

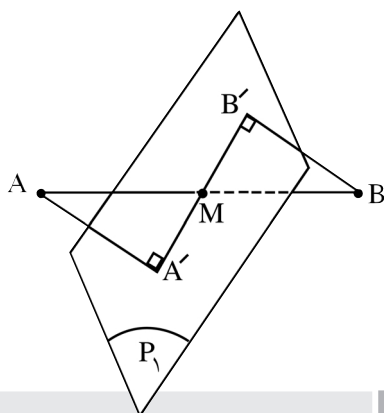


## رویکرد هندسی، رویکرد جبری-مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره: یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است. (از استانداردهای موضوعی (NCTM)

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری-مختصاتی در آموزش هندسه برخی از راهبردهای مهم برای حل مسأله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم، در ضمن لازم است گفته شود مسأله‌هایی را که با این دو رویکرد حل می‌کنیم، مسأله‌هایی از کتاب درسی هندسه‌ی ۱ و هندسه‌ی ۲ هستند، تا دانش‌آموزان بتوانند، مسائل دیگر این کتاب‌ها را با این دو رویکرد حل کنند.



شکل الف

دسته‌ی دوم، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که با خط AB (راستای AB) موازی است. صفحه‌ی  $P_2$  در شکل «ب» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰. آیا برای دو نقطه‌ی متمایز A و B و خط L، صفحه‌ای وجود دارد که بر L بگذرد و A و B از آن به یک فاصله باشند؟ در حالت‌های گوناگون چند جواب وجود دارد؟ مسئله را با روش هندسی و جبری-مختصاتی حل می‌کنیم.

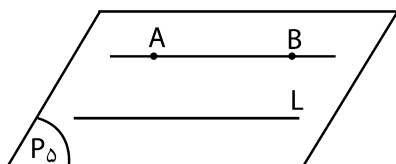
### روش هندسی

در مثال ۵ دیدیم، دو مجموعه صفحه وجود دارند که دو نقطه‌ی A و B از آن‌ها به یک فاصله اند:

دسته‌ی اول، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرند. صفحه‌ی  $P_1$  در شکل «الف» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.

که همان جواب های مشخص شده در شکل هایی (پ) و (ت) هستند.

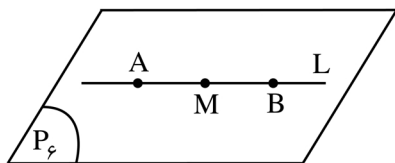
۲. اگر خط  $AB$  موازی با خط  $L$  و متمایز از آن باشد (یعنی منطبق بر  $L$  نباشد)، مسئله بی شمار جواب دارد که صفحه های گذرنده بر  $L$  (دسته صفحه های گذرنده بر خط  $L$ ) هستند. یکی از این صفحه ها، صفحه ای است که بر خط  $L$  و خط  $AB$  می گذرد. زیرا صفحه ای که بر خط  $L$  و نقطه ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  می گذرد، شامل خط  $AB$  نیز می شود. در شکل، خط  $AB$  بر صفحه ی  $P_5$  واقع است، چون بنا به قضیه ای داریم: «اگر خطی موازی یک صفحه و از جمله روی آن صفحه باشد و از یک نقطه روی صفحه، خطی موازی آن رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می گیرد.»



شکل ث

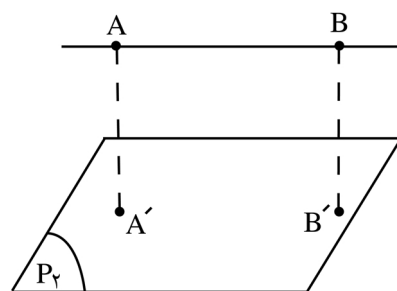
در این حالت، فاصله ی دو نقطه ی  $A$  و  $B$  از صفحه ی گذرنده بر  $L$  و  $AB$ ، مساوی صفر است. در مورد بقیه ی صفحه ها این فاصله های مساوی صفر نیستند. بنابراین، در این حالت مسئله بی شمار جواب دارد.

۳. اگر خط  $AB$  روی خط  $L$  باشد، مسئله بی شمار جواب دارد. در واقع در این حالت تمام صفحه های گذرنده بر  $L$  (یا  $AB$ ) جواب مسئله هستند. صفحه ی  $P_6$  در شکل «ج» یکی از این بی شمار صفحه را نشان می دهد. در این حالت، فاصله ی دو نقطه ی  $A$  و  $B$  از هر یک از صفحه های گذرنده بر  $L$ ، مساوی صفر است.



