

مسابقه های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا (قسمت ۷) مسابقه ی آزاد ریاضی در کانادا



۴۸

اشاره

ماشین های محاسبه در آن غیر مجاز است. مسائل در دو بخش A و B تنظیم شده اند. بخش A شامل ۸ سؤال است (که آسان ترند) و هر سؤال دارای ۱۵ امتیاز است. مسائل بخش B (که دشوارترند) شامل ۴ سؤال هستند و هر سؤال ۱۰ امتیاز دارد.

درباره ی مسابقه ی آزاد ریاضی در کشور کانادا، قبلاً در شماره ی ۴۹ برهان مطالبی نوشتیم و مسابقه ی آزاد ریاضی سال ۲۰۰۰ را نیز در آن شماره آوردیم. اینک مسائل مسابقه ی سال ۲۰۰۳ را تقدیم شما می کنیم. یادآوری می شود که مدت مسابقه ۲/۵ ساعت و استفاده از

ابتدا صورت سؤال ها و سپس پاسخ آن ها را ملاحظه می کنید.

بخش A

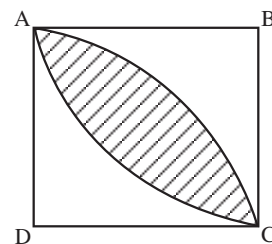
۱. جف، گرت و اینا، همگی در یک روز از سال به دنیا آمده اند. گرت یک سال بزرگ تر از جف و اینا دو سال بزرگ تر از گرت است. امسال مجموع سن آن ها ۱۱۸ سال می شود. گرت چند سال دارد؟

۲. تصویر نقطه ی (۲- و ۴) بر محور x ها را روی خط $y=x$ تصویر می کنیم. مختصات نقطه ی آخر چیست؟

۳. دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز مبداء مختصات مفروض است. دو ذره به طور هم زمان از نقطه ی (۰ و ۱) و در دو جهت مخالف، روی محیط دایره شروع به حرکت می کنند: یکی از آن دو در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت و با سرعت ثابت ۷، و دیگری در جهت حرکت عقربه های ساعت و با سرعت ثابت ۳۷. بعد از ترک نقطه ی (۰ و ۱) دو ذره، نخست در نقطه ی P و سپس در نقطه ی Q همدیگر را ملاقات می کنند. مختصات نقطه ی Q را محاسبه کنید.

۴. دو عدد متمایز از مجموعه ی $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ به طور تصادفی انتخاب شده اند. احتمال آن که مجموع آن ها از حاصل ضربشان بزرگ تر باشد، چیست؟

۵. مربع ABCD (شکل زیر) به ضلع ۶ رسم شده است. کمان هایی از دایره هایی به شعاع ۶ و به مرکز های B و D نیز ترسیم شده اند. مساحت محدوده ی سایه زده چه قدر است؟



۶. نماد $[a]$ به معنی بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی a است؛ برای مثال: $[5/7]=5$ ، $[4]=4$ و $[-4/2]=-5$. همه ی مقادیر x را به دست آورید به طوری که داشته باشیم:

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$$

۷. نقاط $P(4, 1)$ ، $Q(7, -8)$ و $R(1, 1)$ وسط های شعاع هایی از دایره ی C_1 هستند. طول شعاع این دایره را به دست آورید.

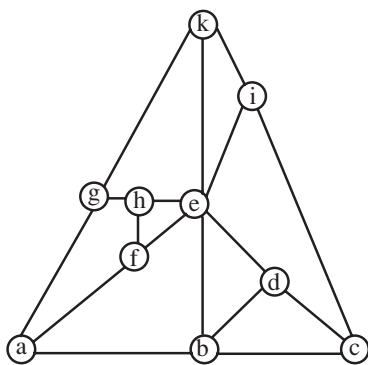
۸. تعداد سه تایی های (k, l, m) را به دست آورید،

به طوری که k و l و m عددهای طبیعی باشند و:

$$\frac{4k}{5} + \frac{5l}{6} + \frac{6m}{7} = 82 \text{ و } k+l+m=97$$

بخش B

۱. در نمودار زیر، عددهای صحیح، باید در دایره ها طوری واقع شوند که مجموع عددهای واقع در دایره های روی هریک از ده خط راست، مساوی ۱۵ شود؛ برای مثال: $e+i=15$ و $a+g+k=15$.

