● غلامرضا یاسی‌پور

با راهیان المپیادهای ریاضی

دستگاه‌های معادلات

در این بخش، دستگاه‌های معادلات نااستاندارد را انتخاب کرده‌ایم. اولین مسئله، گزیده‌ای است از المپیاد ریاضی بریتانیا در سال ۱۹۹۶:

۱. *جمیع جواب‌های اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d دستگاه زیر را بیابید:*

$$a+b+c+d=۱۲$$
$$abcd=۲۷+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

با استفاده از نابرابری $AM-GM$ در معادله‌ی دوم، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$abcd\geq ۲۷+۶\sqrt{abcd}$$

با انتقال تمام عبارات به سمت چپ و تجزیه‌ی کل عبارت، و در نظر گرفتن آن به‌عنوان چندجمله‌ای درجه‌ی دومی برحسب $\sqrt{abcd}$، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{abcd}+۳)(\sqrt{abcd}-۹)\geq ۰$$

این نابرابری مستلزم آن است که داشته باشیم: $\sqrt{abcd}\geq ۹$ که هرگاه با معادله‌ی اول دستگاه ترکیب شود، نابرابری زیر را بدهد:

$$\sqrt[۴]{abcd}\geq \frac{a+b+c+d}{۴}$$

نابرابری $AM-GM$ مستلزم آن است که $a=b=c=d=۳$ تنها جواب دستگاه باشد.

مسئله‌ی دوم، از المپیاد ریاضی ویتنام (سال ۱۹۹۶) برگزیده شده است.

۲. *جمیع اعداد حقیقی و مثبت x و y صادق در دستگاه معادلات زیر را بیابید:*

$$\sqrt{۳x}\left(۱+\frac{۱}{x+y}\right)=۲$$
$$\sqrt{۷y}\left(۱-\frac{۱}{x+y}\right)=۴\sqrt{۲}$$

در این مسئله، جانشینی $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=v$ طبیعی است.

در این صورت، دستگاه به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u\left(۱+\frac{۱}{u^۲+v^۲}\right)=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$
$$v\left(۱-\frac{۱}{u^۲+v^۲}\right)=\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}$$

اما $u^۲+v^۲$ مربع قدرمطلق عدد مختلط $z=u+iv$ است. این مطلب ما را راهنمایی می‌کند که معادله‌ی دوم ضرب در i را با معادله‌ی اول جمع کنیم. در این صورت داریم:

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^۲+v^۲}=\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}+i\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}\right)$$

خارج قسمت $\frac{(u-iv)}{(u^۲+v^۲)}$ برابر است با:

$$\frac{\bar{z}}{|z|^۲}=\frac{\bar{z}}{(z\bar{z})}=\frac{۱}{z}$$

بنابراین، معادله‌ی بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$z+\frac{۱}{z}=\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}+i\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}\right)$$

درنتیجه z در معادله‌ی درجه‌ی دوم $z^۲-\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}+i\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}\right)z+۱=۰$ با جواب‌های

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\pm\frac{۲}{\sqrt{۲۱}}\right)+i\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}\pm\sqrt{۲}\right)$$

صدق می‌کند که در آن علامت‌های + و − متناظرند.

این موضوع نشان می‌دهد، دستگاه اولیه جواب‌های زیر را دارد:

$$x=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2,\quad y=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)^2$$

که در آن علامت‌های + و − متناظرند.

دستگاه‌های زیر، جز در موارد مشخص شده، برحسب جواب‌های حقیقی حل می‌شوند.

