حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال اول

۱. $۰/۳ < \frac{a}{۲۰} < \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰} < \frac{a}{۲۰} < \frac{۲}{۵}$

$\Rightarrow \frac{۶}{۲۰} < \frac{a}{۲۰} < \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow a = ۷$

۲. $x < -۱ \Rightarrow |x| = -x$

$x < -۱ \Rightarrow x + ۱ < ۰$

$|۱ - |x|| + \sqrt{x^۲} = |۱ - (-x)| + |x| = |۱ + x| + |x|$

$= -(۱ + x) - x = -۱ - ۲x$

۳. $\sqrt{۲} < \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۲} - \sqrt{۳} < ۰$

$\Rightarrow |\sqrt{۲} - \sqrt{۳}| = -(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$

$۰ < \sqrt{۳} - \sqrt{۲} < ۱ \Rightarrow -۱ < \sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱ < ۰$

$\Rightarrow |\sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱| = -(\sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱)$

$A = -(\sqrt{۲} - \sqrt{۳}) - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲} - ۱)$

$= -\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} + ۱ = ۱$

۴. مجذور a = مربع a $= a^۲$ ؛ ربع a $= \frac{۱}{۴}a$

ثلث a $= \frac{۱}{۳}a$

$\frac{۱}{۴}(۸)^۲ - ۱۳ = \frac{۱}{۳}(۳)^۲ \Rightarrow ۱۶ - ۱۳ = ۳$

۵. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$

$(A \cup B) - (B \cup C) = \{\cancel{a}, \cancel{b}, c, d, \cancel{e}, \cancel{f}, \cancel{g}\}$

$= \{c, d\}$ (۱)

$A - B = \{a, \cancel{b}, c, d\} = \{a, c, d\}$

$(A - B) - C = \{\cancel{a}, c, d\} = \{c, d\}$ (۲)

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) درستی حکم برقرار است.

۶. $A = \{۴ + ۲, ۹ + ۲, ۱۶ + ۲, \dots, ۸۱ + ۲\}$

$= \{۲^۲ + ۲, ۳^۲ + ۲, ۴^۲ + ۲, \dots, ۹^۲ + ۲\}$

$\Rightarrow A = \{n^۲ + ۲ | n \in N, ۲ \le n \le ۹\}$

$B = \left\{\frac{(-۱)^۱}{۱(۱+۱)}, \frac{(-۱)^۲}{۲(۲+۱)}, \frac{(-۱)^۳}{۳(۳+۱)}, \frac{(-۱)^۴}{۴(۴+۱)}, \dots\right\}$

$\Rightarrow B = \left\{\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۲۰}, \dots\right\}$

۷. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با ۲^n و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی (n-۲) عضوی برابر است با $۲^{(n-۲)}$ است.

$۲^n - ۲۴ = ۲^{(n-۲)} \Rightarrow ۲^n - ۲۴ = \frac{۲^n}{۲^۲}$

$\Rightarrow ۴ \times ۲^n - ۹۶ = ۲^n$

$\Rightarrow ۳ \times ۲^n = ۹۶ \Rightarrow ۲^n = ۳۲$

$\Rightarrow ۲^n = ۲^۵ \Rightarrow n = ۵$

۸. $\frac{۷^{۳x} \times (۷^۲)^{x-۲}}{۷^{x-۱} \times (۲ \times ۷)^x} = \frac{۱}{۲^x}$

$\Rightarrow \frac{۷^{۳x} \times ۷^{۲x-۴}}{۷^{x-۱} \times ۲^x \times ۷^x} = \frac{۱}{۲^x}$

$\Rightarrow \frac{۷^{۳x+۲x-۴}}{۷^{x-۱+x} \times ۲^x} = \frac{۱}{۲^x} \Rightarrow \frac{۷^{۵x-۴}}{۷^{۲x-۱} \times ۲^x} = \frac{۱}{۲x}$

با ضرب دو طرف تساوی اخیر در ۲^x داریم:

$\Rightarrow \frac{۷^{۵x-۴}}{۷^{۲x-۱}} = ۱ \Rightarrow ۷^{۵x-۴} = ۷^{۲x-۱} \Rightarrow ۵x - ۴ = ۲x - ۱$

$\Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$

۹. $A = (۲^۲)^n \times ۲^۴ \times ۵^{n-۲} = ۲^{۲n+۴} \times ۵^{n-۲}$

$B = ۲^{۲n} \times (۵ \times ۲)^{۲n-۴}$

$= ۲^{۲n} \times ۵^{۲n-۴} \times ۲^{۲n-۴} = ۲^{۴n-۴} \times ۵^{۲n-۴}$

$\frac{A}{B} = \frac{۲^{۲n+۴} \times ۵^{n-۲}}{۲^{۴n-۴} \times ۵^{۲n-۴}}$

$= ۲^{(۲n+۴)} \times ۲^{-(۴n-۴)} \times ۵^{(n-۲)} \times ۵^{-(۲n-۴)}$

$\Rightarrow \frac{A}{B} = ۲^{-۲n+۸} \times ۵^{-n+۲}$

۱۰. $\sqrt[۳]{۲۷(۲-a)} - \sqrt[۳]{۸(a-۲)}$

$= ۳\sqrt[۳]{۲-a} - ۲\sqrt[۳]{-(۲-a)}$

$= ۳\sqrt[۳]{۲-a} + ۲\sqrt[۳]{۲-a}$

$= ۵\sqrt[۳]{۲-a}$

۱۱. $(x^۲ - ۲x + ۱)(x^۲ + x - ۲)$

$= x^۴ - x^۳ - ۳x^۲ + ۵x - ۲$

با مقایسه‌ی این تساوی و حکم داریم:

