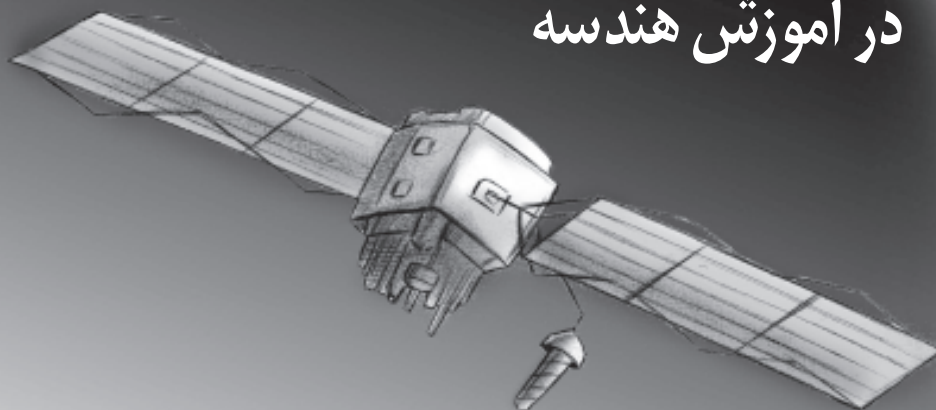


رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه

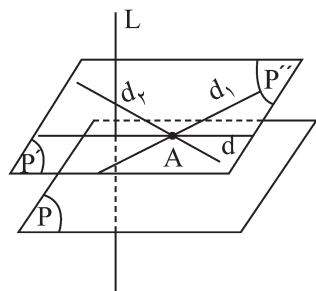


اشاره

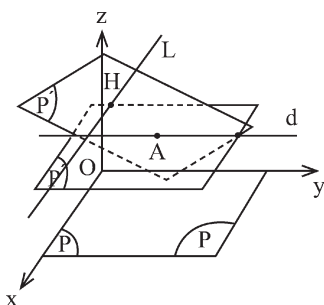
یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است. از استانداردهای موضوعی NCTM در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله های هندسه مانند «تحدید یا کوچک کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض می کنیم، چگونگی به کارگیری مکان های هندسی، انواع روش های حل یک مسئله، ...» را مطرح می کنیم. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب های هندسه ی ۱ و هندسه ی ۲ انتخاب شده اند تا دانش آموزان بتوانند مسئله های دیگر این کتاب ها را به راحتی با این دو رویکرد حل کنند.

بحث: جواب مسئله فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' است که از نقطه‌ی A می‌گذرد. پس وضعیت این دو صفحه، معین‌کننده‌ی وجود جواب و تعداد جواب است. چون صفحه‌های P' و P'' هر دو از نقطه‌ی A می‌گذرند، یعنی حداقل یک نقطه‌ی مشترک دارند، پس دو حالت منطبق یا متقاطع می‌توانند داشته باشند. در حالت انطباق، تعداد جواب‌های مسئله بی‌شمار است، یعنی بی‌شمار خط وجود دارد که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و بر خط L عمود است (شکل الف) و در حالت متقاطع، مسئله جواب یکتایی دارد که همان خط d است (شکل ب).



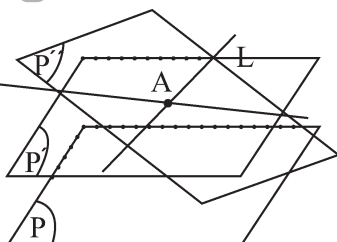
(الف)



(ب)

P' و P'' وقتی بر هم منطبق‌اند که L و P بر هم عمود باشند. در غیر این صورت، P' و P'' متقاطع خواهند بود.

نکته: بحث در وجود جواب تعداد جواب‌های مسئله را می‌توان به روش دیگری نیز انجام داد. بدین ترتیب که حالت‌های متفاوتی را که نقطه‌ی A ، خط L و صفحه‌ی P نسبت به هم می‌توانند داشته باشند، در نظر بگیریم. این حالت‌ها عبارت‌اند از:



۱. نقطه‌ی A روی خط L باشد و خط L ، غیر موازی با P و غیر عمود با P باشد.

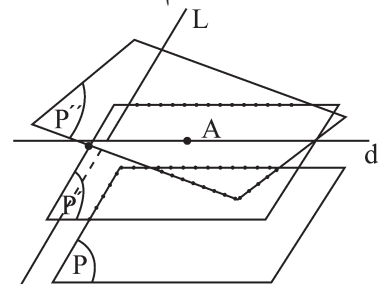
در این حالت دو صفحه‌ی P' و P'' متمایزاند و در یک خط که همان خط d (جواب مسأله) است، متقاطع هستند.

