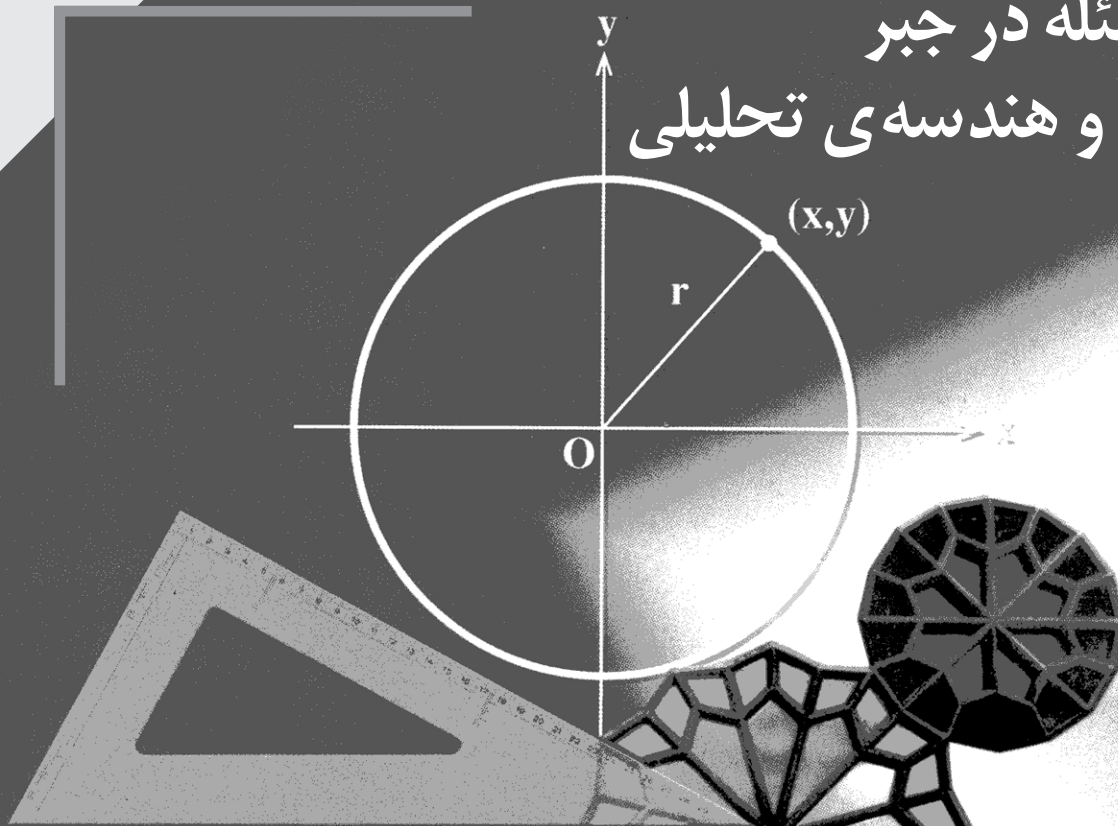


چند مسئله در جبر هندسه و هندسه ی تحلیلی



$(n+1)$ حاصل ضرب است. فقط یکی از این حاصل ضرب ها شامل $(x-a_1)$ نیست و آن حاصل ضرب به صورت زیر است:

$$(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_{n+1})$$

هم چنین، فقط یکی از حاصل ضرب های یاد شده شامل $(x-a_r)$ نیست که به صورت زیر است:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{n+1})$$

دو رابطه ی زیر را در نظر می گیریم (در تابع $f_n(x)$ یک بار به جای x ، a_1 و یک بار a_2 می گذاریم):

$$\begin{cases} f_n(a_1) = (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\dots(a_1-a_{n+1}) \\ f_n(a_2) = (a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_{n+1}) \end{cases}$$

از دو رابطه ی بالا، رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} f_n(a_1) \cdot f_n(a_2) &= (a_1-a_2)(a_2-a_1) \\ &\times [(a_1-a_3)(a_2-a_3)] [(a_1-a_4)(a_2-a_4)] \\ &\times \dots \times [(a_1-a_{n+1})(a_2-a_{n+1})] \end{aligned}$$

مقدار داخل هر کروشه مثبت است، زیرا مثلاً چون $a_1 < a_2 < a_3$ پس $(a_1-a_3)(a_2-a_3) > 0$.

