● تونی کریلی
ترجمه: غلامرضا یاسی پور

عدد پی (π)

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طولِ در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

π معروف‌ترین عدد در ریاضیات است. جمیع ثابت‌های دیگر طبیعت را فراموش کنید، چه π همواره در رأس فهرستمان قرار می‌گیرد. اگر برای اعداد نیز جایزه‌ی اُسکار وجود داشت، π هر ساله جایزه را می‌برد.

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طول در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبتِ این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است. زیستگاه طبیعی π دایره است، اما این عدد در هر گوشه‌ی ریاضیات و در مکان‌هایی که به‌هیچ‌وجه با دایره مرتبط نیستند نیز خود را نشان می‌دهد.

به‌ازای دایره‌ای به قطر d و شعاع r:

پیرامون $= \pi d = ۲\pi r$

سطح $= \pi r^۲$

به‌ازای کره‌ای به قطر d و شعاع r:

سطح رویه $= \pi d^۲ = ۴\pi r^۲$

حجم $= ۴/۳\pi r^۲$

ارشمیدس سیراکیوزی[1]

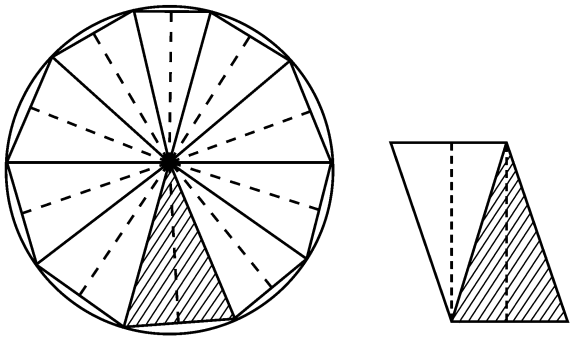
نسبت پیرامون دایره به قطر آن، موضوعی مورد توجه فرهنگ باستان بود. در حدود سال ۲۰۰۰ قبل از میلاد، بابلی‌ها متوجه شدند که پیرامون دایره، به تقریب، سه برابر طول قطر آن است. سپس در سال ۲۲۵ قبل از میلاد، این **ارشمیدس سیراکیوزی** بود که به‌طور جدی بررسی نظریه‌ی ریاضی π را آغاز کرد و از این‌رو در عداد بزرگان قرار گرفت. ریاضی‌دانان دوست دارند به این همکار خود درجه بدهند و او را هم‌سطح، و البته پیش‌گام **کارل فردریش گاوس**[2] (شاهزاده‌ی ریاضی‌دانان) و **سر اسحق نیوتن**[3] قرار دهند. درستی این قضاوت هرچه باشد، واضح است که ارشمیدس از شهرت و اعتبار بالایی برخوردار است. او غیر از سهمش در نجوم، ریاضی و فیزیک، سلاح‌های جنگی از قبیل منجنیق، اهرم و «آینه‌های سوزان»ی طراحی کرد که تمام آن‌ها برای دور نگه‌داشتن رومیان و متوقف کردن آنان به کار می‌رفت. اما با تمام این احوال، وی چون پروفسورهای پریشان‌حواس عمل می‌کرد، وگرنه چرا هنگام کشف قانون تقلیل وزن اجسام در مایعات، برهنه از حمام بیرون جست و فریاد «یافتم، یافتم»[4] سر داد؟!

افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان ولزی[۶] کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز[۷] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[۸] بود

این که چگونه کار خود را در مورد π جشن گرفت، هنوز مشخص نشده است!

باری، با در دست داشتن این تعریف که π نسبت پیرامون دایره به قطرش است، رابطه‌ی آن با سطح[۵] دایره چه می‌شود؟ چنین استنتاج کرده‌اند که سطح دایره‌ای، به شعاع r، برابر πr^2 است؛ گرچه احتمالاً این رابطه معروف‌تر از تعریف نسبت پیرامون به قطر (π) است. این واقعیت که π وظایفی دوگانه در مورد سطح و پیرامون دایره دارد، قابل توجه است.

اما این مطلب را چگونه می‌توان نشان داد؟ دایره را می‌توان به تعدادی مثلث برابر و باریک تجزیه کرد که طول قاعده‌شان b و طول ارتفاعشان نزدیک به r باشد. این مثلث‌ها در داخل دایره یک چندضلعی تشکیل می‌دهند که به سطح دایره نزدیک می‌شود. برای آغاز کار، ۱۰۰۰ مثلث را در نظر می‌گیریم. کل جریان، تمرین در تقریب‌ها است. در این صورت می‌توانیم، هر زوج مجاور از این مثلث‌ها را به‌هم وصل کنیم و مستطیلی بسازیم (تقریباً) با مساحت $b \times r$. بنابراین سطح یا مساحت کل چندضلعی، برابر $۵۰۰ \times b \times r$ خواهد شد. مقدار $۵۰۰ \times b$، از آن‌جا که در حدود نصف پیرامون دایره است، دارای طول πr می‌شود و سطح چندضلعی مورد بحث $\pi r \times r = \pi r^2$ خواهد شد. هرچه تعداد مثلث‌هایمان بیشتر باشد، شکل تقریبی‌مان به دایره نزدیک‌تر می‌شود و در حد نتیجه می‌گیریم که سطح دایره برابر πr^2 است.