مسئله ۱۱. برای یک خط دل‌خواه L و صفحه‌ی دل‌خواه P و نقطه‌ی دل‌خواه A ، آیا خطی وجود دارد که از A بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنابر وضعیت‌های متفاوت بین A ، P و L ، چند جواب وجود دارد؟ مسئله را در حالتی کلی حل می‌کنیم که نقطه‌ی A روی خط L و صفحه‌ی P نباشد و خط L هم غیر موازی با صفحه‌ی P و غیر عمود بر این صفحه باشد.

الف) حل با روش هندسی

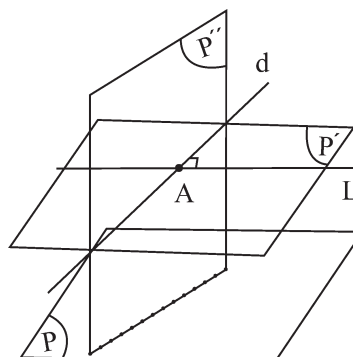
برای حل این مسئله از راهبرد «مسئله را حل شده فرض می‌کنیم»، استفاده می‌کنیم؛ راهبردی بسیار مهم و کارآمد برای حل مسئله‌ها، به‌ویژه مسئله‌های هندسه. در این راهبرد، با حل شده در نظر گرفتن مسئله، ویژگی‌هایی از آن را استخراج و از آن‌ها برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. اینک به این راه حل توجه کنید:

فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خط d جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است. چون خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و با صفحه‌ی P موازی است، پس در صفحه‌ای مانند P' قرار دارد که از نقطه‌ی A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه به موازات یک صفحه رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه به موازات آن صفحه رسم می‌شود.

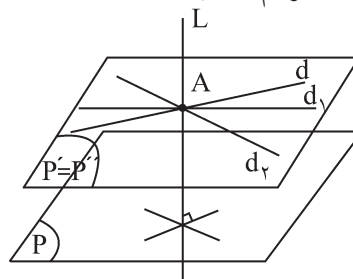


از طرفی خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر خط L عمود است، پس در صفحه‌ای مانند P'' قرار دارد که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه عمود بر آن خط رسم می‌شود. بنابراین، برای حل مسئله، از نقطه‌ی A صفحه‌ی P' را موازی صفحه‌ی P و سپس از همین نقطه‌ی A صفحه‌ی P'' را عمود بر خط L رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو صفحه d ، جواب مسئله است که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد.

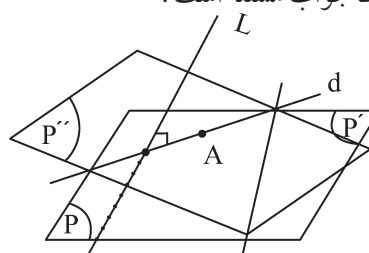
۲. نقطه‌ی A روی خط L و خط L موازی با صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع اند.



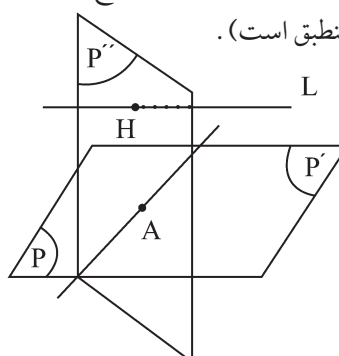
۳. نقطه‌ی A روی خط L و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق اند.



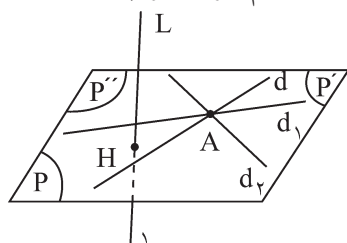
۴. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L غیر عمود بر P و موازی با P باشد. در این حالت، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است و دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع اند. پس تنها یک خط جواب مسئله است.



۵. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L موازی صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع اند (صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است).

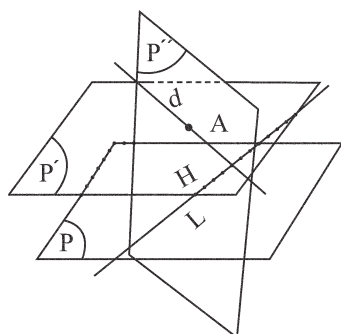


۶. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، دو صفحه‌ی P' و P'' بر صفحه‌ی P منطبق اند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. یعنی هر خطی که از A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است.

