

مسائل برای حل

● میرشهرام صدر

ریاضی سال اول

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 2) =$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

۱۲. با استفاده از اتحادها، حاصل هر عبارت را بیابید.

الف) $(a^4 + 4a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 4)$

ب) $(x^2 + 1 - 5x)(x^2 + 1 + 4x)$

۱۳. هر یک از عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

الف) $n^4 + 4n^2 - 32$

ب) $n^4 - 2n^2 + 49$

ج) $a^2b + b^2c - ab^2 - abc$

د) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

۱۴. IQ افراد مختلف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

که در آن MA سن هوشی و CA سن تقویتی افراد است. در صورتی که $140 \leq IQ \leq 180$ برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سن هوشی را به دست آورید.

مشخص کنید.

$$A = \{6, 11, 18, \dots, 83\}$$

$$B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

۷. فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی است، چنانچه ۲ عضو از اعضای A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۴ تا کم می‌شود، تعداد اعضای A را مشخص کنید.

۸. معادله‌ی توانی زیر را حل کنید.

$$\frac{v^{3x} \times 49^{x-2}}{v^{x-1} \times 14^x} = \frac{1}{2^x}$$

۹. اگر $A = 4^n \times 2^4 \times 5^{n-2}$ و $B = 2^{2n} \times 10^{2n-4}$ چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است.

۱۰. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt{2}a - \sqrt{18a} - 16$$

۱۱. با توجه به برابری زیر، حاصل $a + b + c + d + e$ را پیدا کنید.

۱. مقدار a را چنان بیابید که عدد گویای

$$\frac{a}{2} \text{ بین دو عدد } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{5} \text{ باشد.}$$

۲. با شرط $x < -1$ ، حاصل $\sqrt{x^2} + |1-x|$ را بیابید.

۳. ساده شده‌ی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1|$$

۴. جمله‌ی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.
«اگر از ربع مربع عدد ۸، ۱۳ واحد کم کنیم، حاصل برابر با ثلث مجذور ۳ می‌شود.»

۵. فرض کنید $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{b, e, f, g\}$ و $C = \{a, b, f, h\}$ ، درستی رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید.

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

۶. مجموعه‌ای را که با اعضا مشخص شده است، با نماد ریاضی و مجموعه‌ای را که با نماد ریاضی مشخص شده است، با اعضایش

● محمد رضا هاشمی موسوی

ریاضیات سال دوم

۸. مجموعه‌ی جواب‌های مشترک دو نامعادله‌ی زیر را با شرط $-1 < x < 3$ تعیین کنید:

۹. از رابطه‌ی $\log_2(1-x^2) \geq \frac{-1}{y}$ ، حدود $|x|$ را تعیین کنید.

۱۰. در یک تصاعد حسابی (عددی) جمله‌ی پنجم ۲۳ و جمله‌ی هفتم ۳۸ است، جمله‌ی سوم آن را تعیین کنید.

۱۱. اگر در یک تصاعد هندسی، جمله‌ی چهارم ۲۴ و جمله‌ی هفتم ۱۹۲ باشد، جمله‌ی دوم آن را بیابید.

۵. تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$\frac{(x^4 - x^2)(x^3 + 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x^3 + 2x^2)(x^2 - 1)^2} = 0$$

۶. اندازه‌ی مجذور قطر مستطیلی برابر ۱۰۰ است. در صورتی که اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر ۲۸ باشد، قدر مطلق تفاضل طول و عرض مستطیل را بیابید.

۷. اگر مجموع و حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، مجموع مربعات آن سه عدد را بیابید.

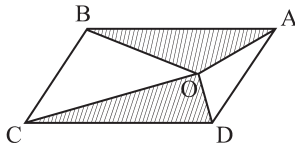
۱. اگر $f(k, s) = 3^k - 4s$ ، آن‌گاه حاصل $f(f(2, 2), f(3, 4))$ را بیابید.

۲. دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ را بیابید.

۳. معادله‌ی $3m^3x = 27x + m^2$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

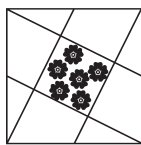
۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 = x + 1$ باشند، مقدار عبارت $S = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + x_1^4 x_2^4$ را بیابید.

هندسه ۱



۸. یک ضلع زاویه‌ای قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سه واحد بیش‌تر از ضلع دیگر زاویه‌ای قائمه است. اگر مساحت این مثلث ۲۳۰ واحد سطح باشد، طول ضلع‌های این مثلث را به دست آورید.

۹. در یک باغچه به شکل مربع و به ضلع ۲۰ متر، از هر رأس به وسط ضلع مقابلش وصل کرده‌ایم.



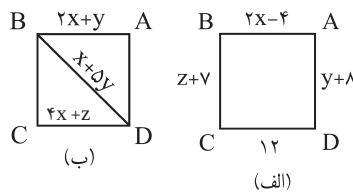
قسمت وسط را درخت و بقیه‌ی باغچه را چمن کاشته‌ایم. مساحت قسمت چمن کاری شده چه مقدار است؟ در صورتی که قیمت هر مترمربع چمن ۳۰۰۰ تومان باشد، هزینه‌ی چمن کاری چه قدر است؟

۱۰. الف) در جاهای خالی، حروف یا عددهای مناسب بنویسید.

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a-b+c}{\dots} = \frac{\dots}{2}$$

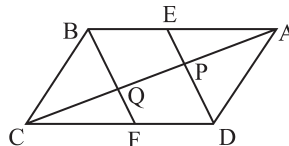
ب) واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ را تعیین کنید.

چندضلعی را بیابید.
۵. اندازه‌ی x ، y و z را در هر یک از مدل‌های (الف) و (ب) تعیین کنید.



