



تابع چندجمله ای

چندجمله ای

چندجمله ای ها، به صورت یک چندجمله ای نوشته شود. برای مثال، عبارت جبری $(x+1)^3$ یک چندجمله ای به این صورت است:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)(x+1)(x+1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x+1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $\frac{1}{(x+2)^2}$ چندجمله ای

نیست، زیرا:

$$\frac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$$

در عبارت $(x+2)^{-2}$ توان پراتر منفی است.

هر عبارت جبری با تعدادی جملات متناهی متشکل از متغیرها و مقادیر ثابتی که بین آن ها از عمل های جمع، تفریق و ضرب استفاده شده باشد، یک چندجمله ای است. نکته ی مهم در چندجمله ای ها این است که توان متغیرها در آن ها عددهای صحیح نامنفی است. برای مثال، عبارت جبری $x^2 - 3x + 2$ چندجمله ای است که از سه جمله تشکیل شده است. اما عبارت جبری $x^2 - \frac{4}{x} + 3x^{\frac{5}{2}}$ چندجمله ای نیست، زیرا در عبارت $\frac{4}{x}$ که می توان آن را به صورت $4x^{-1}$ نوشت، یا در عبارت $3x^{\frac{5}{2}}$ ، توان x عددی صحیح و نامنفی نیست.

معادلات چندجمله ای

به معادله ای که در آن یک چندجمله ای با چندجمله ای دیگر برابر شده باشد، معادله ی چندجمله ای می گوئیم.

صور ت دیگر چندجمله ای

هر عبارتی که به صورت حاصل ضرب چندجمله ای ها باشد، می تواند با استفاده از قانون توزیع پذیری در ضرب

برای مثال معادله ی :

(۱)

$$3x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1$$

یک معادله ی چندجمله ای است. هدف از حل این معادله، یافتن مقادیری برای متغیر x است که وقتی آن ها را در معادله قرار می دهیم، به یک برابری درست برسیم. برای این منظور داریم:

$$3x^2 - 3x + 2 - x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

این معادله دو جواب دارد که آن ها را ریشه های معادله ی ۱ می گوئیم. زیرا وقتی آن ها را در این معادله قرار دهیم، به یک برابری درست می رسیم. (خودتان امتحان کنید.)
معادله ی چندجمله ای می تواند به صورت یک اتحاد بین چندجمله ای ها باشد؛ مانند:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

این معادله دارای بی شمار جواب است، زیرا برای هر مقدار حقیقی که جایگزین x کنیم، به یک برابری همیشه درست می رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

تابع چندجمله ای

هر تابع با ضابطه ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_i ها اعداد حقیقی ثابت باشند، یک تابع چند جمله ای از درجه ی عدد صحیح و نامنفی n (با شرط $a_n \neq 0$) بر حسب متغیر x است؛ برای مثال: $f_1(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) ضابطه ی یک تابع دوجمله ای درجه اول و $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ضابطه ی یک تابع سه جمله ای درجه دوم است.

می دانیم، نمودار تابع f_1 یک خط راست و نمودار تابع f_2 یک سهمی با راس به طول $x = -\frac{b}{2a}$ و محور تقارن به معادله ی $x = -\frac{b}{2a}$ است. اگر $a > 0$ باشد، سهمی در راس خود دارای می نیمم است و اگر $a < 0$ ، دارای ماکزیمم خواهد بود.

توجه داشته باشید که $x = -\frac{b}{2a}$ طول نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم است و برای محاسبه ی عرض این نقطه کافی است در

ضابطه ی f به جای x مقدار $-\frac{b}{2a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا می نیمم گفته می شود، به دست آید.

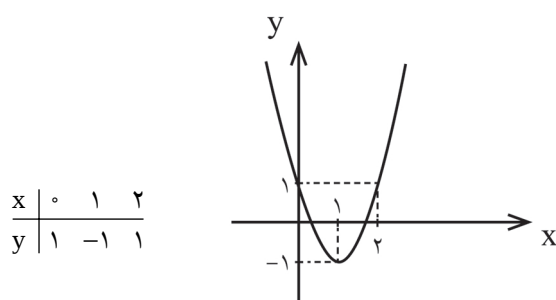
مثال: تابع درجه دوم f با ضابطه ی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ مفروض است. راس سهمی و مقدار می نیمم تابع f را بیابید. (چون $a = 2 > 0$ پس سهمی در راس خود می نیمم دارد.)

حل: در این تابع درجه ی ۲ داریم: $a = 2$ ، $b = -4$ ، و $c = 1$ پس:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \text{ طول نقطه ی می نیمم}$$

مقدار می نیمم تابع $f(1) = 2 \times (1)^2 - 4 \times (1) + 1 = -1$
در واقع برای تابع f در دامنه ی تعریف خود که $\mathbb{R}$ است، کم ترین مقدار ممکن با -1 برابر است.
به عبارت دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ همواره داریم: $f(k) \geq -1$.