$a = ۱, b = -۱, c = -۳, d = ۵, e = -۲$

۱۲. (الف $[(a^۴ + ۴) + ۴a^۲][(a^۴ + ۴) - ۴a^۲] = (a^۴ + ۴)^۲ - (۴a^۲)^۲$

$= (a^۴)^۲ + ۲(a^۴)(۴) + ۴^۲ - ۱۶a^۴$

$= a^۸ + ۸a^۴ + ۱۶ - ۱۶a^۴$

$= a^۸ - ۸a^۴ + ۱۶$

ب) $\left[(x^2+1)-5x\right]\left[(x^2+1)+4x\right]$

$=(x^2+1)^2+(-5x+4x)(x^2+1)+(-5x)(4x)$

$=x^4+2x^2+1-x^3-x-20x^2$

$=x^4-x^3-18x^2-x+1$

۱۳.

الف) $(n^2)^2+(8-4)n^2+(8)(-4)$

$=(n^2+8)(n^2-4)=(n^2+8)(n-2)(n+2)$

ب) $n^4+14n^2-16n^2+49=(n^4+14n^2+49)-16n^2$

$=(n^2+7)^2-16n^2$

$=(n^2+7-4n)(n^2+7+4n)$

ج) $(a^2b-ab^2)+(b^2c-abc)$

$=ab(a-b)-bc(a-b)$

$=(a-b)(ab-bc)$

$=(a-b)\times b\times(a-c)$

د) $(4x^2-9y^2)+(2x-3y)$

$=(2x-3y)(2x+3y)+(2x-3y)$

$=(2x-3y)(2x+3y+1)$

۱۴.

$80\le\frac{MA}{12}\times100\le140\Rightarrow$

$9/6\le MA\le16/8$

حل تشریحی مسائل

ریاضیات سال دوم

۱. ابتدا $f(2,2)$ و $f(3,4)$ را تعیین می‌کنیم:

$f(k,s)=3^k-4s$

$f(3,4)=3^3-4(4)=27-16=11$

$f(2,2)=3^2-4(2)=1$

بنابراین:

$f(f(2,2),f(3,4))=f(1,11)$

$=3^1-4(11)=3-44=-41$

۲. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ چنین است:

$\begin{cases}x-1\ge0\\x-1\ne0\end{cases};\ \begin{cases}x\ge1\\x\ne1\end{cases};\ x>1;\ D_f=(1,+\infty)$

تعیین برد می‌کنیم:

$y=f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\ \underset{=\!=}{(x\in D_f)}\ \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}};$

$\sqrt{x-1}=\frac{1}{y}(y>0);\ x-1=\frac{1}{y^2};\ x=\frac{1}{y^2}+1>;\ \frac{1}{y^2}>0;$

$\begin{cases}y\ne0\\y>0\end{cases};\ R_f=\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$

۳.

$3m^3x=27x+m^2;\ 3m^3x-27x=m^2;\ x=\frac{m^2}{3m^3-27}$

$3m^3-27=0;\ m^3=9;\ m=\sqrt[3]{9},\ D=\mathbb{R}-\left\{\sqrt[3]{9}\right\}$

معادله به ازای هر عدد حقیقی برای m به جز عدد $\sqrt[3]{9}$، دارای جواب است.

۴. برای معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-x-1=0$:

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}=1\\x_1x_2=\frac{c}{a}=-1\end{cases}$

$S=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+x_1^4x_2^4=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}+(x_1x_2)^4$

$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(-1)^3}+1$

$S=\frac{1-3(-1)(1)}{-1}+1=-4+1=-3;\ \boxed{S=-3}$

۵. کسری برابر صفر است که صورت آن صفر باشد. هم‌چنین، ریشه‌های صورت یک معادله‌ی کسری، نباید مخرج را صفر کند:

$x^4-x^2=0;\ x^2(x^2-1)=0;\ x^2=0;\ x^2-1=0$

$x^3+1=0;\ x^3=-1;\ x=-1,\ x^2-3x+2=0;$

$(x-1)(x-2)=0;\ x=1;\ x=2,\ (x^2-1)^2=0;$

$x^2=1;\ x=\pm1,\ x^3+2x^2=0;\ x^2(x+2)=0;$

$x^2=0;\ x=-2$

جواب معادله فقط یک ریشه است: $\boxed{x=2}$

۶. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$\begin{cases}x^2+y^2=100\\2(x+y)=28\end{cases};\ \begin{cases}(x+y)^2-2xy=100\\x+y=14\end{cases};\ \begin{cases}x+y=14\\xy=48\end{cases}$

$z^2-14z+48=0;\ (z-6)(z-8)=0,\ \left|\begin{matrix}x=8\\y=6\end{matrix}\right.;$

$|x-y|=|8-6|=2;\ |x-y|=2$

۷. اگر اعداد متوالی را با $x-1$، x و $x+1$ نمایش دهیم:

