● شهین بهنیا
دبیر ریاضی دبیرستان‌های چهاردانگه

انتگرال‌گیری جدولی

اشاره

در این مقاله به انتگرال‌گیری به روش جدولی پرداخته و سعی بر این است که در جدول‌ها، با استفاده از مشتق‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم و نیز انتگرال‌های ساده به جواب برسیم. این روش برای به‌جواب رسیدن در انتگرال‌هایی مناسب است که به‌صورت حاصل‌ضربی از دو عامل ضربی نوشته می‌شوند. بدین‌ترتیب، هنر خوب یاد گرفتن و خوب یاد دادن را می‌آموزیم و نشان می‌دهیم که ریاضی نیز علمی زیبا و فهمیدنی است؛ البته اگر با بردباری، پشتکار و امید به یادگیری آن بپردازیم و همواره در پی آموختن مطالب جدید باشیم.

انتگرال جدولی راهی برای پیدا کردن سریع جواب انتگرال‌هاست. هم‌چنین سرچشمه‌ای برای استخراج قاعده‌های مهم آنالیز و تابع اولیه است. این انتگرال‌گیری بر «جمع انتگرال‌های متوالی» استوار است و با استفاده از آن می‌توان حاصل $\int F(t)G(t)dt$ را به‌دست آورد. این روش ما را از انجام اعمال جبری خسته‌کننده برای به‌دست آوردن حاصل این انتگرال‌ها بی‌نیاز می‌سازد.

ستون دوم	ستون اول
G	$+F$
$G^{(-1)}$	$-F^{(1)}$
$G^{(-2)}$	$+F^{(2)}$
$G^{(-3)}$	$-F^{(3)}$
$\vdots$	$\vdots$
$G^{(-n)}$	$(-1)^n F^{(n)}$
$G^{(-n-1)}$	$(-1)^{n+1} F^{(n+1)} \dots$

همان‌گونه که این طرح در جدول دیده می‌شود، در ستون اول، $F(t)$ و مشتق‌های متوالی آن با افزودن جمع و منهای متناوب در کنار آن نوشته می‌شود. پس $F^{(1)}$ مشتق اول تابع و $F^{(2)}$ مشتق دوم تابع و $F^{(3)}$ مشتق سوم تابع و... و $F^{(n)}$ مشتق nام تابع را در ستون اول نشان می‌دهد.

در ستون دوم جدول، $G(t)$ و انتگرال‌های متوالی آن دیده می‌شود. $G^{(-1)}$ انتگرال اول تابع و $G^{(-2)}$ انتگرال دوم و به همین صورت تا $G^{(-n)}$ که انتگرال nام $G(t)$ است. در این انتگرال‌گیری متوالی، عددهای ثابت را به حساب نمی‌آوریم و آن‌ها را در حاصل نهایی به‌صورت عدد C ثبت می‌کنیم. در نهایت جواب انتگرال با جمع حاصل‌ضرب‌هایی که در جدول به‌صورت خطوط مایل نشان داده شده‌اند، به‌دست می‌آید. پس به‌صورت نمادین می‌توان نوشت:

$$\int F(t)G(t)dt = FG^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)} + \cdots$$
$$+(-1)^n F^{(n)}G^{(-n-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k F^k G^{(-k-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$

