● هوشنگ شرقی

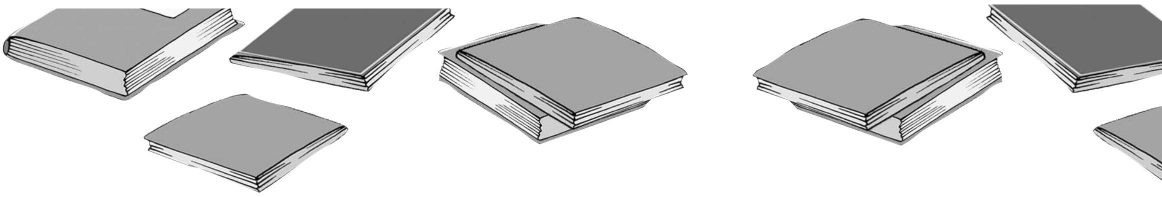
مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان

المپیاد ریاضی

در یوگسلاوی سابق

کشور یوگسلاوی هم‌چون بیشتر کشورهای شرق قاره‌ی اروپا، همواره از پیشگامان المپیادهای ریاضی بوده است. از سال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی منطقه‌ای در این کشور سامان داده شد و از سال ۱۹۶۰ نیز مسابقه‌ی سراسری ریاضی در چهار مرحله (مدرسه، منطقه، جمهوری‌ها و سراسر کشور) در آن برگزار می‌شود. از سال ۱۹۶۳ این کشور به المپیاد بین‌المللی ریاضی پیوست و برای تعیین تیم نهایی شرکت کننده در المپیاد بین‌المللی، مرحله‌ای دیگر نیز به مراحل فوق افزوده شد. با این مقدمات، واضح است که سطح آزمون‌های المپیادهای داخلی این کشور، باید قابل قبول باشد و سؤالات آن‌ها مسائل خوبی باشند و همین طور هم هست. با نگاهی به آرشیو مسائل ریاضی، المپیادها و مسابقات ریاضی و نیز نشریات ریاضی که در این کشور منتشر می‌شوند، به درستی این موضوع پی می‌بریم. با توجه به این موضوع بر آن شدیم، نمونه‌هایی از مسائل مرحله‌ی نهایی المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را در این شماره، همراه با راه‌حل آن‌ها، بیاوریم.

لازم به یادآوری است، کشور یوگسلاوی در سال‌های ۱۹۷۷ و ۱۹۶۷ دو بار میزبان المپیاد ریاضی بوده و در سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۹۹ (قبل از فروپاشی و تجزیه) مقام‌های خوبی در این رقابت‌ها به دست آورده است. پس از تجزیه نیز کشورهای جدا شده از آن یعنی صربستان، کرواسی، اسلوونی، مقدونیه بوسنی ـ هرزگوین، در المپیادهای ریاضی فعالانه شرکت داشته و کشور اسلوونی در سال ۲۰۰۶ میزبانی این رقابت‌ها را برعهده داشته است. در صورتی که به مسائل المپیادهای ریاضی این کشورها نیز دست‌رسی پیدا کنیم، در شماره‌های آینده از آن‌ها نیز استفاده خواهیم کرد.



مسائل

۱. ثابت کنید می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$ پیدا کرد که به ازای هر کدام از آن‌ها، هر یک از عددهای n، $n+1$ و $n+2$ به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید اگر برای چهارضلعی محدب $ABCD$ داشته باشیم: $AB + BD \le AC + CD$ آن وقت $AB \le AC$

۳. ثابت کنید اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم: $2m^2 + m = 3n^2 + n$ آن‌وقت عددهای $m-n$، $2m+2n+1$ و $3m+3n+1$ مجذورهای عددهای درستی هستند.

۴. ثابت کنید برای عددهای حقیقی و مثبت a، b و c همیشه داریم:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{1}{3}(a+b+c)$$

۵. روی محیط دایره‌ای به قطر AD، نقطه‌ی B و روی قطر AD نقطه‌ی C را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AB=CD$

ثابت کنید در مثلث ABC، نیم‌ساز رأس A، میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C از یک نقطه می‌گذرند.