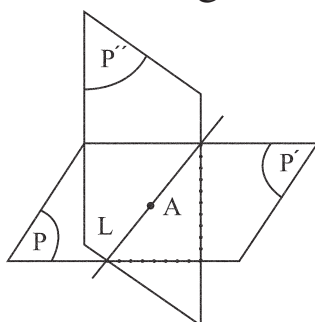


۷. نقطه‌ی A و خط L هر دو روی صفحه‌ی P قرار داشته باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایزند. این حالت شبیه حالت ۵ است.

۸. نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P و خط L روی صفحه‌ی P واقع باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع اند.



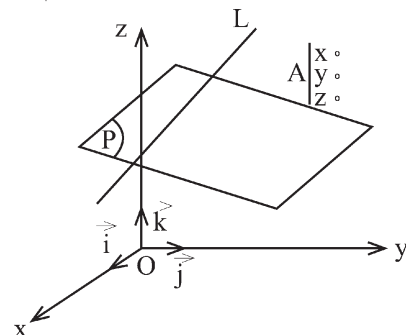
۹. نقطه‌ی A روی خط L و هر دو روی صفحه‌ی P باشند. در این حالت نیز مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع اند (صفحه‌ی P' روی صفحه‌ی P قرار دارد).



نکته: اگر حالت دیگری نیز وجود دارد، آن را مشخص کنید و برای مجله‌ی برهان متوسطه بفرستید. در کدام حالت ممکن است خط d که تنها جواب مسئله است، بر خط L که در فرض مسئله داده شده است، منطبق باشد؟ اگر چنین حالتی وجود دارد، با ذکر دلیل، آن را بنویسید.

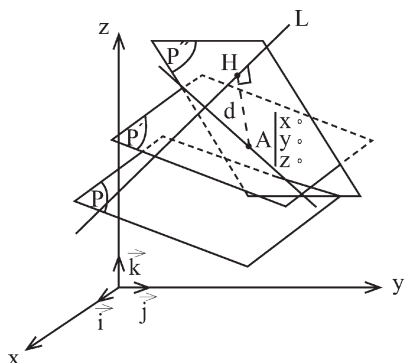
ب) حل با روش جبری - مختصات

دستگاه مختصات دکارتی قائم O-xyz با بردارهای یک‌ه ی $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در این دستگاه، نقطه‌ی A به مختصات $A = (x_0, y_0, z_0)$ ، خط L به معادله‌ی $L: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax + by + cz + d = 0$ باشد. می‌خواهیم از نقطه‌ی A خطی رسم کنیم که با صفحه‌ی P موازی و بر خط L هم عمود باشد.



می‌دانیم مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه، موازی آن صفحه رسم می‌شود. این صفحه را P' می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌های موازی صفحه‌ی P به صورت کلی $ax + by + cz + d' = 0$ است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A می‌گذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی بالا صدق کند. یعنی داشته باشیم:

$$A = (x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{(1)} ax_0 + by_0 + cz_0 + d' = 0 \\ \Rightarrow d' = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$



بنابراین، معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت $P': ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$ است. (۲)
از طرفی، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن

خط عمود می‌شود. این صفحه را P'' می‌نامیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌هایی که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ عمود می‌شوند، به صورت $px + qy + rz + d'' = 0$ است، زیرا بردار نرمال این صفحه‌ها، همان بردار هادی خط L یعنی $\vec{V}_{P''} = \vec{V}_L = (p, q, r)$ است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ای از این مجموعه صفحه که از نقطه‌ی A $A = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد، باید مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی (۳) صدق کند. داریم:

$$A = (x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{(3)} px_0 + qy_0 + rz_0 + d'' = 0 \\ \Rightarrow d'' = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

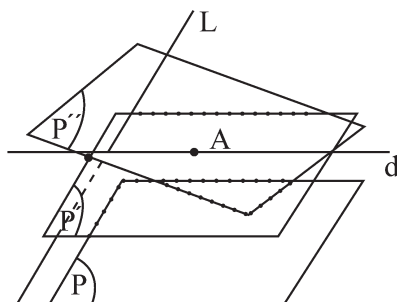
$$\Rightarrow P'': px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0 \quad (4)$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که آن را خط d می‌نامیم و از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، جواب مسئله است که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$d: \begin{cases} ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \\ px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0 \end{cases}$$

نکته: در صورت لزوم می‌توان معادله‌ی خط d را به صورت کانونیک درآورد.