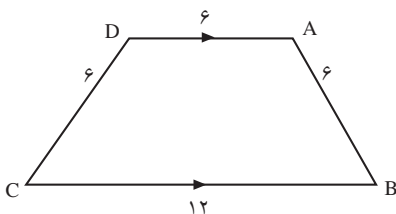


الف) اگر $k=2$ و $e=5$ ، همه ی عددهای مناسب را در دایره ها قرار دهید.

ب) فرض کنید $k=2$ و e غیر مشخص باشد: ۱-۱. دستوری برای محاسبه ی b و c بر حسب e به دست آورید.

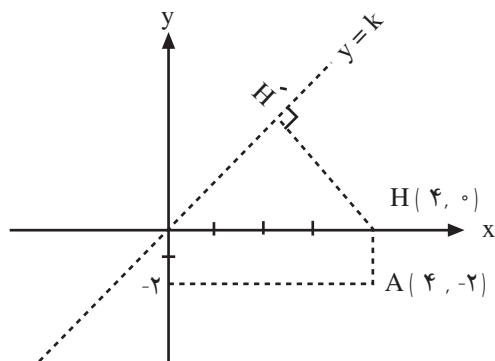
۲-۱. نشان دهید، مقدار e باید مساوی ۵ باشد. ج) حال فرض کنید $k=x$ و x نامعین باشد. ثابت کنید که e هم چنان باید مساوی ۵ باشد.

۲. انباری به شکل یک دوزنقه، با سه ضلع به طول ۶ متر و یک ضلع به طول ۱۲ متر، مطابق شکل ساخته شده است.

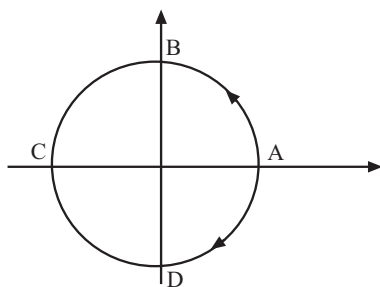


الف) اندازه های زوایای داخلی دوزنقه را به دست آورید. ب) اگر زنجیری در نقطه ی A به دیوار خارجی انبار وصل

$$\Rightarrow b = 4 - a \Rightarrow a = 4 - a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow H'(2, 2)$$



۳. وقتی ذره ی اول از نقطه ی شروع (A) به نقطه ی B می رسد، ذره ی دوم که سرعتش سه برابر سرعت آن است، از سمت دیگر به نقطه ی B می رسد. (اولی 90° و دومی 270° روی محیط دایره حرکت می کنند.) بنابراین، نقطه ی P روی نقطه ی $B(0,1)$ واقع است. اکنون مبدأ حرکت، نقطه ی (۱ و ۰) است و ذره ی اول با سرعت V در همان جهت (خلاف حرکت عقربه های ساعت) و ذره ی دوم نیز در جهت حرکت عقربه های ساعت به حرکت خود ادامه می دهند. با همان استدلال به سادگی در می یابیم که نقطه ی Q بر نقطه ی $C(-1,0)$ قرار دارد.



۴. تعداد اعضای فضای نمونه ی این پیشامد تصادفی معادل تعداد انتخاب های ۲ شیء از ۵ شیء است:

$$n(S) = \binom{5}{2} = 10$$

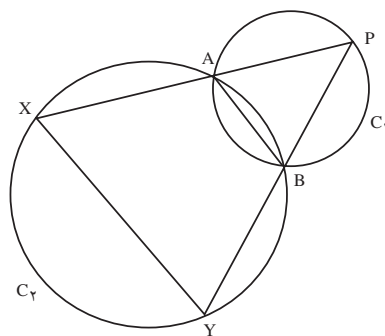
به سادگی و بدون هیچ محاسبه ای می توان با امتحان کردن این ۱۰ جفت عدد، عددهایی را که در شرط مسئله صدق می کنند، تعیین کرد:

$$A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{10}$$

۵. اگر قطر مربع را رسم کنیم، مساحت محدوده ی سایه زده در شکل ذیل برابر است با مساحت ربع دایره به شعاع $OA = OC$ ، منهای مساحت مثلث قائم الزاویه ی OAC:

شده و طول زنجیر ۸ متر باشد و کسی انتهای زنجیر را در دست بگیرد و حرکت کند، حداکثر مساحت محدوده ای که می تواند در خارج انبار طی کند، چه قدر است؟
۳. الف) در شکل زیر، دایره های C_1 و C_2 دارای وتر مشترک AB هستند.