مسئله ی جبر

تعداد $(x+1)$ عدد حقیقی دوهبه دو متمایز $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ و متغیر حقیقی x را در نظر می گیریم و مجموعه ی زیر را با عضوهای $x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_{n+1}$ تشکیل می دهیم:

$$E = \{x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n, x-a_{n+1}\}$$

از اعضای مجموعه ی E ، n تا انتخاب می کنیم و هر n عضو انتخاب شده را در هم ضرب می کنیم. سپس حاصل ضرب ها را باهم جمع می کنیم و مجموع را $f_n(x)$ می نامیم:

ثابت کنید معادله ی زیر دارای n جواب حقیقی دوهبه دو متمایز است:

$$f_n(x) = 0$$

دو برهان

برهان اول

بدون کاسته شدن از کلیت استدلال فرض می کنیم: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ چند جمله ای $f_n(x) = 0$ شامل

عبارت جلوی کروه‌ی اول، یعنی $(a_1 - a_2)(a_2 - a_1)$ منفی است. پس $f_n(a_1)f_n(a_2) < 0$. تابع $f_n(x)$ پیوسته است، زیرا یک چندجمله‌ای است. بنابراین، چندجمله‌ای $f_n(x)$ حداقل به ازای یک مقدار بین a_1 و a_2 صفر می‌شود. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود، چندجمله‌ای مذکور در هر یک از فاصله‌های (a_2, a_3) ، (a_3, a_4) ، ... و (a_n, a_{n+1}) حداقل یک ریشه دارد. اما در هر یک از فاصله‌های (a_1, a_2) ، (a_2, a_3) ، ... و (a_n, a_{n+1}) ، معادله‌ی $f_n(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد، نه بیشتر. زیرا در غیر این صورت به تناقض می‌رسیم.

می‌دانیم هر چندجمله‌ای که دارای n ریشه باشد، از درجه‌ی n است. اگر فرض کنیم که یک چندجمله‌ای درجه‌ی n دارای $(x+1)$ ریشه‌ی α_1 ، α_2 ، ...، α_n و α_{n+1} باشد، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}) = 0$$

و این معادله از درجه‌ی $(n+1)$ است (تناقض).

برهان دوم

عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$q(x) = \frac{f_n(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n+1})}$$

$$= \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_{n+1}}$$

خط‌های $x = a_1$ ، $x = a_2$ ، ... و $x = a_{n+1}$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $q(x)$ هستند.

مشتق تابع $q(x)$ نسبت به x چنین است:

$$q'(x) = -\frac{1}{(x - a_1)^2} - \frac{1}{(x - a_2)^2} - \dots - \frac{1}{(x - a_{n+1})^2}$$

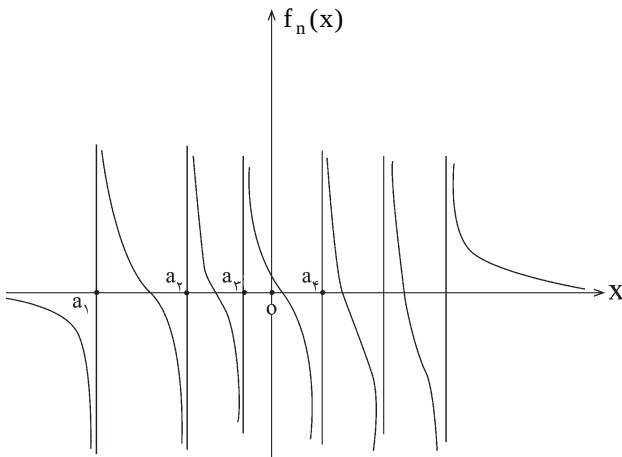
مشتق منفی است و لذا تابع نزولی است.

رفتار تابع را در یکی از فاصله‌ها مثلاً در فاصله‌ی (a_1, a_2) نشان می‌دهیم. تابع در این فاصله نزولی است و دو خط $x_1 = a_1$ و $x_2 = a_2$ دو مجانب نمودار هستند. به ازای $x = a_1 + \varepsilon$ مقدار مثبت بی‌نهایت کوچک فرض می‌شود، مقدار تابع بی‌نهایت بزرگ است. به ازای $x = a_2 - \varepsilon$ مقدار تابع منفی است و قدر مطلق آن بی‌نهایت بزرگ. نتیجه می‌شود که معادله‌ی $f_n(x) = 0$ در فاصله‌ی (a_1, a_2) یک جواب و فقط یک جواب دارد.

معادله‌ی $f_n(x) = 0$ در هر یک از فاصله‌های (a_2, a_3) ،

(a_3, a_4) ، ... و (a_n, a_{n+1}) دارای جواب یکتاست. بنابراین، معادله‌ی موردنظر n جواب دارد.

