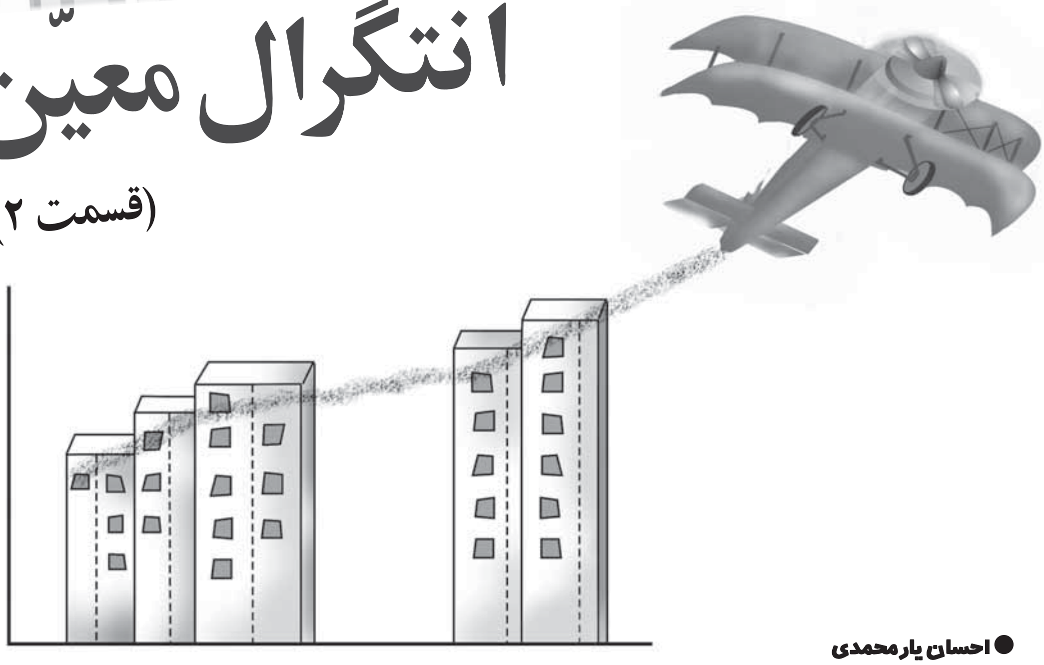
محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معیّن

(قسمت ۲)



● احسان یارمحمدی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی محاسبه‌ی پاره‌ای از حدهای توابعی صحبت کردیم که به صورت مجموع‌های خاصی مطرح می‌شوند و با استفاده از روش‌های متعارفی که در محاسبه‌های حدها وجود دارند، قابل حل نیستند. سپس در این خصوص مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین را مطرح کرده و آزمون‌هایی را آوردیم. اینک در ذیل، ادامه‌ی آزمون‌ها را ملاحظه می‌کنید. (قبل از مطالعه‌ی این مقاله، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید)

آزمون ۶. حاصل این حد، کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۳)\times(n-۲)\times(n-۱)\times n)^{\frac{۱}{n}}}{n}$$

۱) e ۲) $\frac{۱}{e}$

۳) -۱ ۴) ۱

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$L=\lim_{n\to\infty} \frac{(۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۳)\times(n-۲)\times(n-۱)\times n)^{\frac{۱}{n}}}{n}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{۱}{n}}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{۱}{n}}}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۱)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L)=\ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۱)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L)=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۱)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.\ln\frac{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۱)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}$$

$$\Rightarrow \ln(L)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.(\ln(\frac{۱}{n})+\ln(\frac{۲}{n})+\ln(\frac{۳}{n})+\cdots$$
$$+\ln(\frac{n-۲}{n})+\ln(\frac{n-۱}{n})+\ln(\frac{n}{n}))$$

با فرض این‌که $b=۱$ و $a=۰$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{۱}{n}.(\ln(\frac{۱}{n})+\ln(\frac{۲}{n})+\ln(\frac{۳}{n})+\cdots+\ln(\frac{n-۲}{n})$$
$$+\ln(\frac{n-۱}{n})+\ln(\frac{n}{n}))\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{۱}{n}(f(\frac{۱}{n})+f(\frac{۲}{n})+f(\frac{۳}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\ln(\frac{k}{n})\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\ln(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۳)\times(n-۲)\times(n-۱)\times n)^{\frac{۱}{n}}}{n}$$
$$=\int_۰^۱\ln(x)dx=(x\ln(x)-x)\Big|_۰^۱=-۱$$

درنتیجه:

$$\ln(L)=-۱\Rightarrow L=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$$

آزمون ۷. حاصل این حد کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۳^۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n^۲}})$$

۱) $\ln(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $\ln(\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}})$

۳) $\ln(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $\ln(\frac{۱}{۲+\sqrt{۲}})$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۳^۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n^۲}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{\sqrt{n^۲(۱+\frac{۱^۲}{n^۲})}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲(۱+\frac{۲^۲}{n^۲})}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲(۱+\frac{۳^۲}{n^۲})}}+\cdots$$
$$+\frac{۱}{\sqrt{n^۲(۱+\frac{n^۲}{n^۲})}})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.(\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{۱}{n})^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{۲}{n})^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{۳}{n})^۲}}+\cdots$$
$$+\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{n}{n})^۲}})$$

با فرض این‌که $b=۱$ و $a=۰$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{۱}{n}.(\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱^۲}{n^۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۲^۲}{n^۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۳^۲}{n^۲}}}+\cdots$$
$$+\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{n^۲}{n^۲}}})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{۱}{n}(f(\frac{۱}{n})+f(\frac{۲}{n})+f(\frac{۳}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{k^۲}{n^۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{k}{n})^۲}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۳^۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n^۲}})$$
$$=\int_۰^۱\frac{dx}{\sqrt{۱+x^۲}}=\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})\Big|_۰^۱=\ln(۱+\sqrt{۲})$$