۶. همه‌ی تابع‌های صعودی $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری بیابید که در اتحاد زیر صدق کنند: $f(x+f(y)) = f(x+y)+1 \quad (x,y \in \mathbb{R})$

حل مسائل

۱. ابتدا نشان می‌دهیم بی‌شمار عدد طبیعی مربع کامل به فرم $2k^2+1$ (مانند ۱، ۹، ۲۸۹ و...) وجود دارد. سپس درباره‌ی ارتباط این مسئله با مسئله‌ی اصلی می‌گوییم، برای این موضوع در واقع باید ثابت کنیم که معادله‌ی سیاله‌ی $x^2 = 2y^2 + 1$ بی‌شمار جواب در $\mathbb{N}$ دارد. به سادگی می‌توان نشان داد، اگر (x_0, y_0) یک جواب این معادله باشد (یعنی: $x_0^2 - 2y_0^2 = 1$) آن‌گاه $(2x_0+3y_0$ و $3x_0+4y_0)$ نیز یک جواب این معادله است، زیرا:

$$(3x_0+4y_0)^2 - 2(2x_0+3y_0)^2 = 9x_0^2+16y_0^2+24x_0y_0$$
$$-2(4x_0^2+9y_0^2+12x_0y_0) = x_0^2-2y_0^2 = 1$$

برای مثال می‌دانیم، $x=3$ و $y=2$ یک جواب معادله است. پس $x = 3\times3+4\times2=17$ و $y=2\times3+3\times2=12$ نیز یک جواب معادله است و در نتیجه $2(12)^2+1 = 17^2 = 289$. لذا می‌توان از هر جواب این معادله جوابی دیگر نیز به دست آورد. در نتیجه، بی‌شمار عدد مربع کامل به صورت $2k^2+1$ تولید کرد.

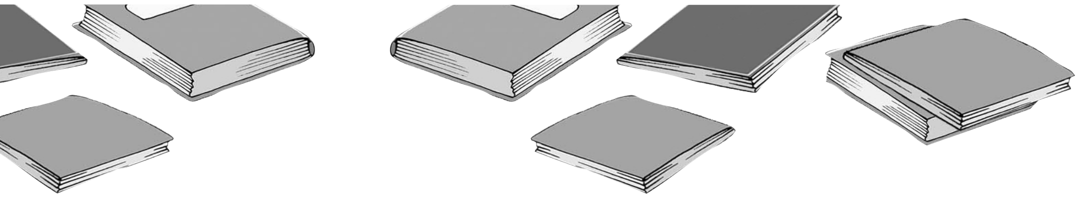
اکنون با توجه به این نتیجه، می‌توان پاسخ مسئله را به سادگی داد.

عدد طبیعی $n+1 = x^2 = 2y^2+1$ را در نظر می‌گیریم. مطابق نتیجه‌ی فوق بی‌شمار x و y و در نتیجه بی‌شمار $n+1$ به صورت $2y^2+1$ داریم. حال عددهای قبل و بعد از این عدد را ببینیم:

$$n = 2y^2 = y^2 + y^2$$
$$n+1 = 2y^2+1 = x^2 = x^2 + (0)^2$$
$$n+2 = x^2+1 = x^2+(1)^2$$

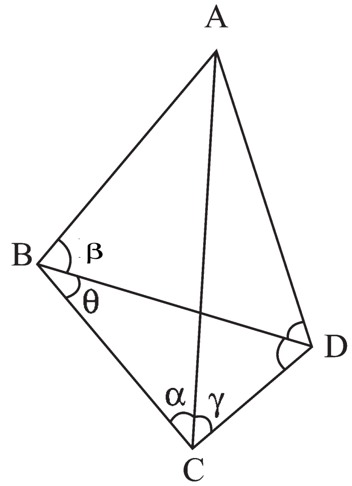
چنان‌که می‌بینیم، هر سه‌ی این عددها به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشته شده‌اند.

