

معادله های سیاله

و روش های حل آن ها

اشاره

در قسمت قبل، به کاربردهای هم نهشتی در حل مسئله هایی در سطح المپیاد اشاره کردیم. در این قسمت می کوشیم، ابتدا روش های حل معادله های سیاله را بیاوریم و سپس روش های جدید حل معادله های دیوفانتی چند متغیره را که بر پایه ی هم نهشتی است، ارائه دهیم. از آن جا که بسیاری از مسئله های علوم پایه (ریاضی، فیزیک، شیمی و...) به یک معادله ی جبری چند متغیره می انجامد، اهمیت روش های حل معادله های سیاله ی چند متغیره به وضوح روشن می شود.

معادله های سیاله

می دانیم، بسیاری از مسئله های جبر به معادله هایی می انجامد که تعداد مجهول های مسئله، بیش از تعداد معادله های مربوط به آن است. از لحاظ تاریخی، این گونه مسئله ها از زمان دیوفانت مطرح بوده اند و به همین مناسبت به آن ها «معادله های دیوفانتی» می گویند. از طرف دیگر، بسیاری از مسئله های فیزیک، شیمی و دیگر رشته ها، به حل یکی از انواع درجه n ام معادله های سیاله منجر می شود که هیچ الگوریتمی برای حل آن ها وجود ندارد. در حال حاضر نیز این گونه معادله ها در مسابقه ها و المپیادها، به عنوان مسئله هایی مستقل دیده می شوند. بنابراین، حل و بحث در مورد معادله های سیاله، بسیار ضروری به نظر می رسد.

اگرچه تا به حال به جز در مورد معادله های سیاله ی درجه اول دو مجهولی و یا بعضی از نوع های دیگر، فقط راه حل های عمومی و کلی ذکر شده است، ولی در واقع ذوق و ابتکار هر شخص، بیش از هر قاعده ای می تواند وسیله ای برای حل این گونه معادله ها باشد. ویژگی اصلی این مقاله آن است که روش حل و یک جواب عمومی معادله های درجه n ام با ضرایب گویا را به دست می دهد که در اصل به بررسی معادله های سیاله ی عمومی از نظر وجود جواب با ضرایب گویا خاتمه می دهد؛

زیرا معادله های سیاله از نظر تعداد می توانند دارای بی شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند. برای مثال، برای معادله ی سیاله ی $x + y = 1$ در مجموعه ی اعداد طبیعی، هیچ جوابی یافت نمی شود، ولی در مجموعه ی اعداد صحیح، بی شمار جواب به صورت $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ وجود دارد.

معادله های سیاله ی درجه اول دو مجهولی

تاکنون مسئله های گوناگونی مطرح شده اند که در واقع به یک معادله ی دو مجهولی ساده می انجامند و پس از بررسی از نظر وجود جواب، به یک نتیجه ی قطعی منتهی شده اند. صورت عمومی معادله های سیاله درجه اول دو مجهولی را که از ابتدا مطرح بوده اند، با فرض وجود a, b, c پارامتر و این که x و y مجهول باشند، به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$ax + by = c \quad (1)$$

درباره ی معادله ی ۱ باید متذکر این واقعیت شد که برای به دست آوردن جواب های گویای بسیاری از معادلات خاص از نوع ۱ در کارهای دیوفانتین اسکندرانی (۲۵۰ سال بعد از میلاد) روش قانون مندی پیدا شده است. در واقع، عبارت «معادله های دیوفانتی» به معادله هایی اطلاق می شود که جواب های آن ها اعدادی گویا باشند. اما در زمان حاضر،

معادله‌هایی که جواب‌های صحیح برای آن‌ها در نظر گرفته شود، به «معادله‌های دیوفانتی» مشهورند.

در این جا، جواب‌های صحیح معادله‌ی عمومی ۱ مورد نظر است. پیش از بحث روی وجود جواب‌های معادله‌ی ۱ و بیان قضیه‌ی مربوط به آن، چند مثال کاربردی ارائه می‌دهیم که به نوع خاصی از معادله‌ی ۱ منجر می‌شوند.

مثال ۱: علی با ۲۰۰۰ تومان، چند عدد مداد ۱۵۰ تومانی و چند عدد دفترچه‌ی ۳۵۰ تومانی می‌تواند خریداری کند؛ با شرط این که تعداد مدادها از ۴ عدد و تعداد دفترچه‌ها از ۳ عدد کم‌تر نباشد.