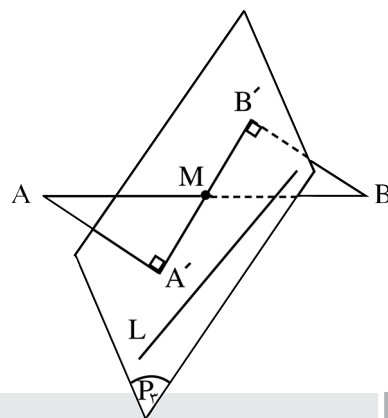
شکل ج

۴. اگر خط  $AB$  موازی  $L$  نباشد، اما نقطه ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  روی خط  $L$  باشد، یعنی در واقع خط  $AB$  و خط  $L$ ، در نقطه ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  متقاطع باشند، هر صفحه ای که بر خط  $L$  بگذرد، جواب مسئله است. یکی از این صفحه ها،



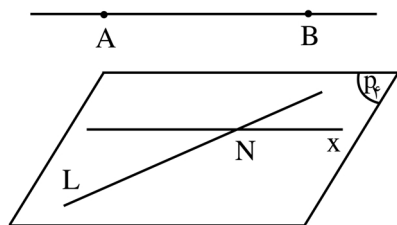
شکل ب

با توجه به این مطلب، در حالت کلی دو صفحه جواب مسئله هستند: یکی صفحه ای که بر خط  $L$  و نقطه ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  می گذرد. این صفحه را  $P_3$  می نامیم. شکل پ آن را نشان می دهد.



شکل پ

صفحه ی دیگر بر خط  $L$  می گذرد و با خط  $AB$  موازی است. برای رسم این صفحه از یک نقطه ی دل خواه مانند  $N$  واقع بر خط  $L$ ، خط  $Nx$  را موازی  $AB$  رسم می کنیم. صفحه ی  $P_4$  که بر دو خط متقاطع  $L$  و  $Nx$  می گذرد، جواب دیگر مسئله است (شکل ت).

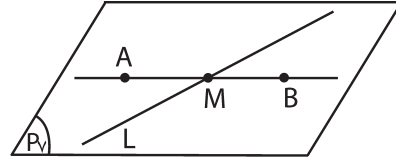


شکل ت

**بحث:** با توجه به وضع خط  $AB$  و خط  $L$  و نقطه ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  این حالت ها را خواهیم داشت:

۱. اگر خط  $AB$  موازی خط  $L$  نباشد و نقطه ی  $M$  نیز روی خط  $L$  قرار نداشته باشد، مسئله دو جواب دارد

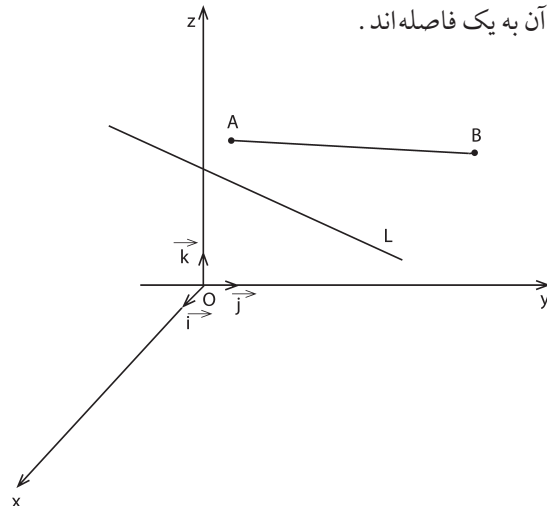
صفحه‌ای است که بر دو خط متقاطع  $L$  و  $AB$  می‌گذرد. پس در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. صفحه‌ی  $P_V$  در شکل «چ» یکی از صفحه‌های جواب مسئله است.



شکل ح

### روش جبری-مختصاتی

دستگاه محورهای مختصات قائم  $O-xyz$  را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات فرض می‌کنیم  $A = (x_1, y_1, z_1)$  و  $B = (x_2, y_2, z_2)$  و خط به معادله‌ی  $L: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$  باشد. می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسیم که بر خط  $L$  می‌گذرد و دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  از آن به یک فاصله‌اند.