در حالت کلی، معادله‌ی سیاله‌ی $x^2 - dy^2 = 1$ را



معادله‌ی پل[1] می‌نامند. به نظر می‌رسد که نخستین بار **ارشمیدس** از این معادله نام برده است. البته **لرد برانکو** (ریاضی‌دان انگلیسی قرن هفدهم)، یک روش برای حل آن ارائه داده است. **فرما**، **والیس** و **لاگرانژ** نیز در سال‌های بعد کارهایی روی این معادله انجام دادند. در نظریه‌ی اعداد ثابت شده است، این معادله به ازای هر مقدار d که مجذور کامل نباشد، بی‌شمار جواب دارد.

۲. اثبات با برهان خلف انجام می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم $AB > AC$. در آن صورت مطابق شکل در مثلث ABC داریم: $(I)\ \alpha > \beta + \theta$



و از ترکیب این نابرابری با فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} AC + CD \geq AB + BD \\ AB > AC \end{cases}$$
$$\overline{\qquad CD \geq BD \qquad}$$

در نتیجه، در مثلث CBD داریم: $(II)\ \theta \geq \alpha + \gamma$. از مقایسه‌ی این نابرابری با نابرابری (I) نتیجه می‌شود:

$$\alpha > \beta + \alpha + \gamma \Rightarrow \beta + \gamma < 0$$

از نادرستی این نتیجه‌ی آخر، درستی حکم ثابت می‌شود.

۳. فرض مسئله را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$2m^2 + m - 2n^2 - n = n^2 \Rightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2$$

$$\Rightarrow (m - n)(2m + 2n + 1) = n^2$$

حال اگر فرض کنیم که $d = ((m-n),(2m+2n+1))$ خواهیم داشت:

$$m - n = kd,\ \ 2m + 2n + 1 = k'd \Rightarrow$$
$$kk'd^2 = n^2 \Rightarrow d^2 | n^2 \Rightarrow d | n$$

هم‌چنین واضح است، $d | m - n$ و در نتیجه: $d | m$ بنابراین:

$$d | m,\ \ d | n \Rightarrow d | 2m + 2n$$

با توجه به این‌که $d = ((m-n),(2m+2n+1))$، $d | 2m+2n+1$ و از مقایسه با $d | 2m+2n$ نتیجه می‌شود $d | 1$ در نتیجه: $d = 1$ بنابراین: $(m-n)$ و $(2m+2n+1)$ نسبت به هم اول‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها مساوی n^2. یعنی مجذور کامل است. پس هر دوی آن‌ها باید مجذور کامل باشند.

برای اثبات قسمت بعد، کافی است برابری فرض را چنین تغییر دهیم:

$$2m^2 + m = 3n^2 + n \Rightarrow$$
$$3m^2 - 3n^2 + m - n = m^2 \Rightarrow 3(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$$
$$\Rightarrow (m - n)(3m + 3n + 1) = m^2$$

و چون $m - n$ و m^2 هر دو مربع کامل هستند، پس $3m + 3n + 1$ نیز مربع کامل است.

۴. با استدلال بازگشتی و به صورت زیر، درستی این نابرابری اثبات می‌شود:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} =$$

$$\frac{a(a^2+ab+b^2) - ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{b(b^2+bc+c^2) - bc(b+c)}{b^2+bc+c^2}$$

$$+ \frac{c(c^2+ca+a^2) - ca(c+a)}{c^2+ca+a^2}$$

$$= a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + b - \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} +$$

$$c - \frac{ca(c+a)}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2}$$

$$\leq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

اکنون این نابرابری را به سه نابرابری متقارن زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{ab(a+b)}{a^{۲}+ab+b^{۲}} \le \dfrac{a+b}{۳} \\ \dfrac{bc(b+c)}{b^{۲}+bc+c^{۲}} \le \dfrac{b+c}{۳} \\ \dfrac{ca(a+c)}{c^{۲}+ca+a^{۲}} \le \dfrac{a+c}{۳} \end{cases}$$