نمودار معادله به شکل زیر است:



مسئله‌ای در چهارضلعی

چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). نقطه‌ی برخورد دو خط AB و CD را E و نقطه‌ی برخورد دو خط AD و BC را F می‌نامیم.

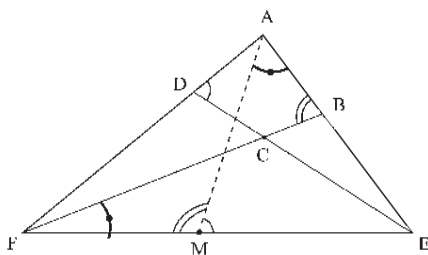
الف) ثابت کنید دایره‌های محیطی دو مثلث ADE و ABF روی خط EF یکدیگر را قطع می‌کنند.

ب) ثابت کنید رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\overline{EA} \cdot \overline{EB} + \overline{FA} \cdot \overline{FD} = \overline{EA}^2 \quad (1)$$

پ) در مثلث ABC، دو ارتفاع BE و CE را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BF} + \overline{CA} \cdot \overline{CE} \quad (2)$$



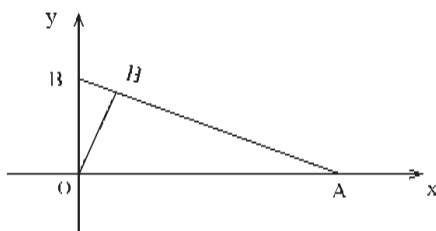
برهان

الف) نقطه‌ی برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ADE را با خط EF نقطه‌ی M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم دو زاویه‌ی ADE و AME روبه‌روی یک کمان‌اند. زاویه‌ی ABF مکمل زاویه‌ی ADE است و زاویه‌ی AMF مکمل زاویه‌ی ADE است. پس دو زاویه‌ی ABF و AMF برابرند. نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M روی دایره‌ی محیطی مثلث ABF قرار دارد.

از رابطه ی ۲، رابطه ی ۱ به دست می آید.

(ب) برهان با هندسه ی تحلیلی: در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه ی $A(a,0)$ و $B(0,b)$ را در نظر می گیریم. طول ارتفاع OH را h می نامیم. می خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (1)$$



در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه ی $A(a,0)$ و $B(0,b)$ را در نظر می گیریم. طول ارتفاع OH را h می نامیم. معادله خط AB چنین است:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

می دانیم که فاصله ی نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ از دستور زیر به دست می آید:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

طول OH، ارتفاع مثلث قائم الزاویه ی OAB را از دستور ۳ حساب می کنیم. این چنین:

$$OH = \frac{\left| \frac{1}{a} \times 0 + \frac{1}{b} \times 0 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \quad (4)$$

از رابطه ی ۴، رابطه ی مطلوب ۱ به دست می آید.

(پ) برهان هندسی: در مثلث قائم الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه است و طول های $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{AH}$ را به ترتیب c ، b و h می نامیم، دو رابطه ی زیر را می نویسیم:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 & (\text{قضیه ی فیثاغورس}) \\ bc = ah & (\text{با به کارگیری مساحت مثلث}) \end{cases}$$

(ب) ثابت می کنیم دو مثلث EAM و EFB متشابهند، زیرا زاویه ی E در هر مثلث مشترک است. دو زاویه ی EMA و EFB برابرند، زیرا در دایره ی محیطی چهارضلعی ABMF، دو زاویه ی یادشده، مقابل به کمان EM قرار دارند. از تشابه این دو مثلث، رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{EA}}$$

از این تساوی رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{EF} \cdot \overline{EM} \quad (3)$$

با همین شیوه ی استدلال، درستی رابطه ی زیر را ثابت می کنیم:

$$\overline{FA} \cdot \overline{FD} = \overline{FM} \cdot \overline{FE} \quad (4)$$

به کمک دو رابطه ی ۳ و ۴، رابطه ی زیر را می نویسیم:

$$\overline{EA} \cdot \overline{EB} + \overline{FA} \cdot \overline{FD} = \overline{EF}^2$$

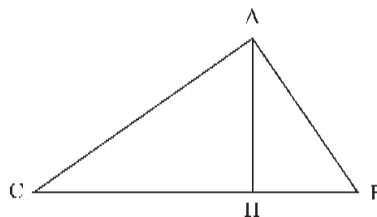
(پ) به کمک حکم پ، رابطه ی ۲ ثابت می شود.