نقطه ی P روی دایره ی C_1 و در خارج دایره ی C_2 انتخاب شده است و امتداد خطوط PA و PB دایره ی C_2 را به ترتیب در نقاط X و Y قطع کرده است. اگر $AB = 6$ ، $PA = 5$ ، $PB = 7$ و $AX = 16$ باشد، طول XY را به دست آورید.
ب) دو دایره ی C_2 و C_3 در وتر GH مشترک هستند. نقطه ی Q روی C_3 و در خارج C_2 انتخاب شده و امتداد خطوط QG و QH دایره ی C_2 را به ترتیب در نقاط V و W قطع کرده است. نشان دهید که بدون بستگی به جای Q، طول VW همواره مقداری ثابت است.

۴. معادله ی $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ دارای ریشه های حقیقی a و b و c است. مقدار $a^5 + b^5 + c^5$ را به دست آورید.

حل مسائل بخش A

۱. اگر سن جف را x فرض کنیم، سن گرت $x+1$ و سن اینا $x+3$ خواهد بود. به سادگی و به کمک فرض مسئله می توان نوشت:

$$x + x + 1 + x + 3 = 118 \Rightarrow 3x = 114 \Rightarrow x = 38$$

یعنی گرت ۳۹ سال دارد.

۲. تصویر نقطه ی $A(4,-2)$ بر محور x ها، نقطه ی $H(4,0)$ است. اگر تصویر H بر نیمساز ربع اول و سوم، نقطه ی $H'(a,b)$ باشد، بدیهی است که $a=b$ و نیز شیب HH' مساوی ۱- است. بنابراین می توان نوشت:

$$m_{HH'} = \frac{b-0}{a-4} = \frac{b}{a-4} = -1$$

$x = 7$: معادله‌ی عمود منصف PR

$$\begin{cases} x = 7 \\ x - 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = -3 \Rightarrow$$

$O(7, -3) \Rightarrow$ مرکز دایره‌ی محیطی مثلث PQR

شعاع دایره‌ی محیطی مثلث PQR: $r = op = \sqrt{(7-4)^2 + (-3-1)^2} = 5$

$$\Rightarrow R = 2r = 10$$

$$\frac{4k}{5} + \frac{5l}{6} + \frac{6m}{7} = 82 \quad . ۸$$

$$\Rightarrow (k - \frac{k}{5}) + (l - \frac{l}{6}) + (m - \frac{m}{7}) = 82$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{k+m}{97}) - (\frac{k}{5} + \frac{l}{6} + \frac{m}{7}) = 82$$

$$\Rightarrow \frac{k}{5} + \frac{l}{6} + \frac{m}{7} = 15 \Rightarrow \frac{42k + 35l + 30m}{5 \times 6 \times 7} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{30(m+l+k) + 5l + 12k}{5 \times 6 \times 7} = 15$$

$$\Rightarrow 2910 + 5l + 12k = 3150 \Rightarrow 5l + 12k = 240$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{240 - 12k}{5} = \frac{12(20 - k)}{5}$$

با توجه به این که $(5, 12)$ نتیجه می شود که l باید مضرب ۱۲ و k مضرب ۵ باشد:

$$20 - k = 5t \Rightarrow k = -5t + 20 > 0, \quad l = 12t > 0$$

$$\Rightarrow -5t + 20 + 12t + m = 97 \Rightarrow m = 77 - 7t > 0$$

$$\Rightarrow t = 1, 2, 3$$

بنابراین، برای k و l و m سه دسته جواب به صورت زیر وجود دارد:

$$(k, l, m) = (15, 12, 70) \text{ یا } (10, 24, 63) \text{ یا } (5, 36, 56)$$

بخش B

۱. الف) معادلات زیر از فرض مسئله و فرض $k = 2$ و $e = 5$ به دست می آیند:

$$a + y = 13, a + b + c = 15, c + i = 13, b = 8, i = 10,$$

$$51 \quad c + d = 10, b + d = 15, g + h = 10, f + h = 15, a + f = 10$$

(مجموع عددهای دایره‌های واقع بر یک خط راست را نوشته ایم.)