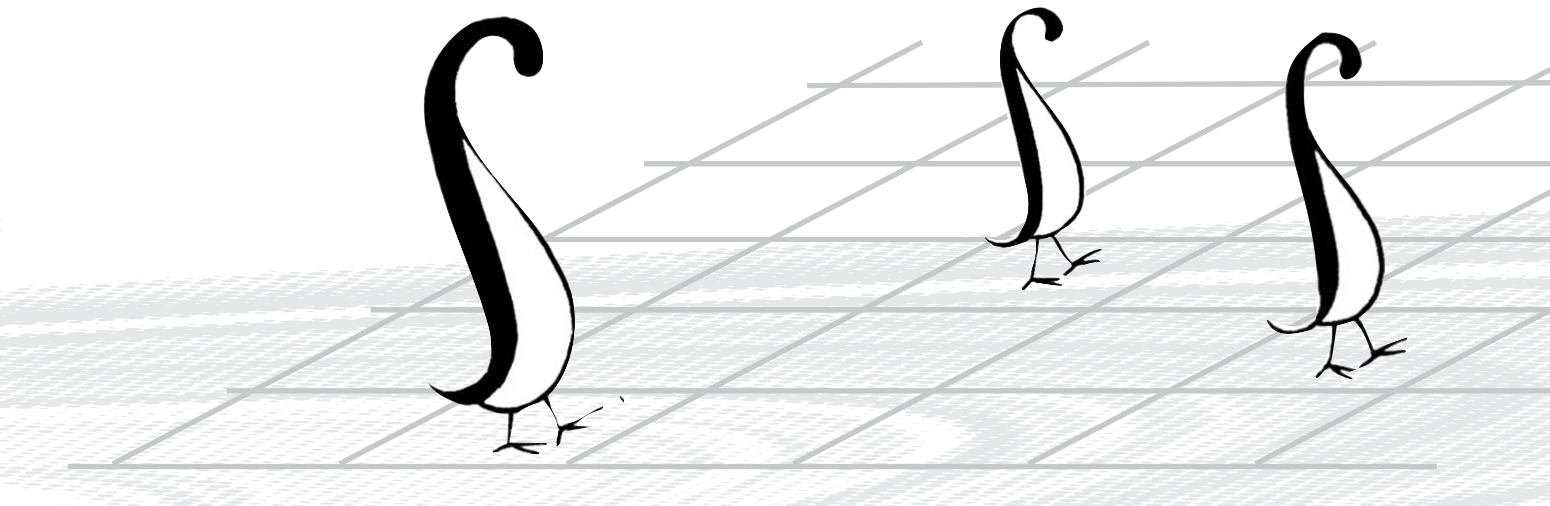
مثال ۱. حاصل $\int x^2 \sin x dx$ را به‌دست آورید.

حل: در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = x^2$$
$$G(x) = \sin x$$

و می‌دانیم که:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{و} \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$



ستون اول (مشتق‌های متوالی $x^{۲}$ تا صفر)	ستون دوم (انتگرال‌های متوالی $\sin x$)
$+F(x) = x^{۲}$	$G(x)=\sin x$
$-F^{(۱)} = ۲x$	$G^{(-۱)} = -\cos x$
$+F^{(۲)} = ۲$	$G^{(-۲)} = -\sin sx$
$-F^{(۳)} = ۰$	$G^{(-۳)} = \cos x$

وقتی در ستون اول به صفر می‌رسیم، کار انتگرال‌گیری به پایان رسیده است، پس داریم:

$$\int x^{۲} \sin x dx = F(x)G^{(-۱)} - F^{(۱)}G^{(-۲)} + F^{(۲)}G^{(-۳)}$$

$$= -x^{۲} \cos x + ۲x \sin x + ۲ \cos x + c$$

با توجه به این که:

$$G^{(-۱)} = \int G(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

ولی همان‌طور که گفتیم، ثابت انتگرال (C) را در هریک از مراحل انتگرال‌گیری نادیده می‌گیریم. پس $G^{(-۱)} = \cos x$ را در جدول می‌نویسیم و به همین ترتیب برای $G^{(-۲)}$ و $G^{(-۳)}$ عمل می‌کنیم که در جدول نوشته‌ایم. البته این مقدار ثابت در حاصل نهایی انتگرال نوشته شده است.

مثال۲. حاصل $\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}} dx$ را به‌دست آورید.

حل: در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = ۳x - ۲$$
$$G(x) = (\sqrt{x})^{-۱}$$

و می‌دانیم که:

$$\int x^{n} = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + C$$

ستون اول (مشتق‌های متوالی $۳x-۲$ تا صفر)	ستون دوم (انتگرال‌های متوالی $\sqrt{x}$)
$+F(x) = (۳x-۲)$	$G(x) = (\sqrt{x})^{-۱} = x^{\frac{-۱}{۲}}$
$-F^{(۱)} = ۳$	$G^{(-۱)} = \frac{x^{\frac{-۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}} = ۲x^{\frac{۱}{۲}}$
$+F^{(۲)} = ۰$	$G^{(-۲)} = ۲\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$

پس داریم:

$$\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}} dx = (۳x-۲)(۲x^{\frac{۱}{۲}}) - ۳(\frac{۴}{۳}x^{\frac{۳}{۲}})$$

$$= (۳x-۲)(۲\sqrt{x}) - ۴x\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x}(۲x-۴) + C$$