ارشمیدس مقدار π را بین دو کسر ۲۲۳/۷۱ و ۲۲۰/۷۰ برآورد کرد. بنابراین تقریب آشنای ۲۲/۷ برای π را به ارشمیدس مدیونیم. افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان **ولزی**[۶] کمتر معروف، یعنی **ویلیام جونز**[۷] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[۸] بود. اما این لئونارد اویلر[۹] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بود که π را در زمینه‌ی نسبت دایره‌ای متداول ساخت.

مقدار دقیق π

هرگز نمی‌توانیم مقدار دقیق π را بدانیم، چرا که این عدد، عددی گنگ است؛ موضوعی که در سال ۱۷۶۸ **یوهان لامبرت**[۱۰] اثبات کرد، این بود که: بسط دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است. ۲۰ رقم ده‌دهی اولیه عبارت‌اند از:

۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶...

مقدار $\sqrt{۱۰}$ که ریاضی‌دانان چینی در نظر می‌گرفتند، برابر است با:

۳.۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶۸۳۷۹۳۳۱۹۹

این مقدار که در حدود سال ۵۰۰ میلادی، توسط **براهما گوپتا**[۱۱] پذیرفته شد، درواقع اندکی بهتر از مقدار تقریبی‌تر ۳ است؛ گرچه در رقم دوم ده‌دهی، با π اختلاف دارد.

π را می‌توان با استفاده از یک سری[۱۲] از اعداد محاسبه کرد. یکی از معروف‌ترین این سری‌ها عبارت است از:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۱} + \cdots$$

گرچه این سری در هم‌گرایی به π، به گونه‌ای پردردسر آهسته، و برای محاسبه نومیدکننده است. در این مورد، اویلر سری جالب توجه زیر را به‌دست آورد:

$$\frac{\pi^۲}{۶} = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \frac{۱}{۶^۲} + \cdots$$

رامانوجان[۱۳]، نابغه‌ی خودآموخته‌ی هندی، چندین فرمول تقریبی جالب برای π به‌دست داد که یکی از آن‌ها شامل تنها جذر ۲، عبارت است از:

$$\frac{۹۸۰۱}{۴۴۱۲}\sqrt{۲} = ۳.۱۴۱۵۹۲۷۳۰۰۱۳۳۰۵۶۶۰۳۱۳۹۹۶۱۸۹۰...$$

ریاضی‌دانان شیفته و مجذوب π هستند. در ایامی که لامبرت ثابت کرده بود این عدد نمی‌تواند کسری باشد، به سال ۱۸۸۲، **لیندمان**[۱۴]، ریاضی‌دان آلمانی، برجسته‌ترین مسئله‌ی مرتبط با π را حل کرد. یعنی نشان داد که π «متعالی»[۱۵] است به این معنی که نمی‌تواند جواب یک معادله‌ی جبری باشد (یعنی معادله‌ای که تنها شامل توان‌های x است). لیندمان، با حل این معمای روزگاران، به مسئله‌ی «تربیع دایره»[۱۶] نیز خاتمه داد. مسئله به این ترتیب بود که با مفروض بودن یک دایره و تنها با به کار بردن پرگار و خط‌کش نامدرج، مربعی رسم کنیم که مساحتش برابر مساحت آن دایره باشد. لیندمان به‌طور قطعی اثبات کرد که این کار غیرممکن است. امروزه عبارت تربیع دایره، هم ارز غیرممکن به‌کار می‌رود.

محاسبه‌ی دقیق‌تر مقدار π به سرعت ادامه یافت. در سال

۱۸۵۳ م، **ویلیام شنکس**[17] مدعی محاسبه‌ی مقدار صحیح آن تا ۶۰۷ رقم ده‌دهی شد (عملاً تنها تا ۵۲۷ رقم ده‌دهی). در دوران جدید، تحقیق در محاسبه‌ی مقدار π با رقم‌های بیشتر بعد از ممیز، به کمک رایانه، شدت و حدت بیشتری یافته است. در سال ۱۹۴۹، π تا ۲۰۳۷ رقم ده‌دهی محاسبه شد و این کار با رایانه‌ی انیاک[18] ۷۰ ساعت طول کشید. تا سال ۲۰۰۲، محاسبه‌ی π تا مقدار گیج‌کننده‌ی ۱/۲۴۱/۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰ رقم ده‌دهی رسید، اما این رشته هم‌چنان سر دراز دارد. در این مورد، اگر در خط استوا بایستیم و شروع به نوشتن بسط π کنیم، طول محاسبه‌ی شنکس به ۱۴ متر می‌رسد، در حالی که بسط سال ۲۰۰۲ به حدود ۶۲ بار گردش دور زمین می‌انجامد.