$(x-1)x(x+1)=(x-1)+x+(x+1);$

$x(x^2-1)=3x;\ x(x^2-1)-3x=0$

$;\ x(x^2-1-3)=0;$

$x=0;\ x^2-4=0;\ x=\pm2;\ x=2$

چون سه عدد طبیعی هستند، پس $x_1=1$، $x_2=2$ و $x_3=3$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$

۸. با شرط $-1<x<3$:

$\begin{cases}-9x^2-12x<3;\ 9x^2+12x+3>0\\4x^2-12x>0;\ 4x(x-3)>0\end{cases};\ \begin{cases}(3x+1)(x+1)>0\\x(x-3)>0\end{cases}$

x		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		۰		۳	
$(x+۱)(۳x+۱)$	+	۰	−	۰	+		+		+
$x(x-۳)$	+		+		+	۰	−	۰	+
جواب					$-\frac{۱}{۳}<x<۰$ جواب				

۹. با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت:

$$\log_۴(۱-x^۲) = \frac{\log(۱-x^۲)}{\log^۴};$$

$$\frac{\log(۱-x^۲)}{۲\log ۲} \geq \frac{-۱}{۲};\ \ \log(۱-x^۲) \geq -\log ۲ (=\log\frac{۱}{۲});$$

$$\log(۱-x^۲) \geq \log\frac{۱}{۲};\ \ ۱-x^۲ \geq \frac{۱}{۲};\ \ x^۲ \leq \frac{۱}{۲};\ \ |x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰. جمله‌ی nام (عمومی) تصاعد حسابی (عددی) فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_۱ + (n-۱)d$ (جمله‌ی عمومی تصاعد حسابی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=۵:\ a_۵ = a_۱ + ۴d = ۲۳ \\ n=۸:\ a_۸ = a_۱ + ۷d = ۳۸ \end{cases};\ \ a_۸ - a_۵ = ۷d - ۴d = ۱۵;$$

$$۳d = ۱۵\ \ \boxed{d=۵};$$

$$a_۱ = ۲۳ - ۴d = ۲۳ - ۴(۵) = ۳\ \ \boxed{a_۱ = ۳}$$

$$a_۳ = ۳ + (۳-۱)(۵) = ۱۳;\ \ \boxed{a_۳ = ۱۳}$$

۱۱. جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_۱ r^{n-۱}$ (جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=۴:\ a_۴ = a_۱ r^۳ = ۲۴ \\ n=۷:\ a_۷ = a_۱ r^۶ = ۱۹۲ \end{cases};\ \ \frac{a_۷}{a_۴} = \frac{r^۶}{r^۳} = \frac{۱۹۲}{۲۴};$$

$$r^۳ = ۸;\ \boxed{r=۲},\ a_۱ r^۳ = ۲۴;\ a_۱ = \frac{۲۴}{r^۳} = \frac{۲۴}{۸} = ۳;\ \boxed{a_۱ = ۳}$$

$$a_۲ = ۳ \times ۲^{۲-۱} = ۳ \times ۲ = ۶$$

$\boxed{a_۲ = ۶}$ (جمله‌ی دوم تصاعد)

حل تشریحی مسائل

هندسه‌ی (۱)

۱. به نظر می‌رسد که $AB < BC$ است. اما درواقع چنین نیست، بلکه $AB = BC$ است و این موضوع، خطای مشاهده را نشان می‌دهد.

۲. بنا به داده‌های مسئله داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} CD \parallel EF \\ \text{و} \\ AB\ \text{قاطع} \end{array}\right. \Rightarrow D\hat{A}B + A\hat{B}F = ۱۸۰^\circ\ (۱)$$

$$\Rightarrow \frac{D\hat{A}B}{۲} + \frac{A\hat{B}F}{۲} = ۹۰^\circ$$

اما AO نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. یعنی:

$$\frac{D\hat{A}B}{۲} = O\hat{A}B,\ \frac{A\hat{B}F}{۲} = O\hat{B}A \qquad (۲)$$

پس از رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = ۹۰^\circ \qquad (۳)$$

اما در مثلث OAB داریم:

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = ۱۸۰^\circ \qquad (۴)$$

از رابطه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود:

$$A\hat{O}B + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

۳. دو مثلث MBD و MCE به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، $\hat{B} = \hat{C}$ است. و چون M وسط ضلع BC است، پس $MB = MC$. از طرف دیگر، بنا به فرض مسئله $BD = CE$ است. بنابراین، دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.

۴. داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۱۴ \Rightarrow n(n-۳) = ۲۸ \Rightarrow n^۲ - ۳n - ۲۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (n-۷)(n+۴) = ۰ \Rightarrow n-۷ = ۰ \Rightarrow n = ۷,\ \ n+۴ = ۰$$

$$\Rightarrow n = -۴ < ۰$$

اما مجموع زاویه‌های درونی هر nضلعی محدب مساوی $(۲n-۴)$ قائمه یا $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است. پس برای ۷ ضلعی محدب داریم:

$$\text{مجموع زاویه‌های درونی} = (۷-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۹۰۰^\circ$$

۵. الف) ضلع‌های مربع با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$y+۸ = ۲x+۴ = z+۷ = ۱۲ \Rightarrow y = ۴,\ \ x = ۴,\ \ z = ۵$$

ب) هر قطر مربع، نیم‌ساز زاویه‌های آن است و هر زاویه‌ی مربع نیز ۹۰° است. پس داریم:

$۲x + y = ۴۵^\circ\ (۲)$ و $(۱)\ ۴x + z = ۹۰^\circ$

و $x + ۵y = ۴۵^\circ\ (۳)$

از حل دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی تشکیل شده از رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$x = ۲۰^\circ,\ \ y = ۵^\circ,\ \ z = ۱۰^\circ$$

۶. الف) چهارضلعی BEDF متوازی‌الاضلاع است. زیرا ثابت می‌کنیم که دو ضلع روبه‌روی آن یعنی BE و DF موازی و مساوی‌اند. چون چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس $AB \parallel CD$ و $AB = CD$ است.