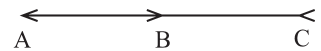
۶. نقطه‌های E و F وسط ضلع‌های AB و CD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را به ترتیب به رأس‌های D و B وصل می‌کنیم تا قطر AC از متوازی‌الاضلاع را در P و Q قطع کنند. ثابت کنید:

الف) BF موازی DE است.
ب) $AP = PQ = QC$

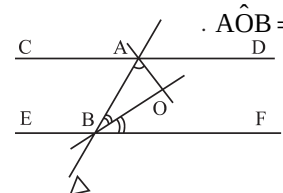


۷. نقطه‌ی O واقع در درون متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را به رأس‌های A ، B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید:
 $S_{OAD} + S_{OBC} = S_{OAB} + S_{OCD}$

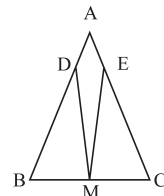
۱. در شکل زیر اندازه‌های دو پاره خط AB و BC نسبت به هم چگونه‌اند؟



۲. خط مورب Δ دو خط موازی CD و EF را به ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده است. OA نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. ثابت کنید



۳. نقطه‌ی M وسط قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC ، و $BD = CE$ است (شکل). اگر از M به D و E وصل کنیم، ثابت کنید دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.

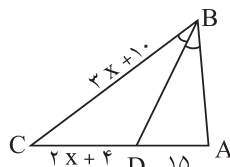


۴. تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب ۱۴ است. مجموع زاویه‌های درونی این

هندسه ۲

۴. سه پاره خط به طول‌های ۱۷، $x-1$ ، ۲۳ داده شده‌اند. حدود x را چنان بیابید که این سه پاره خط، ضلع‌های یک مثلث باشند.
۵. مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید:

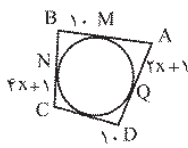
الف) $AH = ha$ و $BC = a$ ، $AB = c$
ب) $AH = ha$ و $\hat{A} = \alpha$ ، $BC = a$



۳. ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر هر ضلع، از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

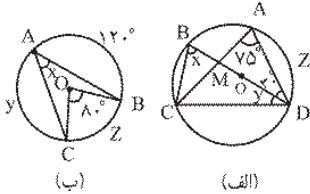
۱. سه ضلع مثلثی ۱۲، ۶ و ۸ سانتی‌مترند، اندازه‌ی پاره خط‌هایی را که نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث روی ضلع روبه‌رویش ایجاد می‌کند، تعیین کنید.

۲. در شکل داده شده، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.

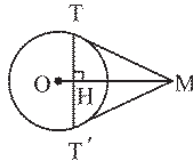


۱۰. اندازه‌ی X ، Y و Z را در هر یک از

شکل‌های زیر تعیین کنید.



پاره خط TT' را در نقطه‌ی H قطع کند، اندازه‌ی پاره خط‌های TH ، OH ، MT و TT' را تعیین کنید.



۹. اگر نصف محیط چهارضلعی محیطی $ABCD$ برابر 52 سانتی متر باشد، اندازه‌ی X را تعیین کنید (شکل).

۶. دو نقطه‌ی A و B و خط L داده شده‌اند. مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که رأسش روی L و قاعده‌اش پاره خط AB باشد.
۷. در دایره‌ی C به شعاع 10 سانتی متر، دو وتر به طول‌های 16 سانتی متر و 12 سانتی متر رسم کرده‌ایم. نسبت فاصله‌های مرکز دایره از این دو وتر را تعیین کنید.

۸. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی 25 از مرکز دایره‌ی (O) قرار دارد، دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر OM

● هوشنگ شرقی

جبر و احتمال

به کارند که مدرک‌های تحصیلی آن‌ها دیپلم، فوق دیپلم و لیسانس است. ثابت کنید حداقل دو نفر از این کارمندان هم جنس و هم مدرک هستند و در یک بخش کار می‌کنند.
۷. مجموعه‌ی زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$$

۸. مجموعه‌ی $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{6}{x-4} < -1\right\}$ را با اعضای خود نمایش دهید.

۳. درستی نابرابری زیر را برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$$

۴. ثابت کنید، اگر a و b دو عدد حقیقی غیر

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \neq 2, a \neq b$$

۵. ثابت کنید، اگر بدانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ

است، $\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۶. در یک اداره، نوزده کارمند زن و مرد در بخش‌های رایانه، حسابداری و بازرگانی مشغول

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید: $(n \in \mathbb{N})$

$$\text{الف) } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + 1}{2n^2}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

$$\text{ج) } 3^{2n-1} + 4n + 5 = 4r \quad (r \in \mathbb{Z})$$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، هرگاه عدد طبیعی a در تقسیم بر 5 باقی‌مانده‌ی 3 داشته باشد، مکعب آن در تقسیم بر 5 ، باقی‌مانده‌ی 2 دارد.

● مجتبی رفیعی

حسابان

۷. مجانب‌های نمودار تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{|x^2 - 1|}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

۸. ثابت کنید تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

پیوسته است.

ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{1+x^2}$ صعودی است. ۵. ثابت کنید:

$$1 + \sin \alpha + \cos \alpha = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

۶. حد توابع زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{\sin(x-1)}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{1 - \cos x}}$$

۱. دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-1}$ را پیدا کنید.

۲. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + px + 12 = 0$ باشند. p را چنان بیابید که $x_1 - x_2 = 1$.

۳. فرض کنید x عددی حقیقی و تابع $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x$ فرد باشد. k را پیدا کنید.

۴. ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با