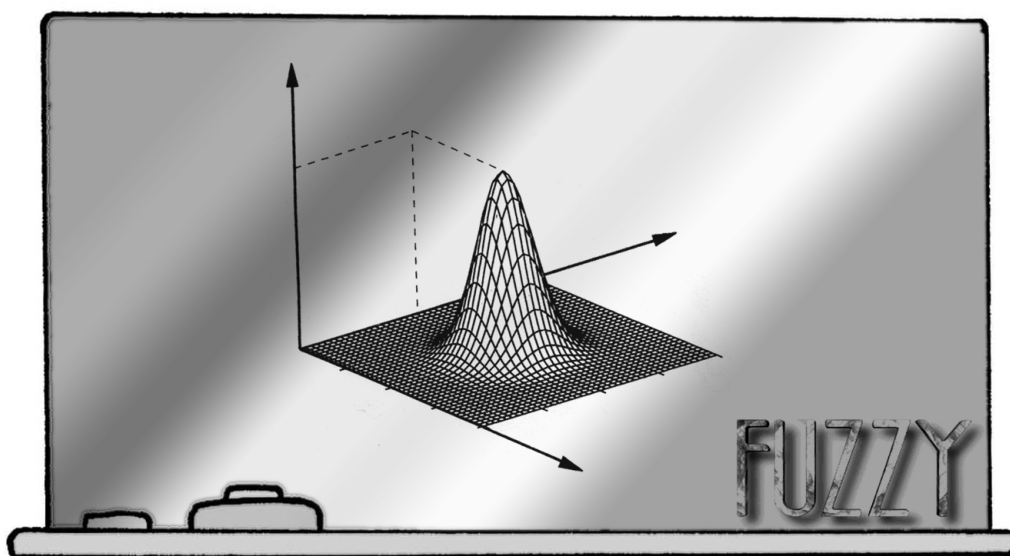




نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

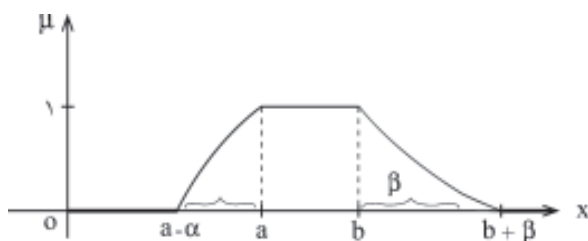
سرآغاز

مغز انسان مملو از مفاهیم فازی است. انسان با مجموعه‌های فازی فکر می‌کند و هر کدام از مرزهای فازی خود را با روش‌های متفاوت تعریف و مشخص می‌کند. اجزای جهان را در قالب مجموعه‌های فازی انباشته می‌کند و سپس به استدلال روی آن‌ها می‌پردازد. این همان چیزی است که به منطق فازی شهرت دارد. این منطق، رایانه‌ها را به فکر کردن روی مجموعه‌های فازی وامی‌دارد و به پیشرفتی می‌انجامد که نتیجه‌ی آن قدرت استدلال رایانه‌ها به کمک مجموعه‌های فازی است. در جهان، هر چیزی درجه‌بندی شده است. حتی اعداد که بیانگر دقت هستند، می‌توانند به شکل فازی مدل‌سازی شوند و اعداد فازی را پدید آورند. درواقع منظور از منطق فازی، استدلال کردن با اعداد فازی و مجموعه‌های فازی است. در این حالت، باید بتوانیم رایانه‌ای طراحی کنیم که قادر باشد با اعداد فازی در قالب جملات شرطی به صورت اگر-آن‌گاه یا قوانین تجربی، به استدلال بپردازد. مجموعه‌های فازی زمانی مطرح می‌شوند که یک مرز مبهم و نامشخص وجود داشته باشد. در این حالت، بین بودن (A) و نبودن (نه A) یک تلاقی رخ می‌دهد و این حالت نمی‌تواند با منطق دو ارزشی

تفسیر شود. برای مثال، کلاسی را در نظر بگیرید که در آن معلم از دانش‌آموزان سؤالاتی از این قبیل می‌پرسد: کدام یک از شما گرم‌تان است؟ کدام یک خوش حال هستید؟ چه کسانی خود را موفق و خوش بخت می‌دانند؟ چند نفر از شما قد بلند هستید؟ کدام‌تان برای امتحان آمادگی دارید؟...

