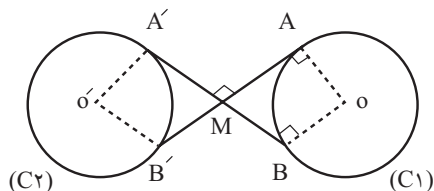


تفریح اندیشه

سید ابراهیم حسینی

طول تسمه

تسمه‌ای به صورت ضربدری دور دو چرخ مطابق شکل می‌پیچد، اگر قطر هر چرخ ۱۶ سانتی متر باشد و تسمه در عبور از کنار خود در نقطه‌ی M زاویه‌ی قائمه بسازد، طول تسمه چه قدر است؟



حل: از مرکز دایره‌ی (C_1) یعنی نقطه‌ی O به A و B پاره‌خط‌هایی را رسم می‌کنیم. چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است بنابراین $\angle A_1 = 90^\circ$ و $\angle B_1 = 90^\circ$ و چون $OA = OB = 8$ (شعاع دایره) در نتیجه چهارضلعی MAOB مربع است، پس $MA = MB = 8$. به همین ترتیب چهارضلعی MA'O'B' نیز مربع می‌باشد، بنابراین $A'M = MB' = 8$ در نتیجه داریم:

$$A'B + AB' = 32 \quad (1)$$

چون چهارضلعی MAOB مربع است، پس $\angle O = 90^\circ$ و زاویه‌ی مرکزی O برابر با کمان مقابلش است، در نتیجه $AB = 90^\circ$ ، پس قسمتی از دایره‌ی (C_1) که تسمه دور آن قرار دارد، برابر با $\frac{3}{4}$ محیط این دایره می‌باشد؛ یعنی:

$$\frac{3}{4} \times 2\pi r = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 8 = 12\pi$$

به همین ترتیب قسمتی از دایره‌ی (C_2) که تسمه دور آن قرار دارد برابر با 12π است، پس طول تسمه با توجه به رابطه‌ی (۱) برابر است با:

$$32 + 12\pi + 12\pi = 32 + 24\pi$$



$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + (\frac{kx}{n})^2} = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2 x^2} = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}$$

تمرین ۱. حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید:

(الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$

(پ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{2n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

(ت) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$

تمرین ۲. ثابت کنید: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$

زیرنویس

1. Limit
2. Algebraic
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

منابع

۱. تلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۶.
۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.
۳. اشنیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.
4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.
5. Varberg, D. W. and Purcell, E. J. "Calculus". Prentice Hall (7th Edition). 1997.