حل: با توجه به شرایط مسئله، با معادله‌ی دیوفانتی زیر روبه‌رو هستیم: $150x + 350y = 2000$ ؛ $y \geq 3$ ؛ تعداد دفترچه‌ها و $x \geq 4$ ؛ تعداد مدادها پس از تقسیم معادله بر ۵۰، به معادله‌ی ساده‌شده‌ی زیر می‌رسیم:

$$3x + 7y = 40$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{40 - 7y}{3} = 13 - 2y + \frac{1 - y}{3}$$

با فرض $\frac{1 - y}{3} = t$ خواهیم داشت:

$$x = 11 + 7t, \quad y = 1 - 3t$$

$$t = -1 : x = 4 ; y = 4$$

تنها جواب مسئله با شرایط مذکور، ۴ عدد مداد و ۴ عدد دفترچه است. ملاحظه می‌شود، همیشه تعداد جواب‌ها به شرایط اولیه‌ی مذکور در مسئله بستگی دارد. در مثال اخیر، شرایط اولیه‌ی تعداد مدادها و دفترچه‌ها، سبب منحصر به فرد بودن جواب، یعنی به تعداد برابر دفترچه و مداد شد:

$$x = y ; 3x + 7x = 40 ; 10x = 40 ; x = 4$$

(تعداد مداد یا دفترچه) $x = y = 4$

حل و بحث معادله‌ی سیاله‌ی خطی (۱) $ax + by = c$

از نظر تحلیلی، معادله‌ی درجه اول دو مجهولی ۱، در صفحه‌ی مختصات دکارتی، می‌تواند نمودار یک خط راست را مشخص کند که با رسم چنین خطوطی آشنا هستید. می‌دانیم، هر خط به معادله‌ی ۱ که در آن a و b هر دو با هم صفر نباشند، نشان دهنده‌ی بی‌نهایت نقطه است که با اختیار عددی برای x یا y ، دیگری به دست می‌آید. برای مثال، اگر $x = 0$ و $b \neq 0$ ، مقدار y محاسبه می‌شود: $y = \frac{c}{b}$ و اگر $y = 0$ و $a \neq 0$ ، مقدار x محاسبه می‌شود: $x = \frac{c}{a}$.

در این جا، برای بحث روی معادله‌ی ۱، کافی است به دو

پرسش زیر پاسخ دهیم:

۱. آیا معادله‌ی ۱ با فرض صحیح بودن a ، b و c در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) جواب صحیح دارد؟ به بیان دیگر، نقطه‌ی $A \left(\frac{x}{y} \right)$ را که $x, y \in Z$ ، چگونه می‌توان تعیین کرد تا در معادله‌ی ۱ صدق کند؟

۲. در صورتی که یک جواب معادله‌ی ۱ مانند $A \left(\frac{x}{y} \right)$ معلوم باشد، چگونه می‌توان همه‌ی جواب‌های صحیح معادله را تعیین کرد؟ به بیان دیگر، با فرض وجود یک جواب صحیح

بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است

معادله‌ی ۱، چگونه جواب عمومی معادله‌ی ۱ را ارائه دهیم؟ پاسخ پرسش اول را در برهان قضیه‌ی زیر می‌توان یافت: **قضیه:** معادله‌ی ۱ در مجموعه‌ی اعداد صحیح Z دارای جواب است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b (ضریب‌های yx)، عدد c (ثابت معادله) را بشمارد. در واقع، اگر $(a, b) = d$ ، آن‌گاه باید داشته باشیم: $d | c$. برهان این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی آمده است.

نتیجه: اگر ضریب‌های مجهول‌های معادله‌ی سیاله نسبت به هم اول باشند، معادله همیشه دارای جواب‌های صحیح است.

در این جا، جواب عمومی معادله‌ی ۱، توسط یک جواب خصوصی معادله به این صورت تعیین می‌شود:

$$\alpha, \beta, a, b \in Z : x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at$$

مثال ۱: در صورتی که یک جواب خصوصی معادله‌ی زیر معلوم (۹ و ۱۶) باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

$$24x + 14y = 440$$

حل: چون $2 = (14, 24)$ ، پس:

$$12x + 7y = 220$$

هم چنین، با معلوم بودن یک جواب خصوصی معادله، به طور مستقیم می‌توان به جواب عمومی آن رسید:

$$(\alpha = 9, \beta = 16)$$

$$x = 9 + 7t, \quad y = 16 - 12t$$

جواب‌های طبیعی معادله، به ازای مقادیر $-1, 0, 1$ به دست می‌آیند:

t	-1	0	1
x	2	9	16
y	28	16	4

مثال ۲: عدد ۲۹ را به تفاضل دو عدد بنویسید که یکی از آن‌ها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۴ بخش پذیر باشد.