در این حالت، اگر برخی از محصلان دست‌های خود را کامل بالا ببرند و برخی اصلاً بالا نبرند و هم‌چنین برخی دست‌های خود را کمی بالا ببرند و برخی نیز نه به‌طور کامل بالا ببرند، نمی‌توان با یک قانون دقیق و قطعی، حد فاصلی برای احساس گرما کردن یا نکردن، خوش حال بودن یا نبودن، موفق بودن یا نبودن و امثال آن‌ها قائل شد. تنها در محیط منطق فازی می‌توان این مفاهیم را بررسی کرد. در این بحث، ابتدا عدد فازی نوع LR را معرفی و در ادامه یکی از اصول بنیادین نظریه‌ی مجموعه‌های فازی با عنوان «اصل گسترش»^۱ را مطرح می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که یک عدد فازی، مجموعه‌ی فازی روی خط حقیقی با تابع عضویت پیوسته، محدب، نرمال و تکیه‌گاهی کران‌دار است. در این حالت، مقدار تابع عضویت در خارج از بازه‌ای چون $[c, d]$ صفر است و دو عدد حقیقی a



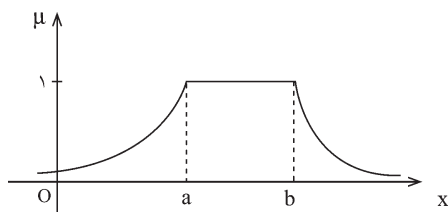
شکل ۳ نمونه‌ای از یک عدد فازی LR با تکیه‌گاه کران‌دار

هم‌چنین، در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه فازی) دارای نمایش کلی زیر باشد، $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}) & x \leq a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & x \geq b \end{cases}$$

که در آن $L: [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ و $R: [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$ هستند.

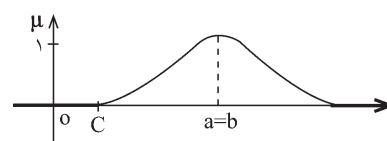
در این حالت نیز، مشابه حالت قبل، عدد فازی $\tilde{A}$ را به صورت $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۴).



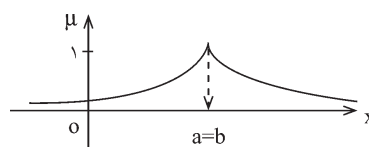
شکل ۴ نمونه‌ای از یک عدد فازی نوع LR با تکیه‌گاه بی‌کران

گاهی اوقات عدد فازی از نوع LR را چون به‌ازای کلیه‌ی مقادیر موجود در $[a, b]$ دارای درجه‌ی عضویت یک است، بازه‌ی فازی از نوع LR هم می‌گویند. در حالت خاص، اگر $a = b = m$ یعنی در حالتی که فقط در یک نقطه مقدار تابع عضویت یک باشد، به عدد فازی نوع LR، شبه مثلی نیز می‌گویند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$. اعداد فازی مثلی و دوزنقه‌ای که قبلاً معرفی شدند، حالت‌های

b وجود دارند که $c \leq a \leq b \leq d$ و تابع عضویت روی $[c, a]$ به‌طور یکنواخت صعودی و روی $[b, d]$ به‌طور یکنواخت نزولی است. در این حالت، مقدار تابع عضویت به‌ازای هر $x \in [a, b]$ یک است (شکل ۱). در صورتی که تکیه‌گاه مجموعه‌ای بیکران باشد، در برخی از کتاب‌های فازی، به آن عدد شبه فازی^۲ گفته می‌شود. در این حالت، اعداد حقیقی a و b که $a \leq b$ وجود دارند که برای هر $x \in [a, b]$ ، مقدار تابع عضویت یک است. هم‌چنین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ (شکل ۲).



شکل ۱ نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه کران‌دار



شکل ۲ نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه فازی)

تعریف: در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ (با تکیه‌گاه کران‌دار) دارای نمایش کلی زیر باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}) & a-\alpha \leq x \leq a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & b \leq x \leq b+\beta \end{cases}$$

که در آن $L: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ و $R: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ موسوم به توابع مرجع یا توابع شکل^۳ هستند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$.

به دو عدد مثبت α و β به‌ترتیب پهنا (یا گستره)ی چپ و پهنای راست می‌گوییم. تکیه‌گاه عدد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت $\text{Sup} \tilde{A} = (a - \alpha, b + \beta)$ است (شکل ۳).

