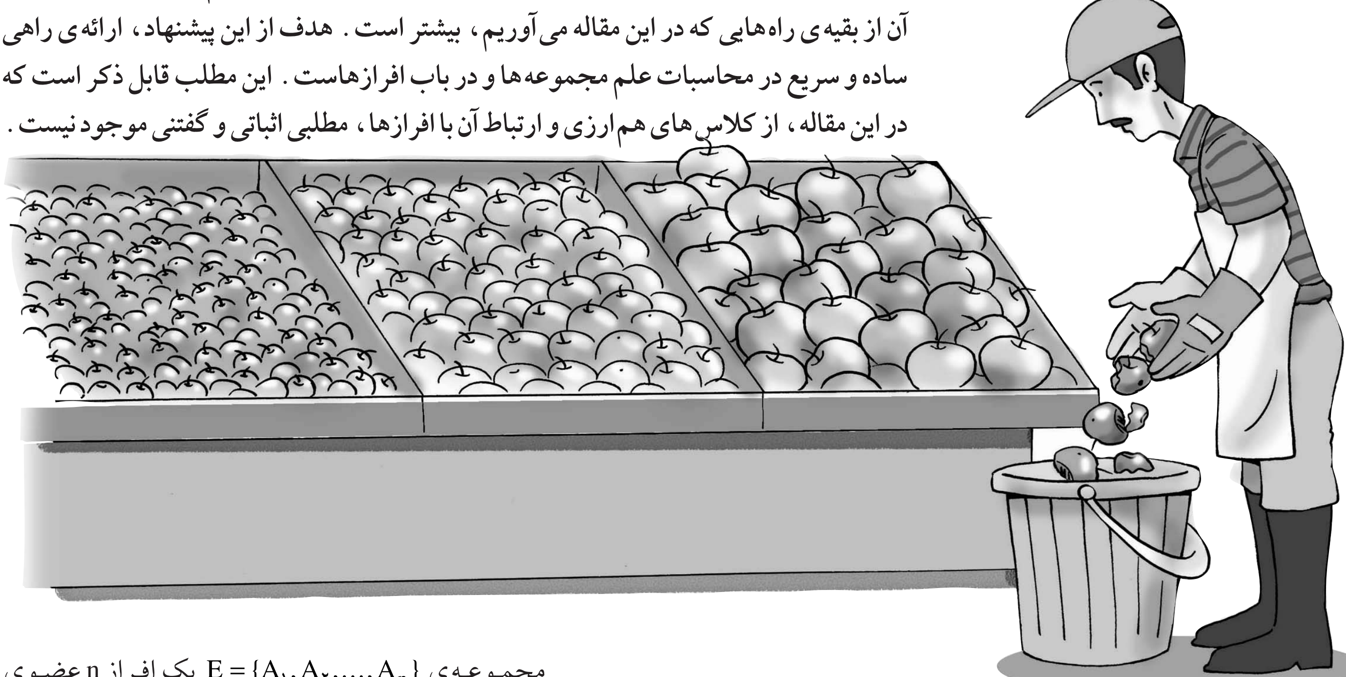
تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی

● عماد سهائی
دانشجوی رشته‌ی دبیری ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

اشاره:
مقاله‌ی پیش‌رو، درباره‌ی راه‌های به‌دست آوردن تعداد کل افزارهای یک مجموعه‌ی nعضوی است. در پایان مقاله، راه نسبتاً ساده‌ای را به شما پیشنهاد می‌کنیم که سرعت محاسباتی آن از بقیه‌ی راه‌هایی که در این مقاله می‌آوریم، بیشتر است. هدف از این پیشنهاد، ارائه‌ی راهی ساده و سریع در محاسبات علم مجموعه‌ها و در باب افرازهاست. این مطلب قابل ذکر است که در این مقاله، از کلاس‌های هم‌ارزی و ارتباط آن با افرازها، مطلبی اثباتی و گفتنی موجود نیست.



افراز یک مجموعه

هرگاه A مجموعه‌ای ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند A_1، A_2 و... و A_n بیابیم، به قسمی که اولاً: هر یک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً: هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دوبه‌دو از هم جدا باشند) و ثالثاً: اجتماع این زیر مجموعه‌ها با خود مجموعه‌ی A برابر شود، در این صورت گوییم: مجموعه‌های A_1، A_2 و... و A_n مجموعه‌های افرازکننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ یک افراز nعضوی از مجموعه‌ی A است.