نکته‌ی بسیار مهم: در قسمت‌های قبل رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی گفتیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات، در ساده‌تر شدن یا مشکل‌تر شدن حل مسئله نقش بسزایی دارد و این مطلب را با ذکر نمونه‌هایی نشان دادیم. در مورد این مسئله نیز روش حل بیان شده‌ی جبری - مختصاتی را در حالت کلی در نظر گرفتیم. حال اگر دستگاه مختصات دکارتی را چنان در نظر بگیریم که صفحه‌ی P به عنوان صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات باشد (شکل). با فرض



در صورتی که بخواهیم معادله ی کانونیک خط d را به دست آوریم، باید معادله ی دو صفحه ی مصور این خط روی دو صفحه ی مختصات را به دست آوریم.

(صفحه های مصور یک خط، سه صفحه هستند که بر آن خط می گذرند و بر صفحه های مختصات عمودند). خواهیم داشت:

$$P': \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad -2P' + P'' = 0 \Rightarrow x + 3y - 7 = 0 \quad (1)$$

$$-P' + 2P'' = 0 \Rightarrow 5x + 3z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow x = -3y + 7 \quad (3), (2) \Rightarrow x = \frac{-3z + 2}{5} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow x = -\frac{3y - 7}{1} = \frac{-3z + 2}{5} \Rightarrow \frac{y - \frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y - \frac{7}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-5}$$

معادله ی کانونیک خط d ، فصل مشترک دو صفحه ی P' و P'' که جواب مسئله است.

مثال ۲. نقطه ی $A = (0, -2, 1)$ و خط $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ صفحه ی $P: z = 0$ داده شده اند. معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی A می گذرد، با صفحه ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: به طوری که دیده می شود، در این مسئله، صفحه ی P بر صفحه ی xoy از دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ در فضا منطبق است: بنابراین، محاسبه ها و به طور کلی راه حل مسئله ساده تر خواهد بود. برای حل این مسئله، معادله ی صفحه ی P' را که از A به موازات صفحه ی P رسم می شود، هم چنین معادله ی صفحه ی P'' را که از نقطه ی A عمود بر خط L رسم می شود، می نویسیم و فصل مشترک آن ها را به دست می آوریم. داریم:

$$A = (0, -2, 1) \in P' \Rightarrow P': z = z_0 \Rightarrow z = 1$$

$$\vec{V}_L(2, 3, 4) = \vec{V}_{P''} \Rightarrow P'': 2(x - 0) + 3(y + 2) + 4(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow P'': 2x + 3y + 4z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} z = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -3(y + 2) \Rightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y + 2}{2}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} \frac{x}{-3} = \frac{y + 2}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

معادله ی کانونیک خط d ، که جواب مسئله است

$A = (x_0, y_0, z_0)$ و $L: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$ معادله ی صفحه ی P' که از نقطه ی A موازی صفحه ی P رسم می شود، به صورت (۱) $z = z_0$ و معادله ی صفحه ی P'' که از نقطه ی A عمود بر خط L رسم می شود، به همان صورت (۲) $px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0$ خواهد بود. در نتیجه، معادله ی خط d ، فصل مشترک دو صفحه ی P' و P'' که از نقطه ی A نیز می گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$d: \begin{cases} P': z = z_0 \\ P'': px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} \frac{x}{-q} = \frac{y - \frac{px_0 + qy_0}{r}}{p} \\ z = z_0 \end{cases} \quad \text{معادله ی کانونیک}$$

اینک مثال هایی از روش جبری-مختصاتی را در چند حالت بررسی می کنیم.

مثال ۱: نقطه ی $A = (1, 2, -1)$ ، خط $L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ و صفحه ی $P: x - 2y + z - 3 = 0$ داده شده اند. معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی A می گذرد، با صفحه ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: از معادله ی خط L و صفحه ی P مشخص است که دستگاه مختصات قائم در نظر گرفته شده در این مسئله، حالت کلی دارد. بنابراین، محاسبات برای حل مسئله، حالت کلی دارد، کم و ساده نیست. بنابراین، برای حل مسئله، معادله های صفحه ی P' (که از A موازی صفحه ی P رسم می شود) و P'' (که از A عمود بر L رسم می شود) را می نویسیم و فصل مشترک آن ها را که جواب مسئله است، پیدا می کنیم. داریم:

$$P: x - 2y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{V}_P = (1, -2, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{P'} = \vec{V}_P = (1, -2, 1)$$

$$A = (1, 2, -1) \in P'$$

$$\Rightarrow P': a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow 1(x - 1) - 2(y - 2) + 1(z + 1) = 0 \Rightarrow P': x - 2y + z + 4 = 0$$