خاصی از اعداد فازی نوع LR هستند. در صورتی که در تعریف فوق $\alpha = \beta = 0$ ، عدد $\tilde{A} = (a, b, 0, 0)_{LR}$ یک بازه ی قطعی (همان بازه ی $[a, b]$) و در صورتی که در این حالت $a = b = m$ عدد $\tilde{A} = (m, m, 0, 0)_{LR}$ یک عدد قطعی (همان عدد حقیقی m) است.

نمونه هایی از ضابطه ی توابع مرجع L و R عبارت اند از: L برای معرفی تابع طرف چپ و R برای معرفی تابع طرف راست استفاده می شود.

$\frac{1}{1+x^2}$ و $\max\{0, 1-x^p\} (p > 0)$ و e^{-x} و e^{-x^2} در حالتی که $L(x) = R(x) = \max\{0, 1-x\}$ عدد فازی نوع LR همان عدد فازی دوزنقه ای را مشخص می کند که اگر $a = b = m$ این عدد همان عدد فازی مثلثی است.

اعمال روی اعداد فازی نوع LR (در حالت شبه مثلثی)

فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی نوع LR به صورت کلی $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{B} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ باشند. در این صورت، جمع و تفریق این دو عدد فازی و نیز قرینه ی یک عدد فازی نوع LR به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$$

$$-\tilde{A} = (-m, \beta, \alpha)_{LR}$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{LR}$$

لازم به ذکر است، ضرب و تقسیم دو عدد فازی نوع LR لزوماً به صورت یک عدد فازی نوع LR نیست، ولی به صورت تقریبی می توان آن ها را با یک عدد فازی نوع LR برابر گرفت. برای نمونه در زیر، ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تعریف شده اند. برای عمل تقسیم، علاقه مندان می توانند به کتاب های مرجع فازی نظیر مرجع ۵ مراجعه کنند.

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} \approx \begin{cases} (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)_{LR} & \text{اگر } \tilde{A}, \tilde{B} > 0 \\ (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{LR} & \text{اگر } \tilde{B} > 0, \tilde{A} < 0 \\ (mn, -n\beta - m\delta, -n\alpha - m\gamma)_{LR} & \text{اگر } \tilde{A}, \tilde{B} < 0 \end{cases}$$

ملاحظه می شود، ضرب این دو عدد فازی تعریف پیچیده تری دارد و به مثبت یا منفی بودن عدد وابسته است. به این ترتیب، اگر عدد فازی مثبت یا منفی نباشد، ضرب آن ها قابل تعریف نیست. حالت کلی اعمال روی اعداد فازی نوع LR در کتاب های پیشرفته ی مجموعه های فازی مطرح شده اند که به علت پیچیدگی، در این مقاله بررسی نمی شوند.

مثال: فرض کنید $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و

$\tilde{A} = (1, 0, 5, 0)_{LR}$ و $\tilde{B} = (2, 0, 6, 0)_{LR}$ در این حالت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{1-x}{0.5}) = \frac{1}{1+(\frac{1-x}{0.5})^2} = \frac{1}{1+4(1-x)^2} & x \leq 1 \\ R(\frac{x-1}{0.5}) = \frac{1}{1+(\frac{x-1}{0.5})^2} = \frac{1}{1+4(x-1)^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

به همین ترتیب:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+25(2-x)^2} & x \leq 2 \\ \frac{1}{1+25(x-2)^2} & x \geq 2 \end{cases}$$

هم چنین:

$$-\tilde{B} = (-2, 0, 2, 0)_{LR}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (1, 0, 5, 0)_{LR} \oplus (2, 0, 6, 0)_{LR} = (3, 1, 1, 1)_{LR}$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (1, 0, 5, 0)_{LR} \ominus (2, 0, 6, 0)_{LR} = (-1, 0, 7, 1)_{LR}$$

و با توجه به مثبت بودن هر دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهیم داشت:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (1, 0, 5, 0)_{LR} \otimes (2, 0, 6, 0)_{LR} \approx (2, 1, 6, 1)_{LR}$$

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و یک ابزار مهم در نظریه ی مجموعه های فازی است که به کمک آن می توان مفاهیم کلاسیک ریاضی را به محیط فازی تعمیم داد. در آنالیز ریاضی، مفاهیمی نظیر تابع، مشتق و انتگرال را می توان به کمک اصل گسترش، به حالت فازی گسترش داد. این اصل اولین بار توسط لطفی عسگرزاده مطرح و سپس توسط جین^۳ و دوبویس^۴ و پرید^۵ مورد استفاده قرار گرفت.