درنتیجه $BE \parallel DF$ است. از طرف دیگر:

$$BE = \frac{AB}{۲} = \frac{CD}{۲} = FD \Rightarrow BE = DF$$

از متوازی‌الاضلاع بودن BEDF نتیجه می‌شود که BF موازی DE است.

نکته: این فرض مسئله را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد. از آن جمله می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی BEDF دوبه‌دو مساوی‌اند و یا می‌توانیم ثابت کنیم که $B\hat{F}C = E\hat{D}F$ است.

ب) دو مثلث APE و CFQ به حالت «زض ز» هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$$AE = CF\ \ \text{و}\ \ Q\hat{C}F = P\hat{A}E\ \ \text{و}\ \ C\hat{F}Q = A\hat{E}P$$

درنتیجه (۱) $AP = CQ$ است.

اما در مثلث CDP از نقطه‌ی F وسط CD خطی موازی DP رسم شده است. پس این خط از وسط ضلع دیگر، یعنی از وسط CP می‌گذرد. یعنی (۲) $PQ = CQ$ است. از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

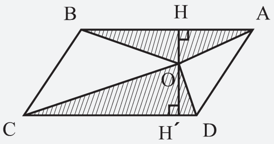
$AP = PQ = QC$.

نکته: این مسئله، در کتاب کار هندسه‌ی ۱ از انتشارات مدرسه، به روش دیگری حل شده است.

۷. کافی است ثابت کنیم که:

$$S_{OAD} + S_{OBC} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

زیرا متوازی‌الاضلاع ABCD به این چهار مثلث افراز شده است. برای اثبات، از O خطی عمود بر دو ضلع موازی AB و CD از متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم تا AB را در H و



CD را در H' قطع کند. می‌دانیم که HH' ارتفاع متوازی‌الاضلاع است. بنابراین داریم:

$$S_{ABCD} = AB \times HH' \qquad (۱)$$

$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲} OH.AB \qquad (۲)$$

$$S_{OCD} = \frac{۱}{۲} OH'.CD = \frac{۱}{۲} OH'.AB \qquad (۳)$$

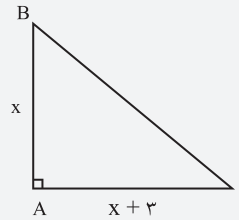
و

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲} AB(OH + OH') = \frac{۱}{۲} AB.HH' \qquad (۴)$$

$$(۱),\ (۴) \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

و حکم مسئله ثابت شد.

۸. ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را x فرض می‌کنیم. در این صورت، بنابه فرض، ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه $x + ۳$ خواهد بود. از آن‌جا داریم:



مثلث $S = \frac{۱}{۲} AB.AC \Rightarrow ۲۳۰ = \frac{۱}{۲} \times x(x + ۳)$

$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۴۶۰ = ۰$

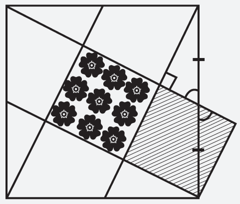
$\Rightarrow (x + ۲۳)(x - ۲۰) = ۰$

$\Rightarrow x = -۲۳ < ۰,\ \ x = ۲۰$ ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه

$\Rightarrow x + ۳ = ۲۰ + ۳ = ۲۳$ ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه

$\Rightarrow BC = \sqrt{۲۰^۲ + ۲۳^۲} = \sqrt{۹۲۹}$ اندازه‌ی وتر

۹. چهار ذوزنقه با هم و چهار مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و اگر یک ذوزنقه و یک مثلث را کنار هم قرار دهیم، یک مربع حاصل می‌شود. یعنی مجموع مساحت هر ذوزنقه و هر مثلث، مساوی مساحت مربع ایجاد شده برای درخت‌کاری است. بنابراین، مربع بزرگ به پنج مربع کوچک و مساوی تقسیم شده است. یعنی مساحت هر مربع کوچک، با یک پنجم مساحت



مربع بزرگ مساوی است. پس مساحت قسمت درخت‌کاری شده مساوی $\frac{۱}{۵} \times ۲۰^۲ = \frac{۱}{۵} \times ۴۰۰ = ۸۰$ است. مساحت قسمت چمن‌کاری شده نیز مساوی $۴۰۰ - ۸۰ = ۳۲۰$ است. از آن‌جا، هزینه‌ی چمن‌کاری برابر است با:

$۳۲۰ \times ۳۰۰۰ = ۹۶۰۰۰۰$ تومان

۱۰. الف) داریم:

$$\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴} \Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{-b}{-۳} = \frac{c}{۴} \Rightarrow \frac{a - b + c}{۲ - ۳ + ۴} = \frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a - b + c}{۳} = \frac{a}{۲}$$