مسائل

۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\log(2xy)=\log x \quad \log y$$
$$\log(yz)=\log y \quad \log z$$
$$\log(2zx)=\log z \quad \log x$$

۲. جمیع جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$\frac{4x^2}{4x^2+1}=y$$
$$\frac{4y^2}{4y^2+1}=z$$
$$\frac{4z^2}{4z^2+1}=x$$

۳. درصورتی که اعداد a، b، x و y در دستگاه معادلات زیر صدق کنند، ax^5+by^5 را بیابید:

$$ax+by=3$$
$$ax^2+by^2=7$$
$$ax^3+by^3=16$$
$$ax^4+by^4=42$$

۴. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x+\frac{2}{x}=2y$$
$$y+\frac{2}{y}=2z$$
$$z+\frac{2}{z}=2x$$

۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$(x+y)^3=z$$
$$(y+z)^3=x$$
$$(z+x)^3=y$$

۶. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x^2-|x|=|yz|$$
$$y^2-|y|=|zx|$$
$$z^2-|z|=|xy|$$

۷. جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=1.1$$
$$\lfloor x\rfloor+\{y\}+z=2.2$$
$$\{x\}+y+\lfloor z\rfloor=3.3$$

که در آن ⌊ ⌋ و { }، به‌ترتیب بزرگ‌ترین تابع صحیح و جزء کسری تابع را نشان می‌دهند.

۸. به‌ازای عدد مختلط مفروض a، جواب‌های متفاوت دستگاه زیر را بیابید:

$$(x_1+x_2+x_3)x_4=a$$
$$(x_1+x_2+x_4)x_3=a$$
$$(x_1+x_3+x_4)x_2=a$$
$$(x_2+x_3+x_4)x_1=a$$

۹. جمیع عددهای حقیقی a ای را بیابید که به‌ازای آن‌ها، اعداد حقیقی نامنفی x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 صادق و در دستگاه زیر موجودند:

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a$$
$$\sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2$$
$$\sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3$$

۱۰. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x^3-9(y^2+3y-3)=0$$
$$y^3-9(z^2+3z-3)=0$$
$$z^3-9(x^2+3x-3)=0$$

۱۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$ax+by=(x-y)^2$$
$$by+cz=(y-z)^2$$
$$cz+ax=(z-x)^2$$

در این دستگاه: $a,b,c>0$.

۱۲. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت (نه همه برابر) باشند. جمیع جواب‌های حقیقی x، y و z دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x^2-yz=a$$
$$y^2-zx=b$$
$$z^2-xy=c$$

حل مسائل

۱. داریم:

$$\log(۲xy) = \log ۲ + \log x + \log y$$

با انتقال لگاریتم‌های شامل متغیر به سمت راست و افزودن ۱ به هر طرف سه معادله، حاصل می‌کنیم:

$$\log ۲۰ = (\log x - ۱)(\log y - ۱)$$
$$۱ = (\log y - ۱)(\log z - ۱)$$
$$\log ۲۰ = (\log z - ۱)(\log x - ۱)$$

با ضرب جمیع معادلات و گرفتن ریشه‌ی دوم خواهیم داشت:

$$\pm \log ۲۰ = (\log x - ۱)(\log y - ۱)(\log z - ۱)$$

این رابطه، در ترکیب با برابری زیر:

$$\log ۲۰ = (\log x - ۱)(\log y - ۱)$$

نشان می‌دهد: $\log ۲ - ۱ = \pm ۱$

معادله‌های دیگر، $\log x - ۱ = \pm \log ۲۰$ و $\log y - ۱ = \pm ۱$ را به‌دست می‌دهند و دو جواب دستگاه یعنی $(۱۰۰, ۱۰۰, ۲۰۰)$ و $(۱, ۱, \frac{۱}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم.

۲. کار را با ملاحظه‌ی این مطلب آغاز می‌کنیم که تابع: $f:[۰,\infty) \to [۰,\infty), f(t) = \frac{۴t^۲}{(۴t^۲+۱)}$ اکیداً صعودی است. درنتیجه اگر $x < y$، آن‌گاه $f(x) < f(y)$. بنابراین $y < z$.

با تکرار این استدلال، $z < x$ را به‌دست می‌آوریم. درنتیجه داریم: $x < y < z < x$ که غیرممکن است.

به همین ترتیب، $x > y$ به تناقض می‌انجامد. بنابراین: $x = y = z$.