اصل گسترش: فرض کنیم، X و Y مجموعه های قطعی باشند و f نگاشتی از X به Y باشد $(f: X \rightarrow Y)$ به طوری که برای $x \in X$ ، $f(x) = y \in Y$ فرض کنیم $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه ی فازی X باشد. در این صورت، تابع عضویت $f(\tilde{A})$ به عنوان یک زیرمجموعه ی فازی از Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ به معنای تصویر معکوس عضو y در Y

است، یعنی:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$$

لازم به ذکر است، نماد Sup به معنای کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه و «سوپرمم» خوانده می‌شود. مثلاً سوپرمم مجموعه‌ی $[0, 1]$ عدد ۱ است و سوپرمم مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ عدد ۴ است.

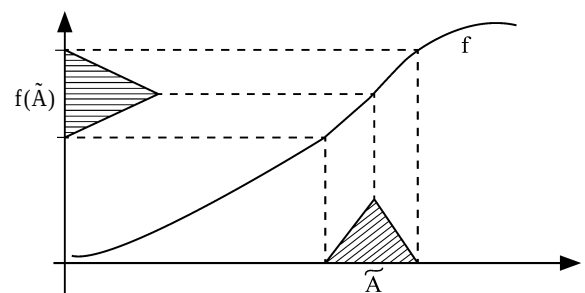
در صورتی که سوپرمم یک مجموعه عضو همان مجموعه باشد، این عدد همان ماکزیمم مجموعه خواهد بود. هم‌چنین اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، سوپرمم همان ماکزیمم یعنی بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه خواهد بود. به این ترتیب، اگر مجموعه‌ی $f^{-1}(y)$ متناهی باشد، نماد Sup در صورت اصل گسترش مذکور در بالا، به نماد Max تبدیل می‌شود. هم‌چنین، اگر نگاشت f اکیداً یک‌نوا باشد، چون در این حالت اعضای موجود در برد f (R_f) تنها تصویر یک عضو از X هستند، لذا $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است و می‌توان نماد Sup یا Max را برداشت و تابع عضویت را در اصل گسترش

به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)) & y \in R_f \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$R_f = \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\}$$

به عبارت دیگر، اگر f نگاشتی یک به یک باشد، برای $y \in R_f$ داریم: $\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$ و اگر f یک به یک نباشد، چون دو یا چند مقدار متمایز در X می‌تواند به عنوان تصویر معکوس عضو $y \in Y$ نگاشته شود، بین مقادیر تابع عضویت $\tilde{A}$ در نقاط موجود در تصویر معکوس y ، مقدار بزرگ‌تر را به تابع عضویت $f(\tilde{A})$ در y نسبت می‌دهیم. شکل زیر، عملکرد اصل گسترش را در حالتی که f تابعی صعودی است، نمایش می‌دهد.



شکل ۵ اصل گسترش برای یک تابع صعودی یک‌نواخت

مثال ۱: فرض کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی با تابع عضویت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این تابع عضویت بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۳ است که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|3-x|}{2} & |3-x| \leq 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با توجه به این که $\text{Supp } \tilde{A} = (1, 5)$ و به ازای مقادیر موجود در این بازه تابع f یک به یک است و چون $y = x^2$ لذا $x = \sqrt{y}$ که $y \geq 0$ یعنی: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. به این ترتیب، بنابر اصل گسترش داریم:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}(\sqrt{y}), \quad y \geq 0$$

به این ترتیب:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}-1}{2}, & 1 \leq y \leq 9 \\ \frac{5-\sqrt{y}}{2}, & 9 \leq y \leq 25 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

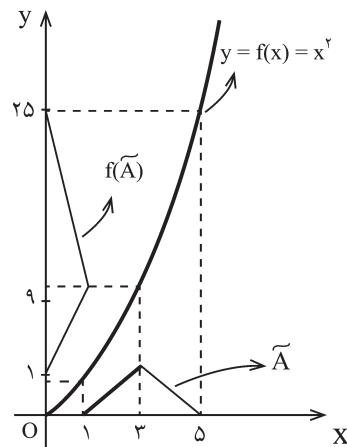
که می‌توان آن را به صورت زیر نیز خلاصه کرد:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|\sqrt{y}-3|}{2}, & |\sqrt{y}-3| \leq 2, y \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۹ است. عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = (3, 2, 2)$ و عدد فازی مثلثی $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ به صورت

$\tilde{B} = (9, 8, 16)$ است.