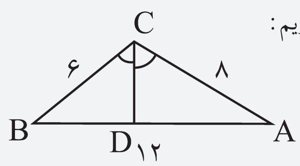
ب) واسطه‌ی هندسی بین $\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ را x می‌نامیم. داریم:

$$x^۲ = ۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

حل تشریحی مسائل

هندسه‌ی (۲)

۱. ضلع‌های مثلث را $AB = ۱۲$، $BC = ۶$ و $AC = ۸$ می‌گیریم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث، زاویه‌ای است که روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع مثلث، یعنی در این شکل، زاویه‌ی $\hat{C}$ است. بنابراین، نیم‌ساز این زاویه را رسم می‌کنیم و CD می‌نامیم. می‌خواهیم اندازه‌ی پاره‌خط‌های DA و DB را تعیین کنیم. داریم:



$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{۸}{۶} \Rightarrow \frac{DA}{DA + DB} = \frac{۸}{۶ + ۸} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{۸}{۱۴}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{۱۲} = \frac{۸}{۱۴} \Rightarrow DA = \frac{۱۲ \times ۸}{۱۴} = \frac{۴۸}{۷} \Rightarrow DB = AB - DA$$

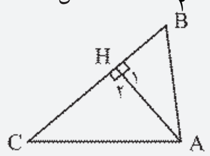
$$\Rightarrow DB = ۱۲ - \frac{۴۸}{۷} = \frac{۳۶}{۷}$$

۲. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{۲x + ۴}{۱۵} = \frac{۳x + ۱۰}{۲۵} \Rightarrow ۵۰x + ۱۰۰ = ۴۵x + ۱۵۰$$

$$\Rightarrow ۵x = ۵۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

۳. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و یکی از ارتفاع‌های این مثلث، مثلاً ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $AH < \frac{۱}{۲}(AB + AC)$ (شکل).



در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHB و AHC $(\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ)$ داریم:

$$AH < AB \qquad (۱)$$

$$AH < AC \qquad (۲)$$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲AH < AB + AC \Rightarrow$$

$$AH < \frac{۱}{۲}(AB + AC)$$

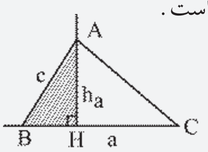
و حکم ثابت است.

۴. بنا به نامساوی مثلثی باید داشته باشیم:

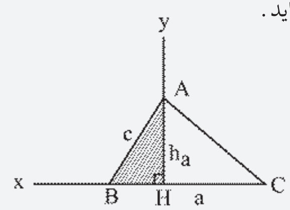
$$|۲۳ - ۱۷| < x - ۱ < ۲۳ + ۱۷ \Rightarrow$$

$$۶ < x - ۱ < ۴۰ \Rightarrow ۷ < x < ۴۱.$$

۵. الف) فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است. ارتفاع AH از این مثلث را رسم می‌کنیم. چون $AB = c$، $AH = h_a$ و $\hat{H} = ۹۰^\circ$ است، پس مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است.

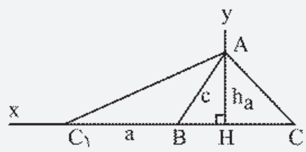


از طرف دیگر، طول پاره‌خط $BC = a$ نیز مشخص است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH را با معلوم بودن وتر $AB = c$ و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم (زاویه‌ی $x\hat{H}y = ۹۰^\circ$ را رسم می‌کنیم. روی Hy پاره‌خط $HA = h_a$ را جدا می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید.

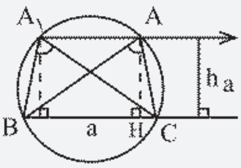


به مرکز A و به شعاع C کمانی رسم می‌کنیم تا Hx را در نقطه‌ی B قطع کند). اکنون $BC = a$ را روی خط Hx مشخص می‌کنیم تا رأس C به‌دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.

نکته: پاره‌خط $BC = a$ را در دو طرف رأس B روی خط BH می‌توان جدا کرد که دو جواب مسئله، یکی مثلث ABC با زاویه‌های حاده و دیگری مثلث $ABC_۱$ با زاویه‌ی منفرجه‌ی $A\hat{B}C$ است. اگر مسئله شرطی برای نوع مثلث قرار نداده باشد، هر دو جواب قابل قبول هستند.

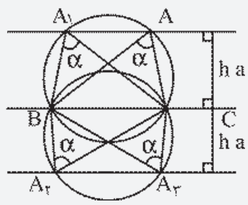


ب) مسئله را حل شده و مثلث ABC با معلومات $BC = a$ ، $\hat{A} = \alpha$ و $AH = h_a$ را جواب مسئله می‌گیریم. چون $C\hat{A}B = \alpha$ معلوم و پاره‌خط BC، $BC = a$ نیز معلوم است، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی پاره‌خط معلوم $BC = a$ است. از طرف دیگر، چون $AH = h_a$ مقدار معلومی است، پس یک مکان هندسی دیگر رأس A، دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن هستند. پس برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی این پاره‌خط را رسم می‌کنیم.