می‌دانیم که در حالت کلی، دو صفحه جواب مسئله هستند:

الف) صفحه‌ای که بر خط  $L$  و نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  می‌گذرد؛ با توجه به این که:

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده کرد. یکی از آن‌ها، تعیین دو نقطه‌ی دل‌خواه  $C$  و  $D$  از خط  $L$  و سپس نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی  $M$ ،  $C$  و  $D$  است. روش دیگر هم این است که معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط  $L$  را بنویسیم و از بین

صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص کنیم که بر نقطه‌ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  می‌گذرد. (ب) صفحه‌ای که بر خط  $L$  می‌گذرد با خط  $AB$  موازی است. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ از جمله: بردار قائم صفحه را که با بردار  $\vec{AB} \wedge \vec{L_D}$  هم‌راستا است، تعیین و نقطه‌ای دل‌خواه روی خط  $L$  اختیار می‌کنیم. حال با داشتن یک نقطه از صفحه و بردار قائم آن معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم. در ادامه، برای روشن‌تر شدن این روش حل (روش جبری-مختصاتی) چند مثال می‌آوریم.

**مثال ۱.** دو نقطه‌ی  $A = (2, -1, 3)$  و  $B = (-2, 3, 1)$  و خط  $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$  داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ی را بنویسید که بر خط  $L$  می‌گذرد و دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  از آن به یک فاصله‌اند.

**حل: الف)** نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط  $L$  و نقطه‌ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  می‌گذرد. روش اول: دو نقطه دل‌خواه  $C$  و  $D$  از خط  $L$  را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$C = (-1, 2, 0) \text{ و } D = (2, 4, -1)$$

اکنون مختصات نقطه‌ی  $M$  وسط پاره خط  $AB$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$M \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M = (0, 1, 2)$$

حال معادله‌ی صفحه‌ی  $P$  گذرنده بر سه نقطه‌ی  $C$ ،  $D$  و  $M$  را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز به روش‌های متفاوتی عمل کنیم؛ از جمله:

$$\vec{CD} = (2 + 1, 4 - 2, -1 - 0) = (3, 2, -1)$$

$$\vec{CM} = (0 + 1, 1 - 2, 2 - 0) = (1, -1, 2)$$

$$\vec{CD} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\Rightarrow -3 + 6\lambda + \lambda + 8 = 0 \Rightarrow 7\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{7}$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{5}{7})x - 3y + 3(-\frac{5}{7})z + (-\frac{5}{7}) + 8 = 0$$

$$\frac{9}{7}x - 3y - \frac{15}{7}z + \frac{51}{7} = 0 \Rightarrow 9x - 21y - 15z + 51 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله که همان معادله‌ی صفحه‌ی به دست آمده در روش اول است.

### روش سوم

می‌دانیم معادله‌ی صفحه‌ای که بر سه نقطه‌ی  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  و  $(x_3, y_3, z_3)$  می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به این مطلب و این که نقطه‌ی  $M = (0, 1, 2)$  وسط پاره‌خط  $AB$  یک نقطه از این صفحه و  $C = (-1, 2, 0)$  و  $D = (2, 4, -1)$  دو نقطه‌ی دیگر از خط  $L$  و متعلق به این صفحه هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(x - 0) + (-7)(y - 1) + (-5)(z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

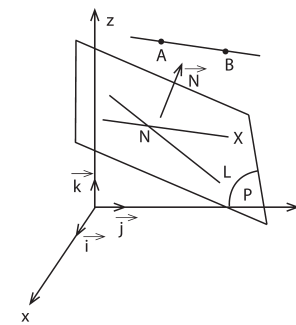
ب) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط  $L$  می‌گذرد و با خط  $AB$  موازی است.

این صفحه را  $P$  می‌نامیم. معادله‌ی آن را به روش‌های

متفاوتی می‌توان به دست آورد:

### روش اول:

بردار قائم صفحه‌ای که بر خط  $L$  می‌گذرد و با خط  $AB$  موازی است، حاصل ضرب برونی این



$$\Rightarrow \vec{N}_p = (2, -7, -5)$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x + 1) - 7(y - 2) - 5(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

نکته: در این حالت به سادگی می‌توان نشان داد که  $AB$  موازی  $L$  نیست، زیرا پارامترهای هادی  $\vec{AB}$  و خط  $L$  متناسب نیستند. هم‌چنین نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  روی خط  $L$  نیست، زیرا مختصات  $M$  در معادله‌ی  $L$  صدق نمی‌کند.