حل معادله‌ی $\frac{۴t^۲}{(۴t^۲+۱)} = t$، دو مقدار $t = \frac{۱}{۲}$ یا $t = ۰$ را به‌دست می‌دهد. درنتیجه، تنها سه‌تایی‌هایی که در دستگاه صادق‌اند، عبارت‌اند از:

$$(۰,۰,۰) \quad \text{و} \quad (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

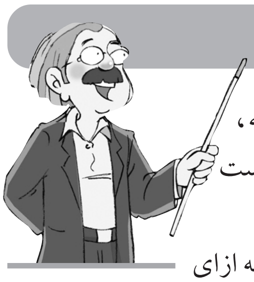
(المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۶)

۳. به ازای $n = ۲$ و $n = ۳$، اتحاد

$$(ax^n + by^n)(x+y) - (ax^{n-۱} + by^{n-۱})xy = ax^{n+۱} + by^{n+۱}$$

به معادلات زیر می‌انجامد:

$$۷(x+y) - ۳xy = ۱۶ \quad \text{و} \quad ۱۶(x+y) - ۷xy = ۴۲$$



حل هم‌زمان این دو معادله، $xy = -۳۸$ و $x + y = -۱۴$ را به‌دست می‌دهد.

با به‌کار بردن اتحاد بازگشتی، به ازای $n = ۴$ داریم:

$$ax^۵ + by^۵ = (۴۲)(-۱۴) - (۱۶)(-۳۸) = -۵۸۸ + ۶۰۸ + ۲۰$$

۴. فرض می‌کنیم (x, y, z) یکی از جواب‌ها باشد. واضح است، اگر یکی از این عددها مثبت باشد، دو عدد دیگر نیز باید مثبت باشند. در صورت ضرورت، با ضرب در ۱− می‌توان فرض کرد: $x, y, z > ۰$.

با جمع سه معادله حاصل می‌کنیم:

$$x + y + z = ۲(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z})$$

نیز، کاربرد نابرابری $AM - GM$ در مورد هر معادله‌ی دستگاه، موارد زیر را به‌دست می‌دهد:

$$۲x \geq ۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad ۲y \geq ۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad ۲z \geq ۲\sqrt{۲}$$

این موضوع نشان می‌دهد که در معادله‌ی فوق، سمت چپ بزرگ‌تر از یا برابر با $۳\sqrt{۲}$ است. در حالی که سمت راست کمتر از یا برابر با $۳\sqrt{۲}$ است. برای به‌دست آوردن برابری، باید داشته باشیم:

$$x = y = z = \sqrt{۲}$$

که یک جواب را به دست می‌دهد. جواب دیگر، با تغییر علامت به دست می‌آید و عبارت است از:

$$x = y = z = -\sqrt{۲}$$

تبصره: این دستگاه به‌صورت:

$$y = f(x) \quad \text{و} \quad z = f(y) \quad \text{و} \quad x = f(z)$$

است که در آن داریم:

$$f(t) = \frac{۱}{۲}(t + \frac{۲}{t})$$

دنباله‌ی داده شده با $n \geq ۰$ و $t_{n+۱} = f(t_n)$ و $t_۰ \in \mathbb{R}$ به‌طور سنتی برای محاسبه‌ی $\sqrt{۲}$ با دقت بسیار به‌کار رفته است، زیرا با سرعت خوبی به آن هم‌گرا می‌شود. هریک از جمله‌های تالی، بی‌توجه به مقدار $t_۰ \in \mathbb{R}$، در قدرمطلق بزرگ‌تر از یا برابر با $\sqrt{۲}$ است. اگر برای راحتی کار فرض کنیم: $t_۰ > ۰$، آن‌گاه داریم: $t_n \geq r_۲$، به‌ازای $n \geq ۱$ و نیز:

$$t_1 \ge t_2 \ge \cdots$$

جمله‌ی واقع در این دنباله، تنها اگر دقیقاً $\sqrt{2}$ باشد، می‌تواند تکرار شود. حل دستگاهی مشابه با هر تعداد متغیر، مشکل نیست.