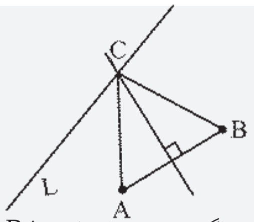
سپس خطی موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن را که در طرف کمان درخور واقع است، رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این خط و کمان درخور رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

نکته‌ی ۱. با رسم کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ در دو طرف پاره‌خط BC، و رسم دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC، چهار مثلث جواب مسئله به‌دست می‌آید (ABC، $A_۱BC$ ، $A_۲BC$ و $A_۳BC$) که هم‌نهشت هستند. پس مسئله درواقع یک جواب متمایز ABC را دارد.

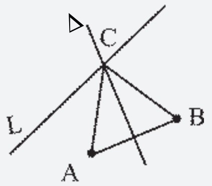


نکته‌ی ۲. شرط جواب مسئله آن است که خطی که به موازات BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC رسم می‌شود، کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط $BC = a$ را قطع کند. اگر این خط، کمان درخور را در دو نقطه‌ی A و $A_۱$ قطع کند، دو مثلث هم‌نهشت ABC و $A_۱BC$ جواب مسئله‌اند و اگر این خط مماس بر کمان درخور باشد، نقطه‌ی تماس A رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسئله است. اگر این خط مکان هندسی، کمان درخور را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

۶. مسئله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $ABC(CA = CB)$ را جواب مسئله فرض می‌کنیم. چون $CA = CB$ است، پس رأس C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. از طرف دیگر، رأس C روی خط L است. پس این نقطه، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط L است. بنابراین، برای حل مسئله، از A به B وصل و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. آن را Δ می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد Δ و L، رأس C از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(CA = CB)$ جواب مسئله است.

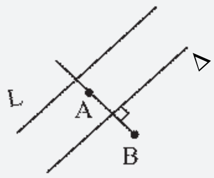


بحث. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط Δ ، خط L را تنها در یک نقطه مانند C قطع کند، مسئله تنها یک جواب دارد (شکل الف).



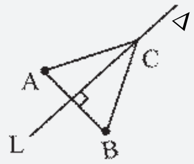
الف

۲. اگر خط Δ موازی خط L باشد، مسئله جواب ندارد و این در صورتی است که AB بر L عمود باشد (شکل ب).



ب

۳. اگر خط Δ بر خط L منطبق شود، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا از هر نقطه‌ی L به A و B وصل کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است (شکل پ).

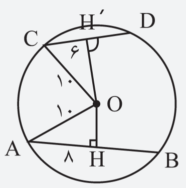


پ

۷. فرض می‌کنیم وترها $AB = ۱۶Cm$ و $CD = ۱۲Cm$ باشند. از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به‌ترتیب بر AB و CD رسم و از O به A و C نیز وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که قطر عمود بر هر وتر عمود منصف آن وتر است، پس

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸Cm$$

$$CH' = \frac{CD}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶Cm$$



از آن‌جا با توجه به این که $OA = OC = ۱۰$ است، در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH و $COH'(\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ)$ داریم:

$$OH = \sqrt{OA^۲ - AH^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = \sqrt{۳۶} = ۶cm$$

$$OH' = \sqrt{OC^۲ - CH'^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸cm$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

۸. از O به T و T' وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OMT(\hat{T} = ۹۰^\circ)$ داریم:

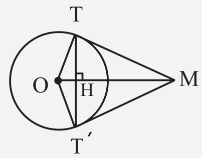
$$OT^۲ + MT^۲ = OM^۲ \Rightarrow ۲۲۵ + MT^۲ = ۶۲۵$$

$$\Rightarrow MT^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow MT = ۲۰$$

$$OT^۲ = OH.OM \Rightarrow ۲۲۵ = OH.۲۵ \Rightarrow OH = ۹$$

$$O\overset{\Delta}{T}H: OH^۲ + TH^۲ = OT^۲ \Rightarrow ۸۱ + TH^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow TH = ۱۲$$

$$TT' = ۲TH = ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$



۹. می‌دانیم که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$AM = AQ = ۲x + ۱,\ \ BN = BM = ۱۰,$$

$$CN = CP = ۴x + ۱,\ \ DP = DQ = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{محیط چهار ضلعی} = ۲(AQ + BM + CN + DP)$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۵۲ = ۲(۲x + ۱ + ۱۰ + ۴x + ۱ + ۱۰) \Rightarrow ۶x + ۲۲ = ۵۲$$

$$\Rightarrow ۶x = ۳۰ \Rightarrow x = ۵$$

۱۰. داریم:

الف) $x = \hat{A} = ۷۰^\circ,\ \ \overset{\frown}{CD} = ۱۴۰^\circ,\ \ \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ,$

$$\overset{\frown}{BC} + ۱۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۴۰^\circ \Rightarrow y = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۲۰^\circ$$

$$\hat{M} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۸۰^\circ,\ \ \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} + z}{۲}$$

$$\Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۴۰^\circ + z}{۲} \Rightarrow z = ۱۲۰^\circ$$

ب) $z = \overset{\frown}{BC} = B\hat{O}C = ۸۰^\circ,\ \ x = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ,$

$$y = ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۱۶۰^\circ$$

حل تشریحی مسائل

جبر و احتمال

۱. الف) $n = ۱:\ \frac{۱}{۲^۱} = \frac{۲^۲ - ۱ - ۲}{۲^۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

