

استدلال ریاضی



(قسمت ۱)

● میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم

درک شهودی

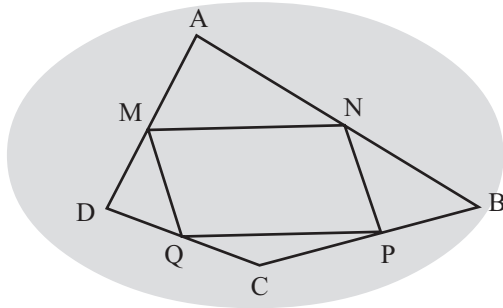
سه لیوان آب با دماهای متفاوت را در اختیارتان قرار می دهند و از شما می خواهند آن ها را به ترتیب صعودی دمایشان مرتب کنید. بی درنگ سه انگشت متفاوت خود را به ترتیب در هر لیوان فرو می برید، درجه حرارت هر کدام را حدس می زنید و سپس آن ها را مرتب می کنید.

برای انجام این آزمایش، در حقیقت از حس لامسه ی خود کمک گرفته اید. این گونه ادراک از محیط پیرامون خود را که به کمک یکی از حواس پنج گانه به دست می آید، درک شهودی می نامیم. اگر در این آزمایش از شما می خواستند دمای آب هر لیوان را به طور دقیق بگویید، به ابزار قوی تری مانند دماسنج نیاز داشتید.

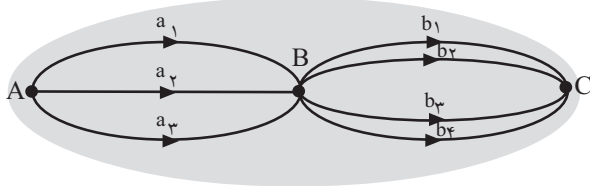
درک شهودی، نوعی استدلال دقیق ریاضی به حساب نمی آید، بلکه به ما کمک می کند تا مسائل ریاضی یا روزمره ی

زندگی را بهتر بفهمیم و برای رسیدن به نتیجه، حدس هایی بزنیم. برای اثبات این حدس ها به ابزار قوی تری نیاز داریم و آن، انواع استدلال های ریاضی است.

انسان به طور فطری، همواره برای درک اتفاق های پیرامون خود از شهودش کمک می گرفته، اما نکته ی مهم این است که شهود افراد گوناگون در زمان های متفاوت یکسان نبوده است. برای مثال در یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، شهودشان با بقیه ی مردم متفاوت بود و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن ها با شهود خود، تنها به دلیل این که می دیدند «وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دور دست به ساحل نزدیک می شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه ی آن بر ساحل نشینان آشکار می شود»، به این باور رسیده بودند. پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح



مثال: برای حل این مسأله که: «از شهر A به شهر B، ۳ راه و از شهر B به شهر C، ۴ راه متفاوت وجود دارد. هرگاه شخصی قصد سفر از شهر A و از طریق شهر B به شهر C را داشته باشد، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟» ابتدا شکل زیر را رسم می کنیم، سپس با استفاده از اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، جواب مسئله را به دست می آوریم.



با استفاده از اصل ضرب می توان نوشت: $3 \times 4 = 12$. پس ۱۲ راه متفاوت وجود دارد که آن ها را به این صورت مشخص می کنیم:

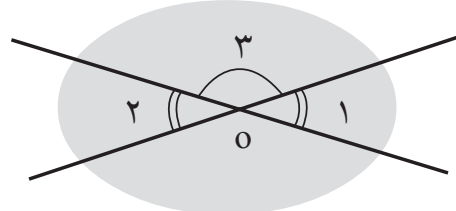
a_1, b_1 a_2, b_1 a_3, b_1
 a_1, b_2 a_2, b_2 a_3, b_2
 a_1, b_3 a_2, b_3 a_3, b_3
 a_1, b_4 a_2, b_4 a_3, b_4

مثال: دو عدد صحیح مثبت را چنان بیابید که حاصل جمع آن ها ۱۲ و حاصل ضربشان بیش ترین مقدار ممکن باشد. حل: ابتدا با استفاده از شهود، سعی می کنیم جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن ها برابر با ۱۲ باشد. سپس حاصل ضرب هر کدام را پیدا می کنیم. از بین این حاصل ضرب ها، هر کدام که از بقیه بیش تر باشد، دو عدد مربوط به آن، جواب مسئله هستند.