۵. با تفریق معادله‌ی دوم از معادله‌ی اول، به‌دست می‌آوریم:

$$(x-z)((x+y)^2+(x+y)(x+z)+(y+z)^2)=z-x$$

از آن‌جا که:

$$(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2>0$$

به‌دست می‌آوریم: $x=z$. بنا به تقارن، $y=z$، و کارمان به حل معادله‌ی $x=8x^3$ می‌انجامد. این معادله دارای جواب‌های $x=0$ و $x=\pm\frac{1}{2}$ است. نتیجه می‌شود، جواب‌های دستگاه معادلات مفروض عبارت‌اند از:

$$x=y=z=0$$

$$x=y=z=\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

$$x=y=z=-\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

(تورنمنت شهرها، ۱۹۸۵)

۶. فرض می‌کنیم (x,y,z) یکی از جواب‌ها باشد. اگر $xyz\neq 0$، آن‌گاه از آن‌جا که قدرمطلق مثبت است، موارد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2>|yz| \text{ و } y^2>|zx| \text{ و } z^2>|xy|$$

با ضرب این موارد داریم:

$$x^2y^2z^2>x^2y^2z^2$$

که متناقض است. بنابراین یکی از اعداد صفر است، و با استفاده از معادله‌ای که شامل آن در سمت چپ است، درمی‌یابیم که یکی دیگر از این سه عدد نیز باید صفر باشد. عدد سوم تنها می‌تواند ۰ یا ۱± باشد.

به این ترتیب، جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$، $(0,0,1)$، $(-1,0,0)$، $(0,-1,0)$ و $(0,0,-1)$

۷. با جمع سه معادله به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z=6.6$$

درنتیجه:

$$x+y+z=3.3$$

تفریق معادلات اولیه از این معادله، دستگاه هم‌ارز زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=2.2$$

$$\{x\}+\lfloor y\rfloor=1.1$$

$$\{z\}+\lfloor x\rfloor=0$$

جواب‌های اولین معادله $\{y\}=0.2$ و $\lfloor z\rfloor=2$، جواب‌های دومین معادله $\{x\}=0.1$ و $\lfloor y\rfloor=1$ و جواب‌های سومین معادله $\{z\}=0$ و $\lfloor x\rfloor=0$ هستند. درنتیجه، جواب دستگاه عبارت است از: $x=0.1$، $y=1.2$ و $z=2$.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی ۱۹۷۹، طرح از T. Anderscu)

۸. فرض می‌کنیم:

$$s=x_1+x_2+x_3+x_4$$

در این صورت دستگاه می‌شود:

$$(s-x_4)x_4=a$$

$$(s-x_3)x_3=a$$

$$(s-x_2)x_2=a$$

$$(s-x_1)x_1=a$$

که هم‌ارز مورد زیر است:

$$x_k^2-sx_k+a=0 \text{ و } k=1,2,3,4$$

نتیجه می‌شود که x_1، x_2، x_3 و x_4 جواب‌های معادله‌ی زیرند:

$$u^2-su+a=0$$

ادامه‌ی کار بدیهی است. به جای این‌که ۱۶ حالت ممکن را به‌طور جداگانه تحلیل کنیم، به‌طریق زیر اقدام می‌کنیم:

اگر $x_1=x_2=x_3=x_4$، هر x_i برابر $s/4$ است. با قرار دادن این رابطه در هریک از معادلات داریم: $s=\pm 4\alpha$ که در آن α یکی از جواب‌های معادله‌ی $3x^2=a$ است (به‌خاطر داشته باشید که a مختلط است و بنابراین نماد $\sqrt{a}$ معنی ندارد). این حالت به دو جواب $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ و $(-\alpha,-\alpha,-\alpha,-\alpha)$ می‌انجامد.