### روش دوم

۱. مختصات نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  را تعیین

می‌کنیم. داریم:

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}) = (0, 1, 2)$$

$$\Rightarrow M = (0, 1, 2)$$

۲. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

داریم:

$$P_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x+2 = 3y-6$$

$$\Rightarrow P_1: 2x - 3y + 8 = 0$$

$$P_2: \frac{x+1}{3} = \frac{z}{-1} \Rightarrow 3z = -x-1$$

$$\Rightarrow P_2: x + 3z + 1 = 0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda(x + 3z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda x + 3\lambda z + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow (2 + \lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

معادله‌ی دسته‌ی صفحه‌ی گذرنده بر  $L$

۳. صفحه‌ای از این دسته صفحه را مشخص می‌کنیم که از

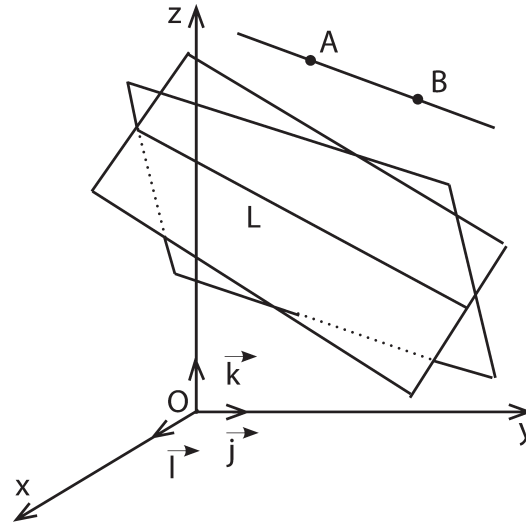
نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  می‌گذرد. به این منظور، مختصات نقطه‌ی  $M$  باید در معادله‌ی دسته صفحه صدق کند.

داریم:

$$M = (0, 1, 2) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}} (2 + \lambda)(0) - 3(1)$$

$$+ 3\lambda(2) + \lambda + 8 = 0$$

دو بردار یعنی  $\vec{V}_P = \vec{V}_L \times \vec{V}_{AB}$  است. این بردار را مشخص می‌کنیم. داریم:



### روش دوم:

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص می‌کنیم که با خط AB موازی است. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را قبلاً نوشتیم. داریم:

$$(2 + \lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

از طرف دیگر داشتیم:

$$\vec{AB} = (-4, 4, -2) \text{ یا } \vec{AB} = (-2, 2, -1)$$

از آن جا:

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} = (2 + \lambda, -3, 3\lambda), \vec{V}_{AB} = (-4, 4, -2)$$

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \perp \vec{V}_{AB} \Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \times \vec{V}_{AB} = 0$$

$$(2 + \lambda)(-2) + (-3)(2) + (3\lambda)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 2\lambda - 6 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\lambda = -2 \xrightarrow{\text{در معادله دسته صفحه}} (-3 + 2)x - 3y + 3(-2)z - 2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow -3y - 6z + 6 = 0 \Rightarrow y + 2z - 2 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و موازی AB؛ یعنی جواب دیگر مسئله، که در روش اول نیز همین جواب به دست آمد.

**مثال ۲.** دو نقطه‌ی  $A = (1, 0, 2)$  و  $B = (-3, -4, 0)$  و خط

$L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$  داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را

بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

**حل:** بردار هادی راستای AB و بردار هادی خط L را به دست می‌آوریم تا وضع آن‌ها را نسبت به هم مشخص کنیم. داریم:

$$A(1, 0, 2), B(-3, -4, 0) \Rightarrow \vec{AB} = (-3 - 1, -4 - 0, 0 - 2) = (-4, -4, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, -4, -2), L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (2, 2, 1), \frac{p}{p'}: \frac{-4}{2} = -2,$$

$$\frac{q}{q'} = \frac{-4}{2} = -2, \frac{r}{r'} = \frac{-2}{2} = -2$$

$$A = (3, -1, 3), B = (-2, 3, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-2 - 3, 3 + 1, 1 - 3) = (-5, 4, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, 4, -2), L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (3, 2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (0)\vec{i} + (-10)\vec{j} + (-20)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_P = (0, -10, -20) \text{ یا } \vec{N}_P = (0, 1, 2)$$

اکنون یک نقطه از خط L را نیز مشخص می‌کنیم. داریم:

$$E = (-1, 2, 0) \in L$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی E و عمود بر بردار  $\vec{N}$

را می‌نویسیم. داریم:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 0(x + 1) + 1(y - 2) + 2(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow P: y + 2z - 2 = 0 \quad \text{معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = -2 \Rightarrow \vec{AB} \parallel L$$

$$A = (1, 0, 2) \longrightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0-1}{2} \neq A \notin L$$

پس خط  $AB$  موازی با  $L$  و متمایز از آن است. بنابراین آن چه در رویکرد هندسی بحث شد، در این حالت مسئله بی شمار جواب دارد. مجموعه این جواب ها، دسته صفحه ای است که بر خط  $L$  می گذرد. معادله ای این دسته صفحه را می نویسیم. داریم:

$$L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow P_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow P_1: x - y + 1 = 0$$

$$P_2: \frac{x}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 2z \Rightarrow P_2: x - 2z = 0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 + \lambda(x - 2z) = 0$$