آزمون ۸. حاصل این حد کدام‌یک از گزینه‌های زیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{۲\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{۳\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) ۲ ۴) ۴

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

با فرض این‌که $b=\pi$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{\pi}{n}(f(\frac{\pi}{n})+f(\frac{2\pi}{n})+f(\frac{3\pi}{n})+\cdots+f(\frac{n\pi}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k\pi}{n})=\sin(\frac{k\pi}{n})\overset{x=\frac{k\pi}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sin(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)=\int_0^\pi\sin(x)dx=-\cos(x)\Big|_0^\pi=2$$

آزمون ۹ . حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{3}{n})}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{6}{n})}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+(1+\frac{3(n-1)}{n})}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})$$

با فرض این‌که $b=3$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3}{n}$ است. بنابراین:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})\qquad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{3}{n}(f(\frac{3}{n})+f(\frac{6}{n})+f(\frac{9}{n})+\cdots+f(\frac{3n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{3k}{n})=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$
$$=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=2$$

آزمون ۱۰ : حاصل حد زیر کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) π ۴) ۱

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{۲n})+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{\pi}{۲n})+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{۲\pi}{۲n})+\cdots+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{(n-۱)\pi}{۲n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{۲n}.(۱+\cos(\frac{\pi}{۲n})+\cos(\frac{۲\pi}{۲n})+\cdots+\cos(\frac{(n-۱)\pi}{۲n}))$$

با فرض این‌که $b=\frac{\pi}{۲}$ و $a=۰$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{۲n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{۲n}.(\cos(\frac{۰\pi}{۲n})+\sin(\frac{\pi}{۲n})+\sin(\frac{۲\pi}{۲n})+\cdots+\sin(\frac{(n-۱)\pi}{۲n}))\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{\pi}{۲n}(f(\frac{۰\pi}{۲n})+f(\frac{\pi}{۲n})+f(\frac{۲\pi}{۲n})+\cdots+f(\frac{(n-۱)\pi}{۲n}))$$

داریم:

$$f(\frac{k\pi}{۲n})=\cos(\frac{k\pi}{۲n})\overset{x=\frac{k\pi}{۲n}}{\Rightarrow}f(x)=\cos(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{۲n})+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{\pi}{۲n})+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{۲\pi}{۲n})+\cdots+(\frac{\pi}{۲n})\cos(\frac{(n-۱)\pi}{۲n})\right)=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos(x)dx=\sin(x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=۱$$

مسئله‌ی ۱ [قضیه]. به ازای هر $p\in IN$ همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱^p+۲^p+۳^p+\cdots+n^p}{n^{p+۱}}=\frac{۱}{p+۱}$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱^p+۲^p+۳^p+\cdots+n^p}{n^{p+۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.\frac{۱^p+۲^p+۳^p+\cdots+n^p}{n^p}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}.(\frac{۱^p}{n^p}+\frac{۲^p}{n^p}+\frac{۳^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})$$

با فرض این‌که $b=۱$ و $a=۰$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱}{n}$ است. بنابراین:

$$\{x_n\}=\frac{۱}{n}.(\frac{۱^p}{n^p}+\frac{۲^p}{n^p}+\frac{۳^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{۱}{n}(f(\frac{۱}{n})+f(\frac{۲}{n})+f(\frac{۳}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=(\frac{k}{n})^p\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=x^p$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱^p+۲^p+۳^p+\cdots+n^p}{n^{p+۱}}=\int_{۰}^{۱}x^pdx=\frac{x^{p+۱}}{p+۱}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{p+۱}$$

مسئله‌ی ۲. ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{x}{n+kx}=\ln(۱+x)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{x}{n+kx}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{x}{n(۱+\frac{kx}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{kx}{n}}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=۱}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_{a}^{b}f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=۰$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.(\frac{۱}{۱+\frac{x}{n}}+\frac{۱}{۱+\frac{۲x}{n}}+\frac{۱}{۱+\frac{۳x}{n}}+\cdots+\frac{۱}{۱+\frac{nx}{n}})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{x}{n}.(f(\frac{x}{n})+f(\frac{۲x}{n})+f(\frac{۳x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n}))$$ داریم:

$$f(\frac{kx}{n})=\frac{۱}{۱+\frac{kx}{n}}\overset{t=\frac{kx}{n}}{\Rightarrow}f(t)=\frac{۱}{۱+t}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=۱}^{n}f(\frac{kx}{n})=\int_{۰}^{x}f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{kx}{n}}$$

$$=\int_{۰}^{x}\frac{dt}{۱+t}=\ln(۱+t)\Big|_{۰}^{x}=\ln(۱+x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{x}{n+kx}$$

$$=\ln(۱+x)$$

مسئله‌ی ۳ [قضیه]. به ازای هر $p \in Z^+ - \{1\}$ (pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر از یک یا pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر مساوی با دو)، همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{3}{n})}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n((p-1)+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{(p-1)+\frac{k}{n}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} fx=\frac{1}{(p-1)+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(p-1)+x}=\ln(p-1+x)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

مسئله‌ی ۴. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}=\frac{\operatorname{Arc\,tan}(x)}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2+k^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2(1+\frac{k^2x^2}{n^2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_a^b f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.\left(\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{3x}{n})^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+(\frac{nx}{n})^2}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{x}{n}\left(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{kx}{n})=\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}\overset{t=\frac{kx}{n}}{\Rightarrow} f(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{kx}{n})=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{Arc\,tan}(t)\Big|_0^x=\operatorname{Arc\,tan}(x)$$