(فرض استقرا) $n = k:\ \frac{۱}{۲^۱} + \frac{۲}{۲^۲} + \ldots + \frac{k}{۲^k} = \frac{۲^{k+۱} - k - ۲}{۲^k}$

(حکم استقرا) $n = k + ۱:\ \underbrace{\frac{۱}{۲^۱} + \frac{۲}{۲^۲} + \ldots + \frac{k}{۲^k}}_{\frac{۲^{k+۱} - k - ۲}{۲^k}} + \frac{k + ۱}{۲^{k+۱}}$

$$= \frac{۲^{k+۲} - (k + ۱) - ۲}{۲^{k+۱}}$$

$$\frac{۲^{k+۱} - k - ۲}{۲^k} + \frac{k + ۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲(۲^{k+۱} - k - ۲) + k + ۱}{۲^{k+۱}}$$

$$= \frac{۲^{k+۲} - ۲k - ۴ + k + ۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲^{k+۲} - (k + ۱) - ۲}{۲^{k+۱}}$$

ب) $n = ۱:\ \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} > ۱ \Rightarrow \frac{۱۳}{۱۲} > ۱$

فرض: $n = k:\ \frac{۱}{k + ۱} + \frac{۱}{k + ۲} + \frac{۱}{k + ۳} + \ldots + \frac{۱}{۳k + ۱} > ۱$

حکم: $n = k + ۱:\ \frac{۱}{k + ۲} + \frac{۱}{k + ۳} + \ldots + \frac{۱}{۳k + ۱} + \frac{۱}{۳k + ۲}$

$$+ \frac{۱}{۳k + ۳} + \frac{۱}{۳k + ۴} > ۱$$

برای اثبات حکم، ابتدا عبارت $\frac{۱}{۳k + ۲} + \frac{۱}{۳k + ۳} + \frac{۱}{۳k + ۴}$ را به دو طرف فرض اضافه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{k + ۱} + \frac{۱}{k + ۲} + \frac{۱}{k + ۳} + \ldots + \frac{۱}{۳k + ۱} + \frac{۱}{۳k + ۲} + \frac{۱}{۳k + ۳}$$

$$+ \frac{۱}{۳k + ۴} > ۱ + \frac{۱}{۳k + ۲} + \frac{۱}{۳k + ۳} + \frac{۱}{۳k + ۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{k + ۲} + \frac{۱}{k + ۳} + \frac{۱}{k + ۴} + \ldots + \frac{۱}{۳k + ۴} > ۱ + \frac{۱}{۳k + ۲}$$

$$+ \frac{۱}{۳k + ۳} + \frac{۱}{۳k + ۴} - \frac{۱}{k + ۱}$$

از مقایسه‌ی این حکم با حکم استقرا نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$۱ + \frac{۱}{۳k + ۲} + \frac{۱}{۳k + ۳} + \frac{۱}{۳k + ۴} - \frac{۱}{k + ۱} \geq ۱$$

و یا این‌که:

$$\frac{۱}{۳k + ۲} + \frac{۱}{۳k + ۴} \geq \frac{۱}{k + ۱} - \frac{۱}{۳k + ۳} = \frac{۱}{k + ۱} - \frac{۱}{۳(k + ۱)}$$

$$= \frac{۲}{۳(k + ۱)}$$

و به کمک روش بازگشتی نتیجه می‌شود:

$$\frac{۶k + ۶}{(۳k + ۲)(۳k + ۴)} \geq \frac{۲}{۳(k + ۱)} \Rightarrow \frac{۶(k + ۱)}{۹k^۲ + ۱۸k + ۸} \geq \frac{۲}{۳(k + ۱)}$$

$$\Rightarrow ۹(k + ۱)^۲ \geq ۹k^۲ + ۱۸k + ۸$$

$$\Rightarrow ۹k^۲ + ۱۸k + ۹ \geq ۹k^۲ + ۱۸k + ۸ \Rightarrow ۹ \geq ۸$$

نامساوی آخر درست است و همه‌ی مراحل نیز بازگشت‌پذیرند. در نتیجه حکم استقرار ثابت می‌شود:

ج) $n = ۱:\ ۳^۱ + ۴ + ۵ = ۱۲ = ۴r \qquad (r = ۱)$

فرض: $n = k:\ ۳^{۲k-۱} + ۴k + ۵ = ۴r$

حکم: $n = k + ۱:\ ۳^{۲k+۱} + ۴(k + ۱) + ۵ = ۴r'$

دو طرف فرض را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$۳^۲(۳^{۲k-۱} + ۴k + ۵) = ۳۶r \Rightarrow ۳^{۲k+۱} + ۳۶k + ۴۵ = ۳۶r$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1} + 4(k+1) + 5 = 36r - 32k - 36$$
$$= 4(\underbrace{9r - 8k - 9}_{r'}) = 4r'$$

۲.

$$a = 5k + 3 \Rightarrow a^3 = (5k+3)^3 = 125k^3 + 225k^2 + 135k + 27$$
$$= 5(\underbrace{25k^3 + 45k^2 + 27k + 5}_{k'}) + 2 = 5k' + 2$$

بنابراین a^3 در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

۳. $(a^2+1)(b^2+1) \geq 4ab \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2ab + 1) + (a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (ab-1)^2 + (a-b)^2 \geq 0$$

نابرابری آخر درست است، زیرا مربع‌های کامل نامنفی‌اند و مجموع آن‌ها نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۴. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ مخالف ۲ نباشد، بنابراین:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

این نتیجه با فرض مسئله $(a \neq b)$ مغایرت دارد.