حل: مسئله، معادل حل معادله‌ی زیر است:

$$11x - 14y = 29;$$

دو طرف معادله را بر ضریب مجهول کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$x - y - \frac{3y}{11} = 2 + \frac{7}{11};$$

$$x - y - 2 = \frac{3y + 7}{11} = t;$$

$$3y + 7 = 11t; y = \frac{11t - 7}{3} = 3t + \frac{2t}{3} - 2 - \frac{1}{3};$$

$$y - 3t + 2 = \frac{2t - 1}{3} = k; 2t - 1 = 3k;$$

$$t = \frac{3k + 1}{2} = k + \frac{k + 1}{2}; \frac{k + 1}{2} = S; k = 2S - 1$$

پس از جایگزینی مقدارهای فوق و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$$x = 14S - 5, y = 11S - 6$$

ساده کردن برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱.....

در برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ می‌توان روش‌های ساده‌تری را به کار برد تا با سرعت بیشتری به جواب برسیم: ۱. اگر ضریب یکی از مجهول‌ها و مقدار ثابت، مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، می‌توانیم با انتخاب مجهول کمکی جدید به جای مجهول دوم، دو طرف معادله را به مقسوم علیه مشترک ساده کنیم.

مثال ۱: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$18x - 25y = 21$$

حل: چون $3 = (18, 25)$ ، پس جمله‌ی $25y$ نیز باید بر ۳ بخش پذیر باشد. چون $1 = (25, 3)$ ، پس y باید مضربی از ۳ باشد: $y = 3t$

$$18x - 75t = 21$$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$6x - 25t = 7$$

در این جا، معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم:

$$6x = 25t + 7; x = \frac{25t + 7}{6} = 4t + 1 + \frac{t + 1}{6}$$

$$\frac{t + 1}{6} = k; t = 6k - 1; x = 25k - 3$$

$$y = 3(6k - 1) = 18k - 3; y = 18k - 3$$

۲. در ضمن محاسبه‌ی یکی از مجهول‌ها بر حسب مجهول دیگر، اگر بین جمله‌های صورت کسری که به دست می‌آید (پس از گرفتن مقدار صحیح آن) مقسوم علیه مشترکی وجود داشته باشد، معادله را ساده‌تر می‌توان حل کرد.

مثال ۲: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$$24x + 17y = 41$$

حل: ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$17y = 41 - 24x; y = 2 - x + \frac{7 - 7x}{17};$$

$$y = 2 - x + 7\left(\frac{1 - x}{17}\right); \frac{1 - x}{17} = t; x = 1 - 17t$$

$$y = 2 - (1 - 17t) + 7t = 1 + 24t; y = 1 + 24t$$

هم‌چنین:

۳. در ضمن تقسیم، ممکن است باقی‌مانده بزرگ‌تر از نصف مقسوم علیه باشد. در این صورت بهتر است از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شود.

مثال ۳: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$$11x - 40y = 49$$

حل: ابتدا x را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$x = \frac{49 + 40y}{11} = 4 + 3y + \frac{5 + 7y}{11}; \frac{5 + 7y}{11} = t;$$

$$y = \frac{11t - 5}{7} = t - 1 + \frac{4t + 2}{7}; \frac{4t + 2}{7} = k$$

$$t = \frac{7k - 2}{4} = \frac{8k - k - 2}{4} = 2k - \frac{k + 2}{4};$$

$$\frac{k + 2}{4} = m; k = 4m - 2$$

پس از اختصار لازم:

$$x = 40m - 21, y = 11m - 7$$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک کسرهای مسلسل

به کمک کسرهای مسلسل می‌توان یکی از جواب‌های معادله‌ی سیاله‌ی ۱ را در صورت وجود به دست آورد. این مطلب را ضمن مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۱: معادله‌ی سیاله‌ی $30x + 86y = 16$ را به کمک

کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$15x + 43y = 8$$

کسر $\frac{43}{15}$ را در نظر می‌گیریم و آن را به کسر مسلسل

تبدیل می‌کنیم:

یک جواب خصوصی معادله، $x = -40$ ، $y = -15$ و جواب عمومی معادله چنین است:

$$\begin{cases} x = -40 + 19t \\ y = -15 + 7t \end{cases}$$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک هم‌نهشتی.....
یکی دیگر از کاربردهای هم‌نهشتی، حل معادله‌ی سیاله است. معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$ax \equiv c \pmod{b} \quad \text{و} \quad by \equiv c \pmod{a}$$

معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند

بدیهی است که برای حل هر یک از معادله‌های بالا، شرط $(a, b) | c$ باید برقرار باشد. با فرض این که $(a, b) = 1$ ، معادله‌ی سیاله قابل حل است. در صورتی که $(a, b) = d$ ، آن‌گاه کافی است $d | c$. برای مثال، معادله‌ی $6x + 21y = 1389$ با توجه به $3 = (6, 21)$ و $3 | 1389$ ، دارای جواب است و آن را می‌توان به صورت ساده‌شده‌ی زیر نوشت:

$$2x + 7y = 463 \quad (1)$$

برای حل معادله‌ی بالا به کمک هم‌نهشتی، می‌توان معادله را به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$2x \equiv 463 - 7y \pmod{7}; \quad 2x \equiv 463 \pmod{7}$$

با توجه به برابری‌های $463 = 7 \times 66 + 1$ و $463 = 2 \times 231 + 1$ معادله‌های بالا ساده می‌شوند:

$$2x \equiv 1 \pmod{7}; \quad 2x \equiv 1 \pmod{7}; \quad x = 7k + 4$$

$$7y \equiv 1 \pmod{2}; \quad 7y \equiv 1 \pmod{2}; \quad y = 2s + 1$$

با قرار دادن x (یا y) در معادله‌ی اصلی (۱) مجهول دیگری را بر حسب k (یا s) به دست می‌آوریم که این جواب عمومی معادله محسوب می‌شود. زیرا بر حسب پارامتر دل‌خواه k (یا s) است. $y = 65 - 2k$; $2(7k + 4) + 7y = 463$ بنابراین، جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$(x = 7k + 4, y = 65 - 2k); (x = 228 - 7s, y = 2s + 1)$$

برای آزمایش جواب‌ها کافی است هر جفت جواب را داخل معادله‌ی اصلی (۱) قرار دهیم.

پی‌نوشت

hashemi- moosavi@ yahoo.com

* برای (x, y) جفت‌های طبیعی $(7, 104)$ ، ... و $(4, 267)$ به دست می‌آیند.

** : از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شد.

$$\frac{43}{15} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}$$

در این جا، کسر متقارب ماقبل آخر را در نظر می‌گیریم.

این کسر برابر $\frac{2}{7}$ است. آخرین کسر برابر با مقدار حقیقی کسر $\frac{43}{15}$ است و $\frac{2}{7}$ هم کسر متقارب ردیف فرد است. پس با توجه به قضیه‌های مربوط به کسرهای مسلسل می‌توان نوشت:

$$\frac{43}{15} - \frac{2}{7} = \frac{1}{15 \times 7}$$

برابری عددی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$43 \times 7 - 15 \times 20 = 1$$

دو طرف برابری بالا را هشت برابر می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی، برابری عددی زیر را می‌نویسیم:

$$15(-160) + 43(56) = 8$$

با مقایسه‌ی رابطه عددی اخیر و معادله‌ی اصلی، یک جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = -160, y = 56$$

با وجود یک جواب خصوصی معادله، جواب عمومی معادله به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = -160 + 43t \\ y = 56 - 15t \end{cases}$$

برای ساده‌تر شدن جواب‌ها، کافی است t را به $t + 3$ تبدیل کنیم:

$$x = -160 + 43(t + 3) = -31 + 43t$$

$$y = 56 - 15(t + 3) = 11 - 15t$$

مثال ۲: معادله‌ی سیاله‌ی $15x - 57y = 15$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$5x - 19y = 5$$

ابتدا $\frac{5}{19}$ را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{5}{19} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

کسر متقارب ماقبل آخر $\frac{3}{8}$ و چون کسر متقارب ردیف زوج

است:

$$\frac{5}{19} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19 \times 8}$$

این برابری را در $5 \times 19 \times 8$ ضرب می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$7(-40) - 19(-15) = 5$$