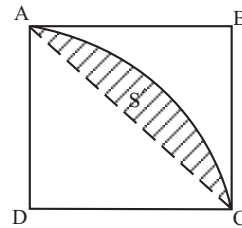
اکنون به سادگی به کمک نتایج بالا به دست می آید:

$$e = 5, b = 8, i = 10, d = 7, c = 3, d = 7, a = 4,$$

$$g = 9, h = 1, f = 14$$

ب) فرض می کنیم $k = 2$ و e نامشخص باشد. این معادلات

$$S' = S_1 - S_2 = \frac{36\pi}{4} - \frac{36}{2} = 9(\pi - 2)$$



اما مساحت محدوده‌ای که در شکل اصلی رسم شده است، دو برابر محدوده‌ی شکل بالاست. بنابراین:

$$S = 2S' = 18(\pi - 2)$$

۶. این نخستین مسئله‌ی جدی در این آزمون است! می دانیم که: $\lfloor x \rfloor = a \Leftrightarrow a \leq x < a+1$. بنابراین اگر

$\lfloor \frac{3}{x} \rfloor = k$ ، با توجه به فرض $\lfloor \frac{4}{x} \rfloor = 5 - k$ و با توجه به نابرابری فوق داریم:

$$k \leq \frac{3}{x} < k+1, 5-k \leq \frac{4}{x} < 6-k$$

از جمع کردن دو نابرابری بالا داریم:

$$5 \leq \frac{7}{x} < 7$$

و از حل دستگاه نامعادله‌های فوق (انجام دهید) داریم:

$$1 < x < 1/4 \Rightarrow x \in (1, 1/4)$$

۷. P, Q, R همگی روی محیط دایره‌ای هستند که شعاع

آن نصف شعاع دایره‌ی اصلی است. مرکز این دایره، نقطه‌ی برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث PQR است. بنابراین،

معادله‌ی عمود منصف‌های دو ضلع از اضلاع این مثلث (مثلاً

PQ و PR) را می نویسیم. نقطه‌ی برخورد آن‌ها، مرکز دایره‌ی

محیطی مثلث PQR است. فاصله‌ی مرکز تا یکی از این سه

نقطه، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است و شعاع دایره‌ی اصلی

دو برابر شعاع این دایره.

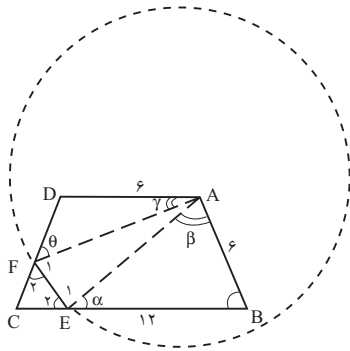
$$PQ \text{ شیب: } m = \frac{-8-1}{7-4} = -3 \quad M(\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}) \text{ وسط PQ}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{1}{3} \Rightarrow PQ \text{ عمود منصف}$$

$$PQ \text{ عمود منصف: } y + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(x - \frac{11}{3}) \Rightarrow x - 3y = 16$$

$$\Rightarrow m = \frac{1-1}{10-4} = 0 \Rightarrow PR \text{ شیب: } N(7, 1) \text{ وسط PR}$$

$\Rightarrow$ شیب عمود منصف PR تعریف نشده است



حال کافی است مساحت دایره‌ی به شعاع ۸ را از مساحت پنج ضلعی ADFEB کم کنیم تا مساحت محدوده‌ی مورد نظر به دست آید. برای محاسبه‌ی مساحت پنج ضلعی نیز می‌توان مساحت دوزنقه را از مساحت مثلث CEF کم کرد. برای این کار محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\Delta ABE: \frac{AE}{\sin B} = \frac{6}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{6 \times \sqrt{3}}{8} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{BE}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin \alpha}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{27}{64}} = \frac{\sqrt{37}}{8}$$

$$\sin \beta = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + 60^\circ)$$

$$= \sin \alpha \cos 60^\circ + \cos \alpha \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{111}}{16}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{\frac{6 \times \sqrt{111}}{16}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{6\sqrt{111}}{6\sqrt{3}} = \sqrt{37} \Rightarrow CE = 12 - \sqrt{37}$$