معادله ای دسته صفحه ای گذرنده بر  $L$  و جواب مسئله  $\Rightarrow (1 + \lambda)x - y - 2\lambda z + 1 = 0$

نکته: یکی از این صفحه ها بر  $L$  و  $AB$

می گذرد. فاصله های دو نقطه ای  $A$  و  $B$  از این صفحه مساوی صفر است، چون این دو نقطه روی صفحه قرار دارند. در مورد بقیه ای صفحه های جواب مسئله، فاصله های مساوی  $A$  و  $B$  از هر یک از صفحه ها مخالف صفر است. به ازای مقادیر گوناگون  $\lambda$  می توان معادله ای این صفحه ها را مشخص کرد. لازم به ذکر است، دو صفحه از صفحه های جواب مسئله، همان صفحه های  $P_1: x - y + 1 = 0$  و  $P_2: x - 2z = 0$  هستند که به ازای  $\lambda = 0$  و  $\lambda \rightarrow \infty$  به دست می آیند.

نکته: معادله ای دسته صفحه ای گذرنده بر  $L$  را

به صورت  $\alpha P_1 + \beta P_2 = 0$  که  $\alpha$  و  $\beta$  عددهای حقیقی اند نیز می توان نشان داد؛ یعنی به صورت:

$$\alpha(x - y + 1) + \beta(x - 2z) = 0$$

در این حالت به ازای  $\alpha = 0$ ،  $P_2: x - 2z = 0$ ،

و به ازای  $\beta = 0$ ، صفحه ای  $P_1: x - y + 1 = 0$

به دست می آید و به ازای بقیه ای مقدارهایی که به  $\alpha$

و  $\beta$  نسبت می دهیم، صفحه های دیگر جواب

مسئله حاصل می شود. صفحه ای گذرنده بر  $L$  و

$AB$  را نیز می توان مشخص کرد که یکی از

جواب های مسئله است.

**مثال ۳.** خط  $L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$  و دو نقطه ای

$A = (2, -1, 4)$  و  $B = (0, 1, -2)$  داده شده اند. معادله ای

صفحه ای را مشخص کنید که بر خط  $L$  می گذرد و دو نقطه ای

$A$  و  $B$  از آن به یک فاصله اند.

**حل:** وضع خط  $AB$  و خط  $L$  و هم چنین وضع نقطه ای  $M$  وسط

پاره خط  $AB$  را نسبت به خط  $L$  مشخص می کنیم. داریم:

$$A = (2, -1, 4), B = (0, 1, -2) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, -6)$$

$$\vec{V}_L = (4, 2, 3), \frac{-2}{4} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{3} \Rightarrow AB \text{ موازی } L \text{ نیست}$$

در معادله ای  $L$

$$M = (1, 0, 1) \longrightarrow \frac{1-1}{3} = \frac{0}{2} = \frac{1-1}{3} \Rightarrow 0 = 0 = 0$$

پس نقطه ای  $M$  وسط پاره خط  $AB$  روی خط  $L$  قرار دارد.

بنابراین مسئله بی شمار جواب دارد و این بی شمار جواب دسته

صفحه ای است که بر خط  $L$  می گذرد (یکی از صفحه های این

دسته صفحه، صفحه ای گذرنده بر دو خط متقاطع  $L$  و  $AB$

است). معادله ای این دسته صفحه را می نویسیم.

$$L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$\Rightarrow P_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} \text{ یا } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 2y \Rightarrow P_1: x - 2y - 1 = 0$$

$$P_2: \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow P_2: 3y - 2z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x - 2y - 1) + \beta(3y - 2z + 2) = 0$$

معادله ای دسته صفحه ای جواب مسئله (دسته صفحه ای

گذرنده بر  $L$ ).

**نکته:** دو صفحه ای  $P_1$  و  $P_2$ ، دو صفحه ای

جواب مسئله اند که به ازای  $\beta = 0$  و  $\alpha = 0$  به دست

می آیند. برای تعیین معادله ای صفحه ای گذرنده بر

$L$  و  $AB$  در این حالت، کافی است مختصات یک

نقطه ای دل خواه  $AB$  (غیر از نقطه ای  $M$ ) را در

معادله ای دسته صفحه قرار دهیم.

به ازای مقادیر دیگری که به جای عددهای حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  قرار

می دهیم، معادله ای صفحه های دیگر جواب مسئله به دست می آید.