در مورد π پرسش‌های گوناگونی مطرح و به آن‌ها پاسخ داده شده است. آیا رقم‌های π تصادفی[19] هستند؟ آیا یافتن دنباله‌ای قابل پیش‌بینی در بسط آن ممکن است؟ برای نمونه، آیا می‌توان دنباله‌ی ۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را در این بسط یافت؟ در دهه‌ی ۱۹۵۰ پاسخ این پرسش نادانستنی به نظر می‌رسید. هیچ‌کس چنین دنباله‌ای در ۲۰۰۰ رقم دانسته‌ی π نیافته بود. **بروور**[20]، ریاضی‌دان پیشرو هلندی می‌گفت، این پرسش فاقد معنی است. زیرا بر این اعتقاد بود که تجربه‌پذیر نیست. درواقع، این ارقام در سال ۱۹۹۷ در آغاز مکان ۱۷۳۸۷۵۹۴۸۸۰، یا با به‌کار بردن استعاره‌ی خط استوا، در حدود ۳۰۰۰ مایل پیش از آن‌که دور اول کامل شود، به‌دست آمدند. در بسط π، پیش از آن‌که ۶۰۰ مایل کامل شود، ده شش می‌یابیم، اما برای یافتن ده هفت در یک ردیف، باید تا تکمیل یک دور و طی ۳۶۰۰ مایل دیگر صبر کنیم.

π در اشعار

در صورتی که بخواهیم مقادیر اولیه‌ی بسط π را به‌خاطر بسپریم، شاید چند بیتی شعر کارساز باشد. در این‌جا یکی از این ابیات را می‌آوریم:

گر ز قدر عدد پی بکنند از تو سؤال
پاسخی ده که خردمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان
ره سر منزل توفیق به‌ما آموزد

تعداد حروف هر یک از کلمات بیت دوم، یکی از ارقام اولیه را مشخص می‌کند.

«از: سرگرمی‌های هندسه، پرویز شهریاری»

اهمیت π

فایده‌ی دانستن مقدار π با این همه رقم ده‌دهی چیست در حالی که اغلب محاسبات، تنها به چند رقم ده‌دهی نیاز دارند.

موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت[10] اثبات کرد، این بود که: بسط بخش دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است

زیرا احتمالاً در مورد هر کاربرد عملی، به بیش از ده رقم ده‌دهی نیاز نیست و تقریب ارشمیدس، یعنی ۲۲/۷ برای اغلبشان کفایت می‌کند. باید توجه داشته باشیم محاسبات مفصل مزبور تنها برای تفریح نیست. این محاسبات علاوه بر به‌کار گرفتن شیفتگی گروهی از ریاضی‌دانان که خود را «دوست‌داران پی» می‌خوانند، برای امتحان حد و مرز توانایی رایانه‌ها نیز به‌کار می‌روند.

شاید عجیب‌ترین قسمت داستان π تلاشی باشد که در مجلس مقننه‌ی ایالت ایندیانای آمریکا برای گذراندن لایحه‌ای برای تثبیت مقدار آن به‌وقوع پیوست. این عمل در پایان قرن نوزدهم، زمانی به‌وقوع پیوست که دکتر **گودوین**[21] طبیب، لایحه‌ای تقدیم مجلس کرد که π را «قابل هضم» کند. اما نتیجه‌ی عملی حاصل در این مرحله از قانون‌گذاری، عجز طراح آن برای تثبیت کردن مقداری بود که می‌خواست. خوش‌بختانه از لحاظ ایندیانا، پیش از آن‌که لایحه‌ی مورد بحث به تمامی تصویب شود، حماقت قانونی کردن π آشکار شد. و از آن زمان به بعد، سیاست‌مداران π را راحت گذاشتند.

چند تاریخچه

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها دریافتند که π به‌طور تقریب برابر ۳ است.

۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس تقریب نزدیک‌تر به π‌ی ۲۲/۷ را به دست داد.

۱۷۰۶ میلادی: ویلیام جونز نماد π را معرفی کرد.

۱۷۶۱ میلادی: لامبرت اثبات کرد که π عددی گنگ است.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که π متعالی است.

پی‌نوشت

1. Archimedes of Syracuse
2. Carl Friedrich Gauss
3. Sir Isaac Newton
4. Eureka
5. area
6. Welsh
7. William Jones
8. Royal Society of London
9. Leonhard Euler
10. Johann Lambert
11. Brahmagupta
12. series
13. Srinivasa Ramanujan
14. Ferdinand von Lindemann
15. transcendental
16. squaring the circle
17. William Shanks
18. Eniac
19. random
20. L. E. J. Brouwer