و در مثلث ADF داریم:

$$\frac{AD}{\sin \theta} = \frac{AF}{\sin 120^\circ} = \frac{DF}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{6}{\sin \theta} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \theta = \alpha$$

$$\Rightarrow F_\gamma = E_\gamma (\hat{F}_\gamma = 18^\circ - \hat{F}_1 - \hat{\theta},$$

$$\hat{E}_\gamma = 18^\circ - \hat{E}_1 - \hat{\alpha}, \quad \hat{E}_1 = \hat{F}_1)$$

$$\Rightarrow CE = CF = 12 - \sqrt{37}$$

حال می‌توان نوشت:

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF \cdot \sin \hat{C}$$

به دست می‌آیند:

$$a+g=13, \quad b+e=13, \quad c+i=13, \quad a+b+c=15, \\ e+i=15, \quad c+d+e=15, \quad b+d=15, \quad a+f+e=15, \\ f+h=15, \quad g+h+e=15$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$b=13-e, \quad b+d=15 \Rightarrow 13-e+d=15 \\ \Rightarrow d=2+e, \quad c+d+e=15 \Rightarrow c+2+e+e=15 \\ \Rightarrow c=13-2e, \quad a+b+c=15 \Rightarrow a+13-e+13-2e=15 \\ \Rightarrow a=2e-11, \quad g=13-a \Rightarrow g=24-3e$$

$$i=13-c \Rightarrow i=2e, \quad i=15-e \Rightarrow 2e=15-e \Rightarrow e=5$$

(ج) با فرض $k=x$ نیز خواهیم داشت:

$$a+g+x=x+i+c=a+b+c=x+e+b=e+d+c= \\ a+f+e=b+d=e+i=g+h+e=f+h=15$$

و از ترکیب این معادله‌ها داریم:

$$b+e+x=15 \Rightarrow b=15-x-e$$

$$b+d=15 \Rightarrow d=15-b \Rightarrow d=x+e$$

$$c+d+e=15 \Rightarrow c+x+e+e=15 \Rightarrow c=15-x-2e$$

$$a+b+c=15 \Rightarrow a+15-x-e+15-x-2e=15$$

$$\Rightarrow a=3e+2x-15$$

$$a+g+x=15 \Rightarrow 3e+2x-15+g+x=15$$

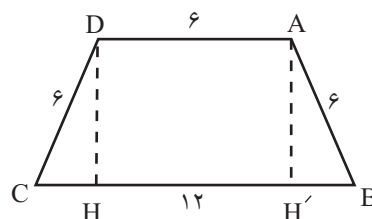
$$\Rightarrow g=30-3e-3x$$

$$x+i+c=15 \Rightarrow x+i+15-x-2e=15 \Rightarrow i=2e,$$

$$e+i=15 \Rightarrow 3e=15 \Rightarrow e=5$$

۲. الف) مطابق شکل، عمودهای DH و AH' را بر BC

رسم می‌کنیم. داریم:



$$CH = BH' = \frac{BC - AD}{2} = \frac{12 - 6}{2} = 3$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH'، ضلع BH' نصف وتر AB

است. بنابراین: $\angle CDH = \angle BAH' = 30^\circ$ و در نتیجه:

$$\angle A = \angle D = 120^\circ \quad \angle B = \angle C = 60^\circ$$

(ب) مطابق شکل ذیل، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $r=8$ را رسم می‌کنیم. این دایره BC را در E و CD را در F قطع می‌کند؛ به طوری که:

$$AE = AF = 8$$

۴. الف) چون a و b و c ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} a^2 \times \begin{cases} a^3 - 6a^2 + 5a - 1 = 0 \\ b^3 - 6b^2 + 5b - 1 = 0 \\ c^3 - 6c^2 + 5c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5 - 6a^4 + 5a^3 - a^2 = 0 \\ b^5 - 6b^4 + 5b^3 - b^2 = 0 \\ c^5 - 6c^4 + 5c^3 - c^2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

و از جمع معادله‌های بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 - 6(a^4 + b^4 + c^4) \\ + 5(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