نمودار این سهمی به صورت زیر است:



دامنه ی توابع چند جمله ای، مجموعه ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. در مثال بالا، هر عدد حقیقی دلخواهی را می توان جایگزین x در تابع $f(x)$ کرد. بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$.
از طرف دیگر، با توجه به نمودار تابع ملاحظه می کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار، یعنی $y = f(x)$ همواره بزرگ تر یا برابر با -1 است. در نتیجه با توجه به نمودار، برد این تابع $y \geq -1$ است. بنابراین: $R_f = [-1, +\infty)$.

طول محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم، که برای یافتن آن ها کافی است معادله ی $f(x) = 0$ را حل کنیم. در مثال قبل داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

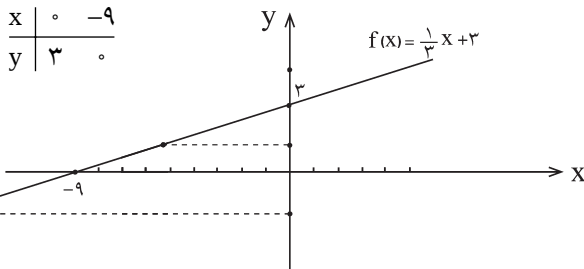
$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{4 \pm 4}{4} = \frac{2 \pm 2}{2}$$

در نتیجه، محل برخورد نمودار این تابع با محور x ها، نقاط

$$A_1 \left| \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right| \text{ و } A_2 \left| \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right| \text{ هستند.}$$

حل:

۱. $f(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_f = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی اول است، بنابراین نمودار آن یک خط است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:



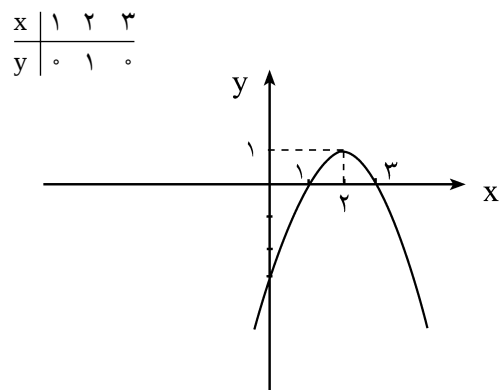
با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم، عرض هر نقطه روی نمودار می‌تواند یک عدد حقیقی از بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد. بنابراین $R_f = \mathbb{R}$.

۲. $g(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_g = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی دوم است، بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ طول نقطه‌ی ماکزیمم}$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \text{ مقدار ماکزیمم تابع}$$

برای رسم سهمی از مختصات چند نقطه از سهمی استفاده می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی سهمی، همواره کوچک‌تر یا برابر با ۱ است؛ یعنی همواره $f(x) \leq 1$.

$$R_f = (-\infty, 1] \text{ در نتیجه داریم:}$$

مثال: فرض کنیم $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای درجه اول باشد؛ به طوری که در آن $f(-1) = 2$ و $f(2) = -3$. ضابطه‌ی

مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r

در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

حل: حجم این تانکر از یک استوانه و یک

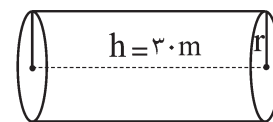
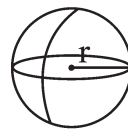
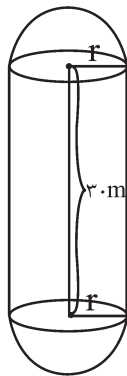
کره که هر دو به شعاع r هستند، تشکیل شده است.

بنابراین داریم:

$$y_1: \text{حجم کره به شعاع } r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$y_2: \text{حجم استوانه به شعاع } r = \pi r^2 h = 30\pi r^2$$

$$h = 30 \text{ ارتفاع}$$



$$f(x) = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \pi r^2 \left(\frac{4}{3}r + 30 \right)$$

تمرین: مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع

۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد، حجم این مخزن را بر حسب تابعی از h بنویسید.

راهنمایی: حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h ، $\frac{1}{3}$

حجم استوانه به شعاع مقطع r و ارتفاع h است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم

کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 3 \quad (1) \quad g(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad (2)$$

این تابع را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x) = ax + b$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \Rightarrow a(-1) + b = 2 \\ f(2) = -3 \Rightarrow a(2) + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

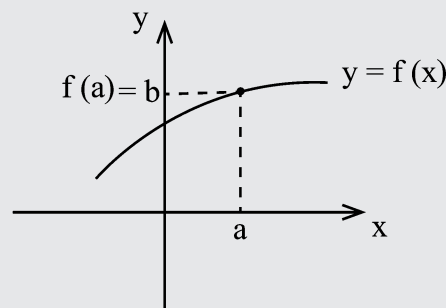
$$b = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

مثال: هرگاه $f(x) = 3x - 2$ و نقطه‌ی $(m+1, 2m-1)$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل: چون این نقطه روی نمودار تابع است، بنابراین داریم:

$$f(m+1) = 2m-1 \Rightarrow 3(m+1) - 2 = 2m-1 \Rightarrow m = -2$$

نکته: هرگاه نقطه‌ی (a, b) روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، در این صورت داریم: $f(a) = b$.