باید توجه داشته باشیم، در حالتی که $n=1$، یعنی E یک افراز تک‌عضوی از مجموعه‌ی Aباشد، داریم: $E=\{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به‌زبان ریاضی بیان کنیم، گوییم:

مجموعه‌ی $E=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهیِ Aاست، هرگاه:

1) $\forall_i : 1 \le i \le n \ , \ A_i \neq \varnothing$

2) $\forall_{i,j} : 1 \le i, j \le n \ , \ i \neq j \ , \ A_i \cap A_j = \varnothing$

3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

برای درک بهتر مفهوم افراز یک مجموعه، چند مثال می‌آوریم:

مثال۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a\}$ را می‌نویسیم:

$E=\{\{a\}\}$: تنها یک افراز تک‌عضوی داریم A: | a |

مثال۲. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b\}$ را می‌نویسیم:

$E=\{\{a\},\{b\}\}$: افراز دوعضوی ; A | a | b |

$E=\{\{a,b\}\}$: افراز تک‌عضوی ; A | a b |

مثال۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ را می‌نویسیم:

افراز سه‌عضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}\ ;\ A\ \boxed{a \mid b \mid c}$

افراز دوعضوی:
$$\begin{cases} E=\{\{a\},\{b,c\}\}\ ;\ A\ \boxed{a \mid b\ \ c} \\ E=\{\{b\},\{a,c\}\}\ ;\ A\ \boxed{b \mid a\ \ c} \\ E=\{\{c\},\{a,b\}\}\ ;\ A\ \boxed{c \mid a\ \ b} \end{cases}$$

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c\}\}\ ;A\ \boxed{a\ \ b\ \ c}$

مثال۴. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ را می‌نویسیم:

افراز چهارعضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}\ :A\ \boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}}$

افراز سه‌عضوی که تعداد آن شش تا است و به سه‌تای آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$\begin{cases} E=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & \ d \end{array}} \\ E=\{\{c\},\{d\},\{a,b\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{c|c} a\ & b \\ \hline c & d \end{array}} \\ E=\{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}} \end{cases}$$

افراز دوعضوی که تعداد آن هفت عدد است، به چهار مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$\begin{cases} E=\{\{a\},\{b,c,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}} \\ E=\{\{b\},\{a,c,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}} \\ E=\{\{a,b\},\{c,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}} \\ E=\{\{a,c\},\{b,d\}\}\ ;A\ \boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array}} \end{cases}$$

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c,d\}\}\ :A\ \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}}$

در مثال‌های بالا، به مفهوم افراز یک مجموعه دست یافتیم و با چگونگی افراز شدن یک مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی آشنا شدیم. حال اگر مثال‌ها را ادامه دهیم و بتوانیم مجموعه‌های پنج عضوی و شش‌عضوی را نیز افراز کنیم، به جدولی مانند جدول ۱ دست خواهیم یافت.

جدول۱. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی $(n\le ۶)$

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی / افراز m عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

در این‌جا مشکل این است که هرچه تعداد اعضای مجموعه‌ی افراز شده بیشتر شود، به‌دست آوردن تعداد کل افرازهای آن سخت‌تر می‌شود. از این‌رو در اکثر منابع، از رابطه‌ی زیر تعداد افرازهای m عضوی از یک مجموعه‌ی nعضوی را به‌دست می‌آورند:

$$\frac{۱}{m!}\sum_{k=۱}^{m}(-۱)^k\binom{m}{m-k}(m-k)^n \quad m,n\in \mathbb{N}, m\le n$$

اثبات این رابطه از راه استقرا روی nاست که از حوصله‌ی این بحث خارج است. حال با استفاده از رابطه‌ی بالا، جدول افرازی را بزرگ‌تر می‌کنیم:

جدول۲. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی $(n\le ۹)$

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی / افراز m عضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱	۶۳	۱۲۷	۲۵۵
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰	۱۰۳	۹۶۶	۳۰۲۵
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵	۳۵۰	۱۷۰۱	۷۷۷۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵	۱۴۰	۱۰۵۰	۶۹۵۱
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۱	۲۶۶	۲۶۴۶
۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۸	۴۶۲
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۳۶
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳	۸۷۷	۴۱۴۰	۲۱۱۴۷

هنگامی که جدول ۲ را رسم می‌کنیم، به دنباله‌ای از مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی برمی‌خوریم که برای به‌دست آوردن جملات آتی آن، به محاسبات طولانی نیاز داریم. این دنباله به شکل زیر است:

۱-۲-۵-۱۵-۵۲-۲۰۳-۸۷۷-۴۱۴۰-...

حال به راه‌حلی برای کم کردن این محاسبات توجه کنید:

اگر دنباله‌ی مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی را که از حالا آن را دنباله‌ی افراز nعضوی می‌نامیم، بنویسیم و از هر دو جمله‌ی متوالی آن تفاضل بگیریم و زیر آن‌ها بنویسیم، دنباله‌ی جدیدی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱ - ۲ - ۵ - ۱۵ - ۵۲ - ۲۰۳ ...

۱ ۳ ۱۰ ۳۷ ۱۵۱

اگر این عملیات را روی دنباله‌ی جدید انجام بدهیم، بار دیگر دنباله‌ی جدیدتری ایجاد کرده‌ایم:

۱ ۲ ۵ ۱۵ ۵۲ ۲۰۳ ...