خاصیتی از مثلث قائم الزاویه

می خواهیم یکی از خاصیت های مثلث قائم الزاویه را از سه راه ثابت می کنیم:

قضیه: در مثلث قائم الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه ی زیر بین طول های دو ضلع زاویه ی قائمه و ارتفاع وجود دارد:

$$\frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} \quad (1)$$



برهان

(الف) اثبات با مثلثات: دو رابطه ی زیر را می نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \sin B \\ \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \sin C \end{cases}$$

چون زاویه ی B متمم زاویه ی C است، نتیجه می شود:

$$\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}^2} + \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AC}^2} = \sin^2 B + \cos^2 B = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

می دانیم که فاصله ی نقطه ی $M(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه ی $ax + by + cz = 1$ چنین است:

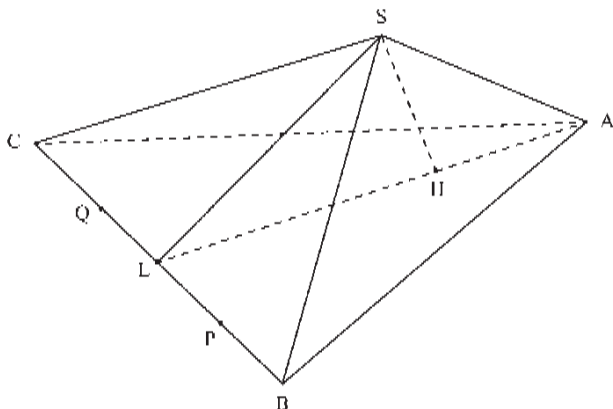
$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3)$$

به کمک دستور ۳، فاصله ی نقطه ی O را از صفحه به معادله ی ۲ حساب می کنیم:

$$\overline{OH} = \frac{\left| \frac{1}{a} \times 0 + \frac{1}{b} \times 0 + \frac{1}{c} \times 0 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \quad (4)$$

از تساوی ۴، رابطه ی مطلوب ۱ به دست می آید.

برهان ۲. چهاروجهی سه قائمه ی $SABC$ ، سه قائمه در رأس S را در نظر می گیریم. چون خط AS بر دو خط SB و SC از صفحه ی $\pi = SBC$ عمود است، پس خط AS بر تمام خط های صفحه ی π از جمله بر خط BC عمود است.



در صفحه ی π ، از نقطه ی S خط SL را بر خط BC عمود می کنیم. از نقطه ی S ، خط SH را بر صفحه ی ABC عمود می کنیم. اکنون می خواهیم ثابت کنیم خط AL ارتفاع مثلث ABC است و نقطه ی H که پای ارتفاع هرم $SABC$ است، روی خط AL قرار دارد. دو نقطه ی P و Q را روی خط BC ، به فاصله های مساوی از نقطه ی L اختیار می کنیم. هرم $ASPQ$ نسبت به صفحه ی ASL متقارن است. برای درک آسان مطلب، نقطه ی A را رأس و مثلث APQ را قاعده ی هرم در نظر بگیریم و توجه داشته باشیم که هرم یاد شده قائم است (خط AS بر قاعده ی SPQ عمود است).

بنابراین، اگر عمود SH را بر صفحه ی APQ وارد کنیم، در صفحه ی ASP قرار می گیرد. نتیجه آن که نقطه ی H ، پای

از دو رابطه ی بالا، رابطه ی زیر حاصل می شود:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

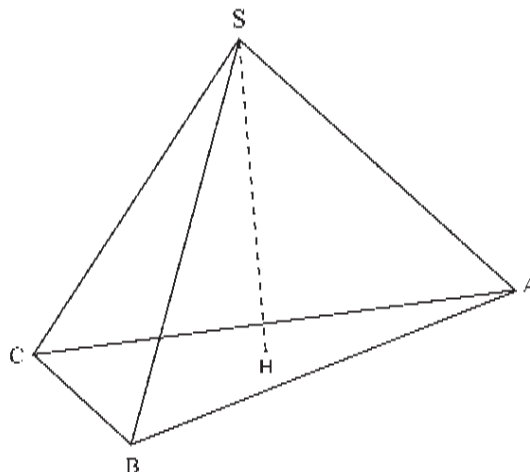
حکمی در چهاروجهی سه قائمه

تعریف چهاروجهی سه قائمه. چهاروجهی $SABC$ را در رأس S ، سه قائمه می نامند؛ اگر هر یک از سه زاویه ی اطراف رأس S یعنی سه زاویه ی ASB ، BSC و CSA قائمه باشند.