البته نمی توان گفت همواره یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه ای به یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه ای تصویر می شود و این به ضابطه ی تابع f و خواص این تابع وابسته است. شکل زیر، نتیجه ی اجرای اصل گسترش را روی مثال فوق مشخص می کند. در این حالت می توان نوشت: $f(\tilde{A}) = \tilde{A}^2$.



شکل ۶ اعمال اصل گسترش در مثال ۱

مثال ۲: فرض کنیم $\tilde{A} = \{(-1, 0/5), (0, 0/8), (1, 1), (2, 0/4)\}$ و $y = f(x) = x^2$ در این حالت $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ و $y \in \{1, 0, 4\}$. بنابراین $f^{-1}(y)$ مجموعه ای متناهی برای هر کدام از مقادیر y خواهد بود. در این حالت:

$$\text{اگر } y = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \{-1, 1\} \Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(1) = \text{Max} \mu_{\tilde{A}}(x) \\ x \in f^{-1}(y)$$

$$= \text{Max} \{ \mu_{\tilde{A}}(-1), \mu_{\tilde{A}}(1) \} = \text{Max} \{ 0/5, 1 \} = 1$$

$$\text{اگر } y = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = \{0\} \Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(0) = \mu_{\tilde{A}}(0) = 0/8$$

$$\text{اگر } y = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = \{2\} \Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(4) = \mu_{\tilde{A}}(2) = 0/4$$

به این ترتیب:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0, 0/8), (1, 1), (4, 0/4)\}$$

نکته: اگر $\lambda \neq 0$ ، عدد حقیقی و $f(x) = \lambda x$ تابعی خطی و $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد، چون $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} y$ بنابر اصل گسترش:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \text{Sup} \{ \mu_{\tilde{A}}(x) | \lambda x = y \} = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

در این حالت می توان نوشت:

$$f(\tilde{A}) = \lambda \tilde{A}$$

مثلاً به ازای $\lambda = 5$ خواهیم داشت:

$$y = f(x) = 5x \Rightarrow x = \frac{y}{5}$$

$$\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{y}{5}\right)$$

حال اگر $\tilde{A}$ همان عدد فازی مثال ۱ باشد، با جای گذاری

$\frac{y}{5}$ به جای x در ضابطه ی تابع عضویت $\tilde{A}$ خواهیم داشت:

$$\mu_{5\tilde{A}}(y) = \begin{cases} \frac{y-5}{10}, & 5 \leq y \leq 15 \\ \frac{25-y}{10}, & 15 \leq y \leq 25 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۱۵ است. به این ترتیب، طبق اصل گسترش عدد فازی $\tilde{A} = (3, 2, 2)$ (تقریباً ۳) تحت تابع f با ضابطه ی $f(x) = 5x$ به عدد فازی $\tilde{B} = f(\tilde{A}) = (15, 10, 10)$ نگاشته می شود.

نکته: اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد و $f(x) = 0 \cdot x = 0$

آن گاه تابع عضویت عدد فازی $0 \cdot \tilde{A}$ بنابر اصل گسترش به صورت زیر به دست می آید:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{0 \cdot \tilde{A}}(y) = \text{Sup} \{ \mu_{\tilde{A}}(x) | 0 \cdot x = y \} = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

یعنی: $0 \cdot \tilde{A} = \tilde{0}$

اصل گسترش یک صورت کلی تر دارد که در آن f روی حاصل ضرب دکارتی n مجموعه مرجع قطعی در نظر گرفته می شود. علاقه مندان می توانند برای مطالعه ی بیشتر روی این اصل، به مراجع مذکور در انتهای مقاله مراجعه کنند. در قسمت بعد، مباحثی دیگر از منطق فازی را می آوریم.

پی نوشت: * عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

1. Extension Principle
2. Quasi Fuzzy number
3. Shape (Refrence) function
4. Dubois
5. prade

منابع:

۱. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.
۲. کاسکو، بارت. تفکر فازی. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. چاپ اول. ۱۳۷۷.
3. Fuller, R. Fuzzy Reasoning and Fuzzy optimization. Turko centre for Computer science, Abo, 1998.
4. Zimmermann H. J., Fuzzy Sets theory and its applications. 3rd edition. Kluwer Academic Publishers. 1996.
5. Dubois D. & Prade H., Fuzzy set and systems. theory and applications. Academic Press, Inc. 1980.