۱ - ۳ - ۱۰ - ۳۷ - ۱۵۱

۲ ۷ ۲۷ ۱۱۴

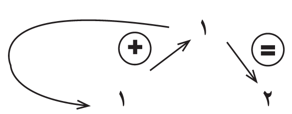
و چندبار این عمل را انجام می‌دهیم تا به یک عدد برسیم که دیگر قادر به تفریق کردن آن نباشیم:

۱ ۲ ۵ ۱۵ ۵۲ ۲۰۳ ...
۱ ۳ ۱۰ ۳۷ ۱۵۱
۲ ۷ ۲۷ ۱۱۴
۵ ۲۰ ۸۷
۱۵ ۶۷
۵۲

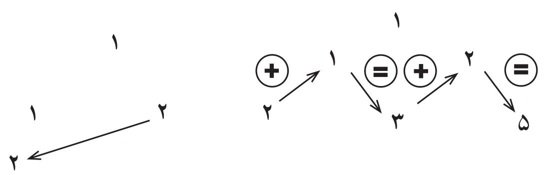
در این‌جا متوجه می‌شویم، ضلع مشخص شده از مثلث بالا، عیناً همان مجموع افرازهاست که دوباره تکرار شده است. اگر مثلث را کمی بچرخانیم، به راز آن پی خواهیم برد:

۱
۱ ۲
۲ ۳ ۵
۵ ۷ ۱۰ ۱۵
۱۵ ۲۰ ۲۷ ۳۷ ۵۲
۵۲ ۶۷ ۸۷ ۱۱۴ ۱۵۱ ۲۰۳
..

حال می‌توان به شیوه‌ی عملکرد این مثلث دست یافت: «یک» به سطر دوم مثلث و ابتدای سطر آمده است. سپس با «یک» در بالای سر خود جمع شده و حاصل در آخر همان سطر نوشته شده است:



سپس «دو» به سطر پایین و سمت چپ سطر منتقل شده است، با عدد بالای سرش که «یک» باشد جمع شده و حاصل، یعنی «سه»، در وسط سطر نوشته شده است. سپس «سه» با «دو» در بالای سر خود جمع شده است و حاصل که «پنج» باشد، در انتهای سطر قرار گرفته است:



اگر همین روند را دنبال کنیم، به غیر از این‌که مثلث بالا را شکل داده‌ایم، به سادگی به جملات آتی دنباله‌ی افراز nعضوی دست می‌یابیم. رابطه‌ای که بر این مثلث حکم‌فرماست،

این گونه است :

آخرین عدد به‌دست آمده در سطر nام از مثلث برابر با تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی nعضوی است. برای مثال، تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی ۱۰عضوی را به وسیله‌ی مثلث گفته شده، چنین محاسبه می‌کنیم :

۱
۱ ۲
۲ ۳ ۵
۵ ۷ ۱۰ ۱۵
۱۵ ۲۰ ۲۷ ۳۷ ۵۲
۵۲ ۶۷ ۸۷ ۱۱۴ ۱۵۱ ۲۰۳
۲۰۳ ۲۵۵ ۳۲۲ ۴۰۹ ۵۲۳ ۶۷۴ ۸۷۷
۸۷۷ ۱۰۸۰ ۱۳۳۵ ۱۶۵۷ ۲۰۶۶ ۲۵۸۹ ۳۲۶۳ ۴۱۴۰
۴۱۴۰ ۵۰۱۷ ۶۰۹۷ ۷۴۳۲ ۹۰۸۹ ۱۱۱۵۵ ۱۳۷۴۴ ۱۷۰۰۷ ۲۱۱۴۷
۲۱۱۴۷ ۲۵۲۸۷ ۳۰۳۰۴ ۳۶۴۰۱ ۴۳۸۳۳ ۵۲۹۲۲ ۶۴۰۷۷ ۷۷۸۲۱ ۹۴۸۲۸ ۱۱۵۹۷۵

مشاهده شد که در این مثلث، با محاسباتی خیلی کمتر از راه‌های قبلی، توانستیم تعداد کل افرازهای مجموعه‌ای ۱۰عضوی را به‌دست آوریم.

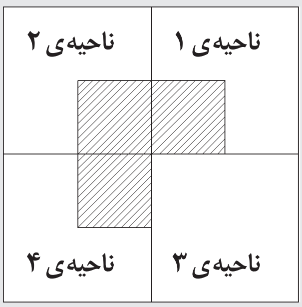
در انتهای مقاله خود را موظف می‌دانم، از تمام کسانی که مرا در راه تدوین این طرح یاری کردند (که مادر و پدرم در ابتدای این فهرست بلند قرار دارند)، تشکر و سپاس به‌عمل آورم. ضمناً از تمامی صاحب‌نظران و خوانندگان تقاضا دارم، پیشنهادهای تکمیلی و اصلاحی و انتقادهای خود را به دفتر مجله ارسال کنند.

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و ایلخانی‌پور، یدالله. مبانی ریاضیات. انتشارات مدرسه. ۱۳۷۴.
۲. گریمالدی، رالف. ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ج۴). ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس. انتشارات فاطمی. تهران. ۱۳۷۶.

تفریح اندیشه

هادی رنجبران



چهار ناحیه‌ی بالا را در نظر بگیرید، سعی کنید با رسم پاره‌خط‌هایی :
ناحیه‌ی ۱ را به دو قسمت برابر؛
ناحیه‌ی ۲ را به سه قسمت برابر؛
ناحیه‌ی ۳ را به چهار قسمت برابر؛
ناحیه‌ی ۴ را به هفت قسمت برابر تقسیم کنید.