حکم چنین است:

چهاروجهی $SABC$ را که در رأس S سه قائمه است، در نظر می گیریم و ارتفاع رأس S را SH می نامیم. ثابت کنید رابطه ی زیر محقق است:

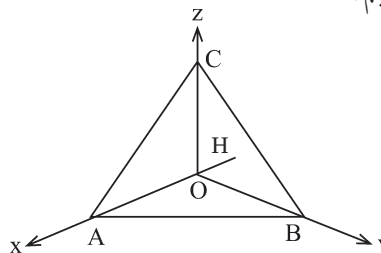
$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \quad (1)$$



برهان ۱.....

الف) برهان با به کارگیری هندسه ی تحلیلی

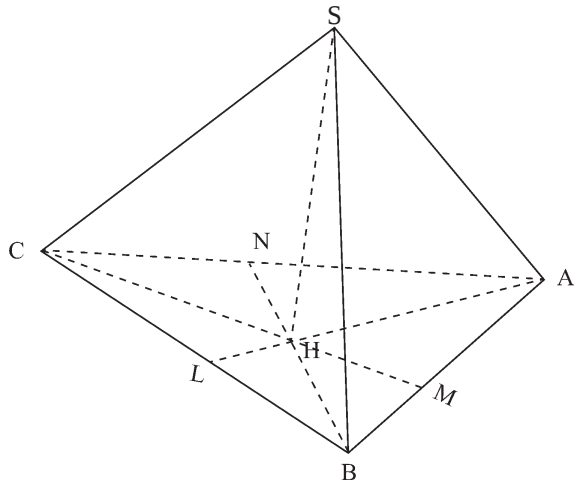
دستگاه مختصات xyz و نقاط $A(a, 0, 0)$ ، $B(0, b, 0)$ و $C(0, 0, c)$ را در نظر می گیریم. عمود OH را بر صفحه ی ABC وارد می کنیم:



معادله ی صفحه ی ABC چنین است:

عمودی که از نقطه ی S بر صفحه ی ABC وارد می شود، بر نقطه ی تقاطع سه ارتفاع مثلث ABC می گذرد.

اکنون رابطه ی ۱ را ثابت می کنیم. در شکل زیر، SABC یک هرم است که زاویه های رأس S قائمه اند.



نقطه ی H، نقطه ی برخورد سه ارتفاع مثلث ABC است. ارتفاع رأس S هرم از نقطه ی H می گذرد. ارتفاع رأس S از مثلث SBC و ارتفاع رأس A از مثلث ABC، یکدیگر را روی خط BC قطع می کنند. (این مطلب در سطری گذشتۀ ثابت شده است).

در دو مثلث قائم الزاویه ی SBC و ASL، به ترتیب رابطه های زیر را می نویسیم:

$$\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{SL^2}$$

$$\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SL^2} = \frac{1}{SH^2}$$

از دو رابطه ی بالا، رابطه ی ۱ به دست می آید.

تبصره

(الف) در مثلث ABC که زاویه ی A قائمه است، این رابطه ی برقرار است:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \quad (۱)$$

برعکس، اگر در مثلث ABC رابطه ی ۱ برقرار باشد، زاویه ی A قائمه است. به عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای آن که در مثلث ABC زاویه ی A قائمه باشد، آن است که رابطه ی ۱ برقرار باشد.

ب) اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه ی زیر برقرار باشد، آیا زاویه ی A قائمه است؟

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \quad (۲)$$

ثابت کردیم، در مثلث ABC که زاویه ی A قائمه و AH ارتفاع است، رابطه ی ۲ برقرار است. عکس این حکم صحیح نیست، یعنی اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه ی ۲ برقرار باشد، زاویه ی A الزاماً قائمه نیست. در سطری آینده، در این باره توضیح می دهیم:

در صفحه ی p، دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A را در نظر می گیریم و پای عمود وارد از نقطه ی A بر خط BC را H می نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه ی A به طوری که رابطه ی ۲ برقرار باشد.

حل. دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می کنیم که محور x ها بر خط BC منطبق باشد و مبدأ آن نقطه ی O وسط پاره خط BC باشد. طول پاره خط AB را ۲a فرض می کنیم. رابطه ی ۲ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \quad (۳)$$

معادله ی ۳ پس از عمل های جبری متعددی، به صورت زیر در می آید:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) = 0 \quad (۴)$$

از معادله ی ۴ نتیجه می شود:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (۵)$$

یا

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0 \quad (۶)$$

نمودار معادله ی ۵ دایره ای به قطر BC است و نمودار ۶، یک هذلولی متساوی الساقین با رأس های B و C است. پس مکان هندسی نقطه ی A که در رابطه ی ۲ صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره ای به قطر BC و هذلولی متساوی الساقینی با دو رأس B و C. نمودار معادله ی ۴ در شکل زیر رسم شده است.