$1+11=12$; $1 \times 11=11$ $4+8=12$; $4 \times 8=32$
 $2+10=12$; $2 \times 10=20$ $5+7=12$; $5 \times 7=35$
 $3+9=12$; $3 \times 9=27$ $6+6=12$; $6 \times 6=36$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب های بالا ملاحظه می کنیم، هر چه اختلاف دو عدد کم تر می شود، حاصل ضربشان بیش تر می شود، تا آن جا که وقتی هر دو عدد برابر با

تحصیلات و حتی نوع کار آن ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت های چشم گیری دارد. مثال: برای اثبات این حکم که «دو زاویه ی متقابل به رأس با یکدیگر برابرند»، ابتدا شکلی به صورت زیر رسم می کنیم و بعد از فهم درست حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می آوریم.



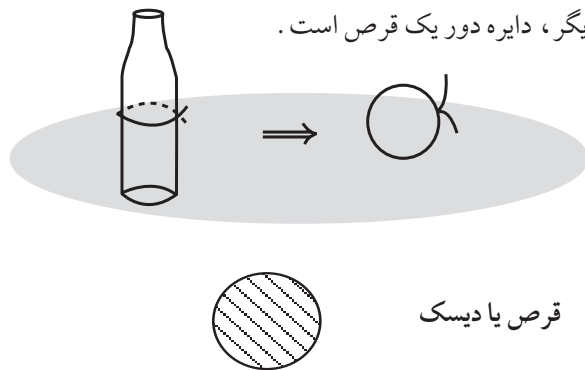
هر زاویه ی نیم صفحه برابر با 180° است، پس داریم:

$$\begin{cases} \angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ \\ \angle O_2 + \angle O_3 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O_1 + \angle O_2 = \angle O_2 + \angle O_3 \Rightarrow \angle O_1 = \angle O_3$$

توجه: واقعاً بدون استفاده از شکل و درک شهودی، اثبات این حکم جذاب و قابل فهم نیست.

مثال: برای این که درک درستی از تعریف دایره پیدا کنیم، بهتر است قطعه ای سیم مفتولی را برداریم و آن را دور یک بطری قرار دهیم و دو سر سیم را به هم ببندیم. سپس بطری را از داخل سیم بیرون می آوریم و شکل به دست آمده را یک دایره می نامیم.

با انجام این کار، دانش آموزان تفاوت بین دایره و قرص (دیسک) را متوجه می شوند. درحقیقت یک قرص، از یک دایره به همراه نقاط داخلش تشکیل شده است. به عبارت دیگر، دایره دور یک قرص است.



توجه: به خط بسته ای که دور قرص قرار دارد، دایره گفته می شود.

مثال: برای اثبات این حکم که: «اگر وسط های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، آن گاه یک متوازی الاضلاع تشکیل می شود»، ابتدا شکلی به این صورت رسم می کنیم و بعد از درک درستی حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می آوریم.

۶ باشند، حاصل ضربشان بیشترین مقدار را دارد. بنابراین، به روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، برابرند با: $x = y = \frac{a}{2}$ »

می‌توان حدس بالا را به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = a \Rightarrow y = a - x \\ P = xy \end{cases} &\Rightarrow P = x(a - x) \\ \Rightarrow P = x(a - x) = -x^2 + ax = -(x^2 - ax) \\ &= -(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$P = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \quad (1)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱ درمی‌یابیم، بیشترین مقدار P وقتی به دست می‌آید که: $(x - \frac{a}{2})^2 = 0$. بنابراین داریم:

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad (2)$$

از طرفی $x + y = a$ ؛ پس با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه

می‌کنیم که $y = \frac{a}{2}$. در نتیجه، وقتی P بیشترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x = y = \frac{a}{2}$$

استدلال تمثیلی

برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها یا نتیجه‌گیری‌ها در زندگی روزمره، از یک ضرب‌المثل یا یک بیت شعر استفاده می‌کنیم که مشابهتی با رویداد پیش آمده دارد. برای مثال: اگر بخواهیم کسی را به صبر و حوصله تشویق کنیم، می‌گوییم: گر صبر کنی ز غوره حلوا سازی! اگر دیگران شرایط فردی را درک نکرده و نتیجه‌گیری نادرستی از عملکرد او داشته باشند، می‌توان به آن‌ها گفت:

هر کسی از ظن خود شد یار من

از درون من نجست اسرار من

وقتی مبحث آمار را مطالعه می‌کنیم، برای تفهیم این موضوع که یک نمونه تصادفی همه‌ی خاصیت‌های جامعه‌ی آماری را دارد، از ضرب‌المثل «مشت نمونه‌ی خروار است»، پس نمونه بیانگر جامعه است، استفاده می‌کنیم.