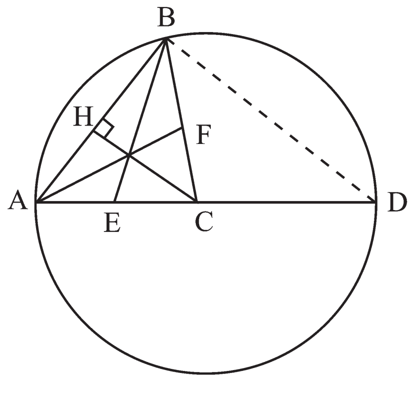
(از جمع این سه نابرابری، نابرابری فوق اثبات می‌شود)
اکنون کافی است درستی یکی از این سه نابرابری را به روش بازگشتی اثبات کنیم:

$$\frac{ab(a+b)}{a^{۲}+ab+b^{۲}} \le \frac{a+b}{۳} \Rightarrow a^{۲}+ab+b^{۲} \ge ۳ab$$

$$\Rightarrow a^{۲}-۲ab+b^{۲} \ge ۰ \Rightarrow (a-b)^{۲} \ge ۰$$

که به دلیل بازگشت‌پذیری همه‌ی مراحل، درستی حکم ثابت می‌شود.

۵. شکل زیر را مطابق مفروضات مسئله رسم می‌کنیم. برای اثبات همرسی نیم‌ساز AF، میانه‌ی BE و ارتفاع CH در مثلث ABC، از «قضیه‌ی سه وا»[۲] کمک می‌گیریم. چون AD قطر دایره است، $A\hat{B}D = ۹۰^{\circ}$ و در نتیجه $CH \| BD$ و از قضیه‌ی تالس در مثلث ABD کمک می‌گیریم:



$$\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{CD}$$

هم‌چنین به کمک قضیه‌ی نیم‌سازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{CD}{AC}$$

و چون BE میانه است، پس $AE = CE$ و بنابراین:

$$\frac{AH}{BH} \times \frac{BF}{CF} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{CD} \times \frac{CD}{AC} \times \frac{AE}{AE} = ۱$$

و طبق عکس قضیه‌ی سه‌وا، AF ،BE و CH از یک نقطه می‌گذرند.

۶. در تساوی فوق $x=-y$ قرار می‌دهیم:

$$f(-y+f(y)) = f(۰)+۱$$

و چون $f(۰)+۱$ مقداری ثابت است و با توجه این‌که f تابع ثابت نیست، پس باید $-y+f(y)$ مقداری ثابت باشد:

$$-y+f(y)=k \Rightarrow f(y)=y+k \Rightarrow$$

$$f(x)=x+k$$

با قرار دادن $x=۰$ در این رابطه نتیجه می‌شود: $f(۰)=k$ و یا $f(x)=x+f(۰)$ و اگر در این رابطه $x=f(۰)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(۰)) = f(۰)+f(۰) = ۲f(۰) \quad (I)$$

و اگر در رابطه‌ی اولیه $x=y=۰$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(۰)) = f(۰)+۱ \quad (II)$$

و از مقایسه‌ی روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$۲f(۰) = f(۰)+۱ \Rightarrow f(۰)=۱$$

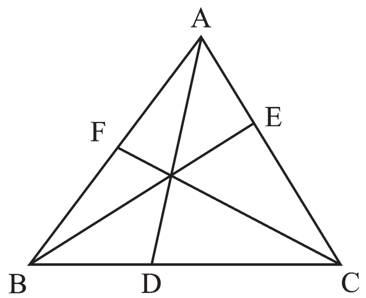
و لذا: $f(x)=x+۱$.

پی‌نوشت

1. Pell equation

۲. طبق قضیه‌ی سه‌وا، شرط لازم و کافی برای آن که سه خط AD و BE و CF در مثلث ABC در یک نقطه همرس باشند، آن است که:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = ۱$$



برای اطلاع بیشتر، به کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.