اگر دو x_i متمایز باشند، مثلاً $x_1\neq x_2$، آن‌گاه این دو،

ریشه‌های معادله‌ی $u^2 - su + a = 0$ می‌شوند و بنابراین مجموعشان s است. در این صورت داریم:

$$x_3 + x_4 = 0$$

بررسی دو حالت کافی است.

اگر $x_4 \neq x_3$ باشد، همین استدلال نشان می‌دهد که: $x_3 + x_4 = s$. درنتیجه $s = 0$، و چهارتایی (x_1, x_2, x_3, x_4) به صورت $(\beta, -\beta, \beta, -\beta)$ است که در آن β یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^2 + a = 0$ است. از تقارن، شش جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\beta,-\beta,\beta,-\beta), (\beta,\beta,-\beta,-\beta)(\beta,-\beta,-\beta,\beta), (-\beta,\beta,\beta,-\beta),$$
$$(-\beta,\beta,-\beta,\beta), (-\beta,-\beta,\beta,\beta)$$

اگر داشته باشیم: $x_1 \neq x_2$ و $x_3 = x_4$، آن‌گاه خواهیم داشت: $x_3 = x_4 = 0$. این مستلزم آن است که سه x_i برابر صفر و چهارمی s باشد. اما این حالت، اگر و تنها اگر $a = 0$ باشد، امکان‌پذیر است. در این حال، جواب‌های اضافی $(0,0,0,s)$ و $(0,0,s,0)$ و $(0,s,0,0)$ و $(s,0,0,0)$ را با s ای به‌دست می‌آوریم که عددی مختلط است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۶، طرح از T.Cuculescu)

۹. راه‌حل اول: توجه داشته باشید که $(0,0,0,0,0)$ یکی از جواب‌هاست. فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌های نابدیهی هستند. بنابراین:

$$\sum (ak - k^3)x_k = 0$$

و:

$$\sum (ak^3 - k^5)x_k = 0$$

داریم:

$$\sum_{k^2 \le a} (a - k^2)kx_k = \sum_{k^2 > a} (a - k^2)kx_k$$

$$\sum_{k^2 \le a} (a - k^2)k^3x_k = \sum_{k^2 > a} (a - k^2)k^3x_k$$

اما:

$$\sum_{k^2 \le a} (a - k^2)k^3x_k \le a\sum_{k^2 \le a} (a - k^2)kx_k$$
$$= a\sum_{k^2 > a} (a - k^2)kx_k \le \sum_{k^2 > a} (a - k^2)k^3x_k$$

از آن‌جا که جمله‌های اول و آخر برابرند، جمیع علامت‌های نابرابری، درواقع برابری‌اند. در این صورت داریم:

$$\sum_{k^2 > a} a(a - k^2)kx_k = \sum_{k^2 > a} k^2(a - k^2)kx_4$$

اما به ازای $k^2 > a$ داریم:

$$a(k^2 - a)kx_k > k^2(k^2 - a)kx_k$$

که در ترکیب با نابرابری فوق، نشان می‌دهد که به ازای $k^2 > a$ داریم: $x_k = 0$.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد، اگر $k^2 < a$ و $a_k = 0$، بنابراین برای این‌که دستگاه جواب نابدیهی را قبول کند، باید a برابر یکی از مربع‌های کامل ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵ باشد.

توجه داشته باشید که اگر به‌ازای ۵ یا $m = 1,2,3,4$ داشته باشیم $a = m^2$، آن‌گاه به‌ازای $k \neq m$ و $x_k = 0$، $x_m = m$ یک جواب خواهد بود.