استدلال تمثیلی یا مقایسه‌ای، در حقیقت یافتن نوعی مشابهت بین دو یا چند مفهوم است. به عبارت دیگر، اساس استدلال تمثیلی، نوعی شباهت است.

تذکر: استدلال تمثیلی، نوعی استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا محدودیت‌هایی دارد. این نوع استدلال فقط در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به ما کمک می‌کند.

مثال: وقتی از دانش‌آموز می‌خواهیم به جای $\square$ در برابری

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{\square}$$

این است که چون صورت کسر سه برابر شده است، پس مخرج هم مشابه صورت باید سه برابر شود تا این که تناسب برقرار باشد. در نتیجه، به جای $\square$ عدد $6 = 3 \times 2$ را قرار می‌دهد.

مثال: برای هر عدد طبیعی n و عدد حقیقی $a \neq 0$ ، داریم:

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. مشابه با این فرمول، وقتی n عدد طبیعی نباشد، از این فرمول هم استفاده می‌شود. برای مثال، با فرض $a \neq 0$ داریم:

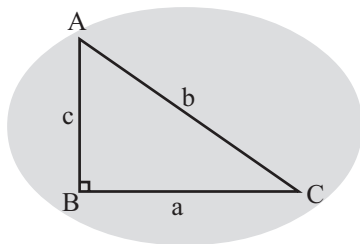
$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n}}$$

توجه: برای محاسبه‌ی حاصل عبارت‌های جبری به کمک اتحاد، از استدلال تمثیلی استفاده می‌کنیم!

مثال: همه‌ی دانش‌آموزان با مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌ی فیثاغورس در آن از دوره‌ی راهنمایی آشنا هستند. رابطه‌ی فیثاغورس چنین است:

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

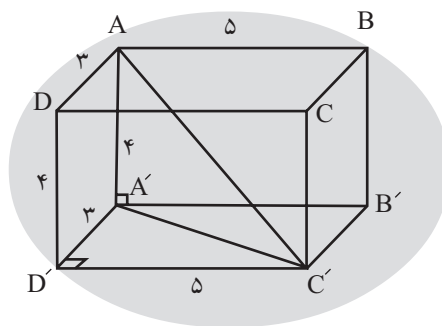


با استفاده از این رابطه و به کمک استدلال تمثیلی، می‌توان قطر مکعب مستطیل را محاسبه کرد. فرض کنید مکعب

مستطیلی به ابعاد ۳، ۴ و ۵ داریم و می‌خواهیم قطر آن را محاسبه کنیم:

چون مثلث $A'D'C'$ در رأس D' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن، به کمک استدلال تمثیلی، چنین نوشت:

$$A'C'^2 = A'D'^2 + D'C'^2 \Rightarrow A'C'^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ \Rightarrow A'C' = \sqrt{25} = 5$$



هم‌چنین مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن به کمک استدلال تمثیلی چنین نوشت:

$$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 \Rightarrow AC'^2 = 4^2 + (5)^2 = 41 \\ \Rightarrow AC' = \sqrt{41}$$

استدلال استقرایی

برخی از ریاضی‌دانان بزرگ، وقتی به درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می‌بردند، آن را به صورت یک حکم کلی بیان می‌کردند. از این رو، تا میانه‌های قرن هفدهم میلادی، با استفاده از استدلال استقرایی، حکم‌های بسیاری در ریاضیات، به‌ویژه در شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد روی هم انباشته شده بودند که یک نمونه را ذکر می‌کنیم:

مارن مرسن (۱۶۴۸-۱۵۸۸م)، ریاضی‌دان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود، عدد $M_n = 2^n - 1$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n ، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می‌آیند:

$$n = 2 \Rightarrow M_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow M_3 = 2^3 - 1 = 7$$

$$n = 5 \Rightarrow M_5 = 2^5 - 1 = 31$$

$$n = 7 \Rightarrow M_7 = 2^7 - 1 = 127$$

$$n = 13 \Rightarrow M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$$

:

$$n = 257 \Rightarrow M_{257} = 2^{257} - 1$$

مرسن چند اشتباه صادفانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد، $M_{67} = 2^{67} - 1$ و $M_{257} = 2^{257} - 1$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{61} = 2^{61} - 1$ و $M_{89} = 2^{89} - 1$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضی‌دانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند، زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجه‌ی کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی، به‌طور معمول، با مقایسه‌ی مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌هایی محدود آغاز می‌شود. سپس نتیجه‌ی این آزمایش‌ها را به‌همه‌ی پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا مجموعه‌ی مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همه‌ی پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت زیر را با روش استدلال استقرایی حدس بزنید:

$$A = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$$

ابتدا مجموع جملات را محاسبه می‌کنیم:

$$n = 1: 2 = 2 \times 1 = 2 \times (1^2)$$

$$n = 2: 2 + 6 = 8 = 2 \times 4 = 2 \times (2^2)$$

$$n = 3: 2 + 6 + 10 = 18 = 2 \times 9 = 2 \times (3^2)$$

$$n = 4: 2 + 6 + 10 + (4 \times 4 - 2) = 32 = 2 \times 16 = 2 \times (4^2)$$

در حالتی که $n = 5$ ، می‌توان حدس زد که مجموع پنج جمله‌ی عبارت A برابر با $2 \times (5^2)$ یا ۵۰ است، زیرا:

$$n = 5: 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 = 2 \times 25 = 2 \times (5^2)$$

بنابراین، هرگاه مجموع n جمله‌ی عبارت A را محاسبه کنیم، حاصل آن $2 \times (n^2)$ است؛ یعنی داریم:

$$A = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2 \times (n^2) \quad (1)$$

برای آن که درستی حدس خود را ثابت کنیم، باید ابتدا اصل

استقرای ریاضی را مطالعه کنیم. سپس با استفاده از آن، درستی رابطه‌ی ۱ را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$74 \times 3 = 222$$

$$74 \times 6 = 444$$

الف) بدون محاسبه، حاصل سطر زیر را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$$74 \times 12 =$$

ب) آیا حدس شما درست بود؟

ج) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

د) حاصل سطر زیر را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$$74 \times 24 =$$

هـ) آیا حدس شما درست بود؟

و) از قسمت‌های بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

الف) چون 222 دو برابر 444 است، پس حاصل 74×12 ، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های 444 ، یعنی 888 است.

ب) بله، زیرا:

$$74 \times 12 = 74 \times (6 \times 2) = (74 \times 6) \times 2 = 444 \times 2 = 888$$

ج) استدلال استقرایی، زیرا براساس مجموعه‌ای از مشاهدات جزئی به نتیجه‌ای کلی رسیدیم.

د) مانند پاسخ مرحله‌ی الف، حاصل 74×24 ، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های 888 یعنی 161616 است.

هـ) خیر، زیرا:

$$74 \times 24 = 74 \times (12 \times 2) = (74 \times 12) \times 2 = 888 \times 2 = 1776$$

و) استدلال استقرایی براساس مجموعه‌ای محدود از مشاهدات است؛ بنابراین استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حدس ما برای مرحله‌ی «د» درست نیست.

فعالیت ۲: به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید:

$$203 \times 122 = 24766$$

$$221 \times 302 = 66742$$

الف) حاصل 312×121 را به دست آورید.

ب) حاصل 213×121 را حدس بزنید.

ج) حاصل 213×121 را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

د) حاصل 214×132 را به دست آورید.

هـ) حاصل 412×231 را حدس بزنید.

و) حاصل 412×231 را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟ توضیح دهید.

فعالیت ۳: در الگوی زیر، حاصل سطر چهارم را حدس بزنید. برای حدس خود از چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟

$$\sqrt{121} = 11$$

$$\sqrt{12321} = 111$$

$$\sqrt{1234321} = 1111$$

$$\sqrt{123454321} = ?$$

فعالیت ۴: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$37 \times 18 = 666$$

$$37 \times 21 = 777$$

$$37 \times 24 = 888$$

$$37 \times 27 = ?$$

$$37 \times 30 = ?$$

الف) مقدار سطر چهارم را بدون محاسبه حدس بزنید.

ب) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

پ) حاصل سطر چهارم را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

ت) حاصل سطر پنجم را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را به دست آورید.

آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟

فعالیت ۵: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$61 \times 2 = 122$$

$$61 \times 4 = 244$$

$$61 \times 8 = ?$$

$$61 \times 16 = ?$$

الف) بدون محاسبه، سطر سوم الگو را حدس بزنید.

ب) مقدار سطر سوم را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ) از کدام استدلال برای حدس مقدار سطر سوم استفاده کرده‌اید؟

ت) حاصل سطر چهارم را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

ادامه دارد...