\ 3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{جواب } 6 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{جواب } 3 \\ 3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{جواب } 6 \end{array} \right\} \text{راه دوم: } \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$$

$$\text{جواب } 15$$

$$\text{مثال } 10. \text{ معادله ی } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \text{ چند جواب}$$

$$\text{صحیح و مثبت دارد؟}$$

$$\text{پاسخ: } x_i \text{ ها حداقل می توانند } 1 \text{ باشند، پس: } k = 4 \text{ و}$$

$$n = 7 - 4 = 3. \text{ درواقع، این حالت با حالت انتخاب های } n$$

$$\text{شاخه گل از بین } k \text{ نوع گل، با شرط انتخاب}$$

$$\text{حداقل یک شاخه از هر نوع گل معادل و برابر}$$

$$\text{است با: } \binom{n-1}{k-1} = \binom{6}{3}.$$

$$\text{مثال } 11. \text{ معادله ی } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \text{ با شرط}$$

$$x_2 > 1 \text{ و } x_4 \geq 1 \text{ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟}$$

$$\text{پاسخ:}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 - 2 - 1$$

$$\text{توضیح جبری این جواب:}$$