

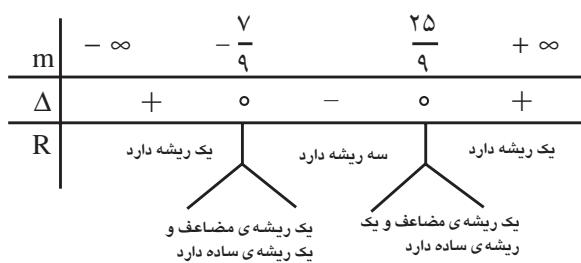
بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ای درجه ای سوم

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله ای درجه ای سوم را در شماره ای قبل دیدیم. اینک ادامه ای مطلب را در پی می آوریم.

قسمت ۳

● محمد هاشم رستمی



مثال ۲. در وجود و علامت ریشه های معادله ای درجه ای سوم پارامتری، $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m فاصله بحث کنید.
حل: باید $4p^3 + 27q^3 = \Delta = 4p^3 + 27q^3 = 4(m-2)^3 - 4\sqrt{3}(m-2)$

داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4p^3 + 27q^3 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^3 \\ &= 81(m-2)^3 - 256 \end{aligned}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 81(m-2)^3 - 256 = 0 \Rightarrow m = \frac{25}{9}, \quad m = -\frac{7}{9}$$

$$q = \sqrt{3}(m-2), \quad q = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(m-2) = 0$$

$$\Rightarrow m-2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

برای بحث در وجود ریشه های معادله ای درجه ای سوم پارامتری که به صورت $x^3 + px + q = 0$ است، باید به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر داده شده در معادله، $\Delta = 4p^3 + 27q^3 = 4(m-2)^3 - 4\sqrt{3}(m-2)$ را تعیین علامت کنیم و برای بحث در وجود و علامت ریشه های این معادله باید $\Delta = 4p^3 + 27q^3 = 4(m-2)^3 - 4\sqrt{3}(m-2)$ را تعیین علامت کنیم. به مثال های ذیل توجه کنید:
مثال ۱. در وجود ریشه های معادله ای درجه ای سوم پارامتری $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ ، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: باید $\Delta = 4p^3 + 27q^3 = 4(m-2)^3 - 4\sqrt{3}(m-2)$ را بحسب m محاسبه و تعیین علامت کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} p &= -4, \quad q = \sqrt{3}(m-2), \\ \Delta &= 4p^3 + 27q^3 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^3 \\ \Rightarrow \Delta &= -256 + 81(m-1)^3 = 81(m-1)^3 - 256, \quad \Delta = 0 \\ \Rightarrow 81(m-1)^3 - 256 &= 0 \Rightarrow (m-1)^3 = \frac{256}{81} \Rightarrow m-1 = \pm \frac{16}{9} \\ \Rightarrow m &= 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}, \quad m = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9} \end{aligned}$$

معادله‌ی $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(\gamma m - 1) \left(\frac{1}{X} \right)^r - \gamma \left(\frac{1}{X} \right)^r + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\gamma m - 1}{X^r} - \frac{\gamma}{X^r} + 1 = 0$$

$$\frac{4m - 1 - 3X + X^r}{X^r} = 0 \Rightarrow X^r - 3X + 4m - 1 = 0.$$

$$p = -r, \quad q = rm - 1, \quad \Delta = r^p + rq^r$$

$$= r(-r)^r + rq(rm - 1)^r$$

$$\Delta = 2V(2m-1)^r - 1 \circ A = 2V[(2m-1)^r - 4], \quad \Delta = 0.$$

$$\Rightarrow \forall v[(\forall m - 1)^v - \forall] = \circ \Rightarrow (\forall m - 1 - \forall)(\forall m - 1 + \forall) = \circ$$

$$(\gamma m - \gamma)(\gamma m + 1) = 0 \Rightarrow \gamma m - \gamma = 0 \Rightarrow m = \frac{\gamma}{\gamma}, \gamma m + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$q = \gamma m - 1, \quad q = 0 \Rightarrow \gamma m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{\gamma}$$

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری زیر به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$x^2 - 2x + 2 - m = 0$$

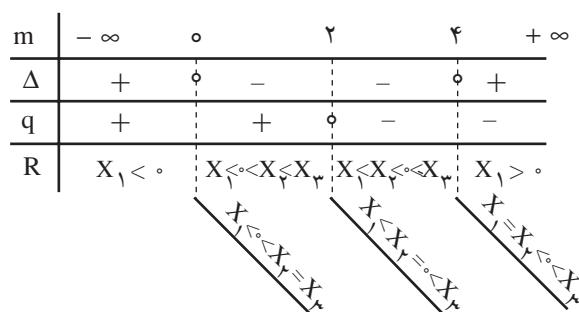
$$\text{حل: } \Delta = 4p^3 + 27q^2 \text{ و } q \text{ را بحسب } m \text{ محاسبه و تعیین}$$

علامت می کنیم . داریم :

$$\Delta = 4p^r + 2\sqrt{q}^r = 4(-m)^r + 2\sqrt{(2-m)}^r = 2\sqrt{(m^r - 4m)}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \quad m = 4$$

$$q = \gamma - m \quad , \quad q = 0 \Rightarrow \gamma - m = 0 \Rightarrow m = \gamma$$



با توجه به این که $\frac{1}{X} = x$ ، علامت ریشه‌های معادله‌ی داده

شده با علامت ریشه های معادله $X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$ ،
یکی است و برای تعیین وضع آن ها نسبت به هم می توانیم در
جدول بالا، $X_3 = \frac{1}{x_2}$ و $X_1 = \frac{1}{x_3}$ را قرار

دھیم

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $x^3 - 3x^2 + 1 = 2m$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: این معادله را با تغییر متغیر $\frac{1}{X} = x$ ، به