مثال: فرض کنیم $f(x) = 2x^2 - 1$ مطلوب است:

الف) $f(\sqrt{2})$ ب) $f(2x)$ ج) $f(x+1)$

حل:

الف) کافی است به جای x در تابع $f(x)$ ، عدد $\sqrt{2}$ را قرار دهیم:

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

ب) $f(2x) = 2(2x)^2 - 1$

$$= 8x^2 - 1$$

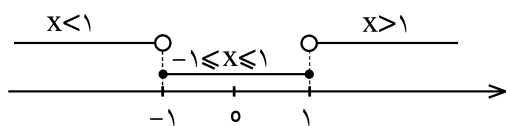
ج) $f(x+1) = 2(x+1)^2 - 1$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - 1 = 2x^2 + 4x + 1$$

تابع چندضابطه‌ای

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چندضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. ابتدا به صورت زیر، این دامنه را به سه مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کنیم:



اکنون روی هر مجموعه، ضابطه‌ای متمایز به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$$

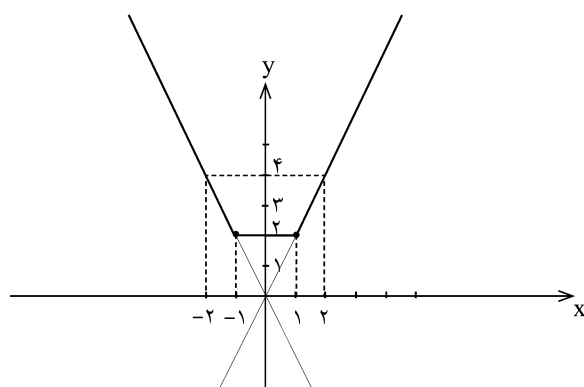
در این صورت به $f(x)$ تابع‌ای سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده‌ی دامنه‌اش رسم کنیم. به همین منظور، برای $f(x) = 2$ ، $x > 1$ ، برای $f(x) = 2$ ، $-1 \leq x \leq 1$ و برای $f(x) = -2x$ ، $x < -1$ رسم می‌کنیم:

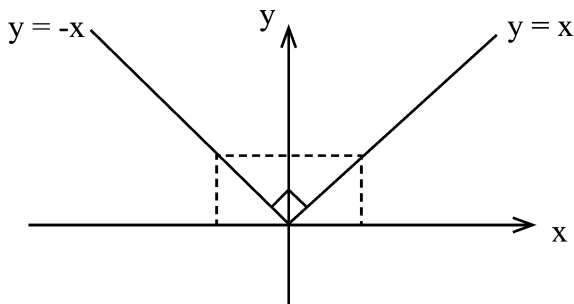
$$f(x) = 2x; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \quad f(x) = 2; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$f(x) = -2x; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{array}$$



نمودار این تابع به صورت زیر است:

x	-1	0	1
y	1	0	1



دامنه‌ی تعریف این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از طرف دیگر، عرض هر نقطه واقع بر این تابع، بزرگ‌تر یا برابر صفر است. یعنی همواره $y \geq 0$. در نتیجه برد این تابع $R_f = [0, \infty)$ است.

نکته ۱. می‌توان نمودار این تابع را یک زاویه قائمه دانست که رأس آن منطبق بر مبدأ و دو ضلع این زاویه نیمسازهای ربع اول و دوم محورهای مختصات هستند.

نکته ۲. تابع قدر مطلق یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور طول وجود دارد که نمودار آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: نمودار هر یک از تابع‌های چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

$$2. \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 & x > 1 \\ -x-2 & x < -1 \end{cases}$$

$$3. \quad \text{تابع } s(x) \text{ به تابع علامت معروف است.} \\ s(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی را که در دامنه است، پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۲ است. پس داریم:

$$R_f = [2, +\infty)$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & x \geq 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^2+1)$ ، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{4}x^2-1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2+1 > 0$ ، بنابراین از ضابطه‌ی اول برای محاسبه‌ی $f(x^2+1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2+1) = -(x^2+1)^2+1 = -(x^4+2x^2+1)+1 = -x^4-2x^2$$

چون $-\sqrt{2} < 0$ ، بنابراین برای محاسبه‌ی $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2}) = 1 - 2(-\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{4}x^2-1 < 0$ ، بنابراین $-\frac{1}{4}x^2-1 < 0$ در نتیجه برای

محاسبه‌ی $f(-\frac{1}{4}x^2-1)$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{4}x^2-1) = 1 - 2(-\frac{1}{4}x^2-1) = 1 + x^2 + 2 = x^2 + 3$$

تابع قدر مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم و آن را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تابع به هر عضو از دامنه‌اش ($|R$)، قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد. در حقیقت، حاصل تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است. برای مثال:

$$f(3) = |3| = 3; \quad f(-3) = |-3| = -(-3) = 3; \quad f(0) = |0| = 0$$