راه‌حل دوم: مانند قبل، فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌هایی نابدیهی باشند. از معادلات دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

از طرف دیگر، نابرابری کوشی-شوارتز، چون در مورد دنباله‌های

$$\left\{\sqrt{kx_k}\right\}_{k=1,\dots,5} \quad \text{و} \quad \left\{\sqrt{k^5x_k}\right\}_{k=1,\dots,5}$$

به کار رود، می‌دهد:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

رابطه‌ی استنتاج شده در فوق نشان می‌دهد، در نابرابری کوشی-شوارتز، برابری داریم و درنتیجه دو دنباله متناسب‌اند. به ازای $x_k = 0$، داریم:

$$\frac{\sqrt{k^5x_k}}{\sqrt{kx_k}} = k^2$$

و از آن‌جا که جمیع این مقادیر متمایزند، نتیجه می‌شود که به‌ازای دقیقاً یک k داریم: $x_k \neq 0$. مانند قبل درمی‌یابیم، تنها مقادیر ممکن a عبارت‌اند از: ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵.

(المپیاد بین‌المللی ریاضی بیست‌ویکم، ۱۹۷۹)

۱۰. دستگاه را می‌توان به‌صورت زیر دوباره‌نویسی کرد:

$$(y-3)^3 = y^3 - x^3$$

$$(z-3)^3 = z^3 - y^3$$

$$(x-3) = x^3 - z^3$$

با جمع آن‌ها خواهیم داشت:

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$$

بدون از دست رفتن کلیت کار، می‌توان فرض کرد که: $x \geq 3$. از سومین معادله‌ی دستگاه اولیه درمی‌یابیم:

$$z^3 - 27 = 9x(x-3)$$

از این‌رو:

$$z \geq 3$$

به همین ترتیب، $y \geq 3$ ، و برقراری نابرابری فوق مستلزم آن است که تنها جواب ممکن عبارت باشد از:

$$x = y = z = 3$$

۱۱. با جمع معادله‌ی سوم با اول، و تفریق از دوم، خواهیم داشت:

$$2ax = (x-y)^2 + (z-x)^2 - (y-z)^2$$
$$= 2(x^2 - xy - xz + yz)$$

با تجزیه‌ی این عبارت به‌دست می‌آوریم:

$$ax = (x-y)(x-z)$$

با روشی مشابه به‌دست می‌آوریم:

$$by = (y-z)(y-x) \quad \text{و} \quad cz = (z-x)(z-y)$$

اکنون فرض می‌کنیم (x, y, z) یک جواب باشد. بدون از دست دادن کلیت کار، می‌توان فرض کرد: $x \geq y \geq z$. در این صورت:

$$by = (y-z)(y-x) \leq 0$$

و

$$cz = (z-x)(z-y) \geq 0$$

و شرایط $b > 0$ و $c > 0$ مستلزم آن است که: $y \leq 0 \leq z \leq y$.

به این ترتیب داریم: $y = z = 0$ و $ax = x^2$. بنابراین، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از: $(0,0,0)$ و $(a,0,0)$. بنابر تقارن، جمیع جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,c)$ و $(0,b,0)$ و $(a,0,0)$ و $(0,0,0)$

(المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۸۴)

۱۲. مربع کردن هر معادله و تفریق از حاصل‌ضرب دو معادله‌ی دیگر می‌دهد:

$$a^2 - bc = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

$$b^2 - ca = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

$$c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

فرض می‌کنیم:

$$k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

در این صورت:

$$(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ca)(c^2 - ab) = k^2(x^2 - yz) = k^2 a$$

محاسبه‌ی مشابهی که دستگاه فوق به‌دست می‌دهد، نشان می‌دهد که عبارت سمت چپ عبارت است از:

$$a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

و مورد اخیر، با توجه به نابرابری $AM - GM$ ، مثبت است. درنتیجه:

$$k = \pm\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

و دو جواب دستگاه (به‌ازای هر انتخاب k یکی) عبارت‌اند از:

$$x = \frac{a^2 - bc}{k} \quad \text{و} \quad y = \frac{b^2 - ca}{k} \quad \text{و} \quad z = \frac{c^2 - ab}{k}$$

(طرح از k.kedlaya برای المپیاد بین‌المللی ریاضی ایالات متحده، ۱۹۹۸)