۵. اثبات به کمک برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ عددی گویا باشد:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \in Q \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{a}{b},\ \ a,b \in Z,\ \ b \neq 0,\ \ a \neq 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{2} + \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow$$
$$5 = \left(\sqrt{2} + \frac{a^3}{b^3}\right)^2 = 2 + \frac{a^6}{b^6} + \frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3}$$
$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3} = 3 - \frac{a^6}{b^6} = \frac{3b^6 - a^6}{b^6}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3b^6 - a^6}{2a^3b^3} = \frac{a'}{b'}$$
$$a', b' \in Z\ ,\ \ b' \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$$

نتیجه‌ی آخر مخالف فرض گنگ بودن $\sqrt{2}$ است.

۶. کارمندان در دو جنس زن و مرد هستند و در سه بخش گوناگون کار می‌کنند و سه نوع مدرک تحصیلی دارند. بنابراین، طبق اصل ضرب $(18 = 3 \times 3 \times 2)$ هجده نوع کارمند (از نظر جنس و نوع کار و مدرک تحصیلی) وجود دارد. و وقتی نوزده کارمند داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری، دو تای آن‌ها باید از یک نوع باشند. یعنی جنسیت و بخش کاری و مدرک تحصیلی یکسان دارند.

۷. معادله‌ی درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشند:

$$S = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2,\ \ P = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$
$$\Rightarrow x^2 - Sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$A = \left\{x \middle| x^2 - 2x - 2 = 0\right\}$$

۸.

$$\frac{6}{x-4} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow$$
$$x = -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \ B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

حل تشریحی مسائل

حسابان

۱.

$$\left|[x]\right| - 1 \neq 0 \Rightarrow \left|[x]\right| \neq 1 \Rightarrow \begin{cases}[x] = 1 \\ [x] = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 \leq x < 2 \\ -1 \leq x < 0\end{cases}$$

(یا)

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left([-1, 0) \cup [1, 2)\right)$$

۲.

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 12 \ \text{و}\ \ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$$

می‌دانیم: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2$

درنتیجه: $(-p)^2 = 1^2 + (4 \times 12) = 49 \Rightarrow p = \pm 7$

۳. می دانیم $1 \in D_f$ و $f(-1) = -3 - k$ و $f(1) = 3 - k$

چون f فرد است، پس: $f(1) = -f(-1)$.

$$3 - k = -(-3 - k) \Rightarrow \boxed{k = 0}$$

۴. فرض کنیم: $x_1 \leq x_2$، در این صورت:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^3 + 2x_1}{1 + x_1^2} - \frac{x_2^3 + 2x_2}{1 + x_2^2}$$
$$= \frac{(x_1^3 + 2x_1)(1 + x_2^2) - (x_2^3 + 2x_2)(1 + x_1^2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$$
$$= \frac{x_1^3 + x_1^3x_2^2 + 2x_1 + 2x_1x_2^2 - x_2^3 - x_2^3x_1^2 - 2x_2 - 2x_2x_1^2}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) + x_1^2x_2^2(x_1 - x_2) + 2(x_1 - x_2) - 2x_1x_2(x_1 - x_2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 2 - 2x_1x_2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2x_2^2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2)}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} \leq 0$$

توجه کنید که عبارت $(x_1x_2)^2 - (x_1x_2) + 2$ همواره مثبت است. بنابراین تابع f صعودی است.

۵. می‌توانیم بنویسیم:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}))$$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$

۶. الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+(x^2-1)}{\sin(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+x+1)}{\sin(x-1)}$$
$$=(\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sin(x-1)})(\lim_{x\to 1}(x^2+2x+2))$$
$$=1\times 5=5$$

ب)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{4\sin^4\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sin\frac{x}{2}\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}=-\infty$$

۷. با توجه به این که:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to -1}f(x)=+\infty$$

پس خط‌های $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم نمودار f هستند.

اما:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{\left|1-\frac{1}{x^2}\right|}}=+\infty$$

بنابراین، نمودار f مجانب افقی ندارد.

۸. می‌دانیم که:

$$0\le\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

چون:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$$

بنابر قضیه‌ی فشردگی:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=0$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(f(x)-\frac{1}{2})=0$$

یعنی:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$$

پس f در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

تفریح اندیشه

تقسیم زیرکانه

سه نفر به نام‌های A، B و C به سراغ زیرکی می‌آیند و از او می‌پرسند؛ از ریاضیات چه میدانی؟

او می‌گوید: در این هنر سرآمد روزگارم.

A چهار هزار تومان به زیرک می‌دهد که بین آن‌ها تقسیم کند.

او دو هزار تومان به B و دو هزار تومان به C می‌دهد و می‌گوید، آقای A باید صبر کند تا پول دیگری به دستم برسد و فعلاً برای او پولی ندارم.

A سخت عصبانی می‌شود و می‌گوید: این چه حسابی است؟

زیرک می‌گوید: از نظر من کاملاً صحیح است، چون مجموعه‌های $\{A,B,C\}$ دامنه و مجموعه‌ی $\{0,2\}$ برد تابع زیر است.

$f(A)=0$ و $f(B)=f(C)=2$

و این به‌درستی یک تابع است.