یک بار هم سه معادله‌ی فوق را در a و b و c ضرب و با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a(a^3 - 6a^2 + 5a - 1) + b(b^3 - 6b^2 + 5b - 1) \\ + c(c^3 - 6c^2 + 5c - 1) = 0 \\ \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 6(a^3 + b^3 + c^3) \\ + 5(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) = 0 \\ \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 6(a^3 + b^3 + c^3) \\ - 5(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) \end{aligned}$$

و با جای‌گزین کردن این مقادیر در رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (a^5 + b^5 + c^5) - 36(a^3 + b^3 + c^3) \\ + 30(a^2 + b^2 + c^2) + 6(a + b + c) \\ + 5(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \\ \Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 = 31(a^3 + b^3 + c^3) \\ - 29(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a + b + c) \end{aligned} \quad (2)$$

بار دیگر خود سه معادله‌ی اصلی را هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (a^3 - 6a^2 + 5a - 1) + (b^3 - 6b^2 + 5b - 1) \\ + (c^3 - 6c^2 + 5c - 1) = 0 \\ \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 6(a^2 + b^2 + c^2) - 5(a + b + c) + 3 \\ \text{و این مقدار را در رابطه‌ی (۲) جای‌گزین می‌کنیم:} \\ a^5 + b^5 + c^5 = 186(a^2 + b^2 + c^2) - 155(a + b + c) \\ + 93 - 29(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a + b + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 = 157(a^2 + b^2 + c^2) - 161(a + b + c) + 93 \\ \text{اکنون با توجه به قضیه‌ی «وی‌ت» (برای آشنایی با آن} \\ \text{می‌توانید به کتاب آموزش المپیاد ریاضی، جلد ۱، از انتشارات} \\ \text{مدرس رجوع کنید) داریم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c = 6, \quad a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \\ = 36 - 2(5) = 26 \Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 = 157(26) - 161(6) + 93 \\ \Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 = 3209 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(12 - \sqrt{37})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(144 + 37 - 24\sqrt{37})$$

$$= \frac{181\sqrt{3} - 24\sqrt{111}}{4}$$

$$S_{ABCD} = \frac{12+6}{2} \times \sqrt{27} = 27\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABEFD} = 27\sqrt{3} - \frac{181\sqrt{3} - 24\sqrt{111}}{4} = \frac{24\sqrt{111} - 73\sqrt{3}}{4}$$

و مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S = 64\pi - \frac{24\sqrt{111} - 73\sqrt{3}}{4} = \frac{256\pi + 73\sqrt{3} - 24\sqrt{111}}{4}$$

۳. الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \angle XAB + \angle PAB = 18^\circ \\ \angle XAB + \angle XYB = 18^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \angle PAB = \angle XYB \\ \angle XPY = \angle APB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

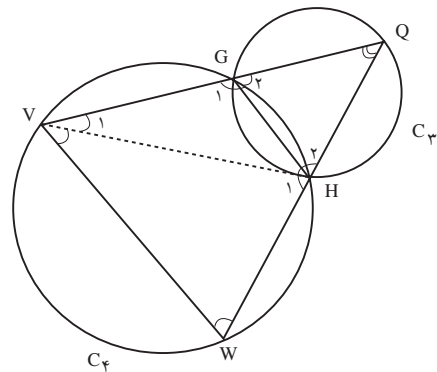
$$\Delta PAB \sim \Delta PXY \Rightarrow \frac{PA}{PY} = \frac{PB}{PX} = \frac{AB}{XY}$$

$$PX = PA + AX = 5 + 16 = 21 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{PY} = \frac{7}{21} = \frac{6}{XY} \Rightarrow PY = 15, \quad XY = 18$$

ب) به نظر می‌رسد که شکل مسئله تغییری نکرده و فقط

اسامی دایره‌ها و نقاط تغییر کرده‌اند و مجهول مسئله (VW) جانشین XY شده است.



با کمی توجه به شکل و بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای می‌توان

نتیجه‌ی مورد نظر را به دست آورد. زاویه‌ی $\hat{Q}$ در دایره‌ی C_2 ، محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است و زاویه‌ی $\hat{V}_1$ در دایره‌ی C_1 محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است. در مثلث QVH زاویه‌ی خارجی H_1 برابر است با: $\hat{Q} + \hat{V}_1$ و در نتیجه مقدار آن ثابت است. لذا طول وتر مقابل به آن (یعنی VW)، نیز ثابت است.