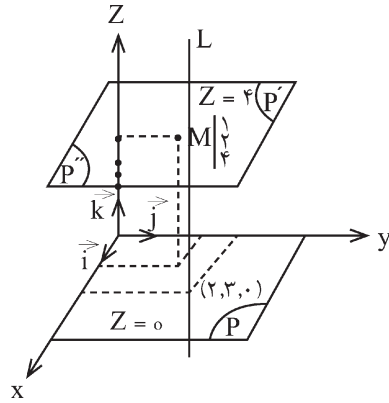
$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{V}_L = (3, -1, 2) = \vec{V}_{P''},$$

$$A = (1, 2, -1) \in P''$$

$$\Rightarrow P'': 3(x - 1) - 1(y - 2) + 2(z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow P'': 3x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادله ی خط خواسته شده}$$



برای حل، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و خط d ، فصل مشترک آن‌ها را، به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} P' \parallel P, A = (1, 2, 4) \in P' &\Rightarrow P': z = 4 \quad (1) \\ \vec{L} \parallel P: \vec{V}_L = (0, 0, 1), \vec{V}_P = (0, 0, 1) &\Rightarrow \vec{V}_L \parallel \vec{V}_P \\ \Rightarrow \vec{L} \parallel P \Rightarrow P'': (x-1) + 0(y-2) + 1(z-4) = 0 \\ \Rightarrow P'': z - 4 = 0 \Rightarrow P'': z = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

به‌طوری‌که دیده می‌شود، دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق هستند. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A در این دو صفحه‌ی منطبق برهم می‌گذرد، جواب مسئله است. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد.

برای تعیین معادله‌ی یک خط دل‌خواه از این مجموعه خط، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از صفحه‌ی مشترک P' و P'' را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} B = (0, 0, 4) \in P' = P'' \text{ و } A = (1, 2, 4) \\ \Rightarrow AB: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-4}{4-4} \Rightarrow AB = d_1: \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} \\ z-4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow d_1: \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

و اینک یک جواب دیگر:

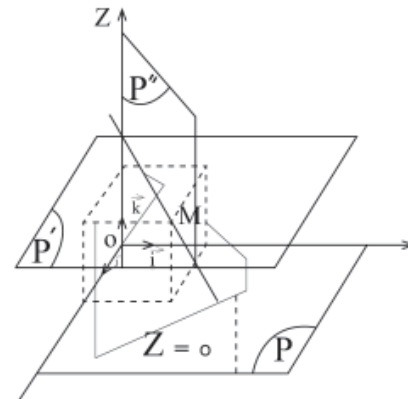
$$\begin{aligned} C = (3, 1, 4) \in P' = P'' \text{ و } A = (1, 2, 4) \\ \Rightarrow AC: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-4}{4-4} \Rightarrow AC: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ z-4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow AC = d_2: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

با همین روش، معادله‌ی خط‌های دیگر جواب مسئله را می‌توان به دست آورد.

مثال ۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $M = (2, 2, 2)$ به موازات صفحه‌ی $P: z = 0$ رسم می‌شود و بر

$$\text{خط } L: \begin{cases} x = y - 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ عمود است.}$$

حل: به‌طوری‌که دیده می‌شود، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xOy منطبق است ($z = 0$ معادله‌ی صفحه‌ی xOy است) و خط L نیز موازی صفحه‌ی P است، زیرا داریم:



$$\vec{V}_P = (0, 0, 1), \vec{V}_L = (1, 1, 0) \Rightarrow \vec{V}_P \cdot \vec{V}_L = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P - \vec{V}_L \Rightarrow \vec{L} \parallel P$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی M موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از M عمود بر خط L رسم می‌شود می‌نویسیم و معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' را که خط d جواب مسئله است، به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} P': z = z_0 \Rightarrow P': z = 2 \text{ و } \vec{V}_{P''} = \vec{V}_L = (1, 1, 0) \\ P'': 1(x-2) + 1(y-2) + 0(z-2) = 0 \Rightarrow P'': x + y - 4 = 0 \\ \Rightarrow d: \begin{cases} z = 2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{y-4}{-1} \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A = (1, 2, 4)$ موازی صفحه‌ی $P: z = 0$ و عمود بر خط

$$L: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ باشد.}$$

حل: در این مسئله، صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xOy از دستگاه مختصات $O-xyz$ و خط L عمود بر صفحه‌ی P یا در این مسئله، عمود بر صفحه‌ی xOy است.