مثال۲. حاصل $\int x^{۲}e^{x}dx$ را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم که: $\int e^{x}dx = e^{x} + C$ در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = x^{۲}$$
$$G(x) = e^{x}$$

ستون اول (مشتق‌های متوالی $x^{۲}$ تا صفر)	ستون دوم (انتگرال‌های متوالی e^{x})
$+ \quad x^{۲}$	e^{x}
$- \quad ۲x$	e^{x}
$+ \quad ۲$	e^{x}
$- \quad ۰$	e^{x}

پس داریم :

$$\int x^{2}e^{x}dx = x^{2}e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x} + C$$
$$= e^{x}(x^{2} - 2x + 2) + C$$

مثال۴. حاصل $\int e^{x}\sin x dx$ را محاسبه کنید.

حل: در نظر می‌گیریم :

$F(x) = \sin x$

$G(x) = e^{x}$

ستون اول	ستون دوم
$+ \quad \sin x$	e^{x}
$- \quad \cos x$	e^{x}
$+ \quad (-\sin x)$ *	e^{x}
	e^{x}

* $e^{x}\sin x$ خود عبارت انتگرال است.

توجه کنید، در این مثال با رسیدن به عبارت انتگرال اصلی، دیگر عمل انتگرال‌گیری را ادامه نمی‌دهیم و برای نوشتن حاصل داریم :

$$\int e^{x}\sin x dx = e^{x}\sin x - e^{x}\cos x - \int e^{x}\overset{*}{\sin} x dx$$
$$\left(\int e^{x}\sin x dx + \int e^{x}\sin x dx\right) = e^{x}\sin x - e^{x}\cos x$$
$$\int e^{x}\sin x dx = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$$

مثال۵. حاصل $\int \frac{12t^{2} + 36}{\sqrt[5]{3t + 2}}dt$ را محاسبه کنید.

حل: داریم :

$F(t) = 12t^{2} + 36$

$G(x) = (3t + 2)^{\frac{-1}{5}}$

مشتق‌های متوالی $12t^{2}+36$ تا صفر	ستون اول	ستون دوم	انتگرال‌های متوالی $(3t+2)^{\frac{-1}{5}}$
	$+12t^{2} + 36$	$(3t + 2)^{\frac{-1}{5}}$	
	$-24t$	$\frac{5}{12}(3t + 2)^{\frac{4}{5}}$	
	$+24$	$\frac{25}{324}(3t + 2)^{\frac{9}{5}}$	
	0	$\frac{125}{13608}(3t + 2)^{\frac{14}{5}}$	

پس داریم :

$$\int \frac{12t^{2} + 36}{\sqrt[5]{3t + 2}}dt = (5t^{2} + 15)(3t + 2)^{\frac{4}{5}}$$
$$- \frac{50t}{27}(3t + 2)^{\frac{9}{5}} + \frac{125}{567}(3t + 2)^{\frac{14}{5}} + C$$

تمرین انتگرال‌های زیر را با همین روش محاسبه کنید.

۱) $\int (5x^{2} + 2)\cos x dx$

۲) $\int e^{x}(-x^{3} + 2x - 1)dx$

۳) $\int \frac{5x^{2} + 6x}{2\sqrt{x}}dx$

۴) $\int \sin x\left(\frac{x^{3} - 1}{2}\right)dx$

منابع

1. www.matharticles.com

۲. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج ۱).

لطیفه

روزی عده‌ای از مهندسان می‌خواستند ارتفاع میله‌ی پرچم را اندازه‌گیری کنند و چون فقط متر داشتند و نمی‌توانستند آن را جایی بند کنند، مانده بودند که چه کنند. در همین حال ریاضی‌دانی از آن‌جا عبور می‌کرد از او کمک خواستند و گفت این که خیلی آسان است و میله‌ی پرچم را از جای درآورد و روی زمین گذاشت و طول آن را با متر اندازه گرفت، بعد از رفتن او یکی از مهندسان گفت، این ریاضی‌دان‌ها چه قدر بامزه هستند، ما می‌خواستیم ارتفاع میله را حساب کنیم، او طول آن را به ما گفت.