برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۳

● محمدهاشم رستمی

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم را در شماره‌ی قبل دیدیم. اینک ادامه‌ی مطلب را در پی می‌آوریم.

برای بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری که به صورت $x^۳ + px + q = ۰$ است، باید به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر داده شده در معادله، $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ را تعیین علامت کنیم و برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های این معادله باید $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ و q را تعیین علامت کنیم. به مثال‌های ذیل توجه کنید:

مثال۱. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $x^۳ - ۴x + \sqrt{۳}(m - ۲) = ۰$، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: باید $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ را برحسب m محاسبه و تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p = -۴ \ , \ q = ۳(m - ۲) \ ,$$

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۴)^۳ + ۲۷ \times ۳(m - ۲)^۲$$

$$\Rightarrow \Delta = -۲۵۶ + ۸۱(m - ۱)^۲ = ۸۱(m - ۱)^۲ - ۲۵۶ \ , \ \Delta = ۰$$

$$\Rightarrow ۸۱(m - ۱)^۲ - ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow (m - ۱)^۲ = \frac{۲۵۶}{۸۱} \Rightarrow m - ۱ = \pm\frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow m = ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹} \ , \ m = ۱ - \frac{۱۶}{۹} = -\frac{۷}{۹}$$

m	$-\infty$		$-\frac{۷}{۹}$		$\frac{۲۵}{۹}$		$+\infty$
Δ		+	۰	−	۰	+	
R		یک ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	سه ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	یک ریشه دارد	

مثال۲. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری، $x^۳ - ۴x + \sqrt{۳}(m - ۲) = ۰$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m فاصله بحث کنید.

حل: باید $\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۴)^۳ + ۲۷ \times ۳(m - ۲)^۲$$

$$= ۸۱(m - ۲)^۲ - ۲۵۶$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۸۱(m - ۲)^۲ - ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲۵}{۹} \ , \ m = -\frac{۷}{۹}$$

$$q = \sqrt{۳}(m - ۲) \ , \ q = ۰ \Rightarrow \sqrt{۳}(m - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

m	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		2		$\frac{25}{9}$		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		−		−	0	+		+	
R		یک ریشه‌ی مثبت دارد		یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی دارد		یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد		یک ریشه‌ی منفی دارد	
			ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی دارد		یک ریشه‌ی صفر و دو ریشه‌ی قرینه دارد		ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد		

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری زیر به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$x^3 - 3x + 2 - m = 0$$

حل: $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را بر حسب m محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(2-m)^2 = 27(m^2 - 4m)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0\ ,\ \ m = 4$$

$$q = 2 - m\ ,\ \ q = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		+		+	0	−		−	
R		$X_1 < 0$		$X_1<0<X_2<X_3$		$X_1<X_2<0<X_3$		$X_1 > 0$	
			$X_1<0<X_2=X_3$		$X_1<X_2=0<X_3$		$X_1=X_2<0<X_3$		

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $(2m-1)x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: این معادله را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$ ، به معادله‌ی $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(2m-1)(\frac{1}{X})^3 - 3(\frac{1}{X})^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2m-1-3X+X^3}{X^3} = 0 \Rightarrow X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$$

$$p = -3\ ,\ \ q = 2m-1\ ,\ \ \Delta = 4p^3 + 27q^2$$

$$= 4(-3)^3 + 27(2m-1)^2$$

$$\Delta = 27(2m-1)^2 - 108 = 27\left[(2m-1)^2 - 4\right]\ ,\ \ \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 27\left[(2m-1)^2 - 4\right] = 0 \Rightarrow (2m-1-2)(2m-1+2) = 0$$

$$(2m-3)(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m-3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}\ , 2m+1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$q = 2m-1\ ,\ \ q = 0 \Rightarrow 2m-1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	0	+	
q		−		−	0	+		+	
X		$X_1 > 0$		$X_1<X_2<0<X_3$		$X_1<0<X_2<X_3$		$X_1 < 0$	
			$X_1<0<X_2=X$		$X_1<X_2=0<X$		$X_1=X_2<0<X$		

با توجه به این که $x = \frac{1}{X}$ ، علامت ریشه‌های معادله‌ی داده شده با علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$ ، یکی است و برای تعیین وضع آن‌ها نسبت به هم می‌توانیم در جدول بالا، $X_1 = \frac{1}{x_1}$ ، $X_2 = \frac{1}{x_2}$ و $X_3 = \frac{1}{x_3}$ را قرار دهیم.