

اشاره:

در این یادداشت قصد نداریم آن‌چه را که به عنوان مقدمه در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، تکرار کنیم و از توضیحات اولیه و تعریف مقدماتی می‌گذریم. تنها و به عنوان تأکید، به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: بیان مسئله به زبان ریاضی را «مدل‌سازی ریاضی» می‌گوییم. هرچه مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.

تناسب مدل با مسئله اهمیت بسزایی دارد. گاهی قرار است درباره‌ی وزن هم کلاسی هایتان مدل‌سازی کنید. در آن صورت، چشم‌پوشی از چند گرم کمتر و بیشتر شایسته است. اما اگر بخواهید در آزمایشگاه شیمی چند ماده را با هم ترکیب کنید چه‌طور؟ این جاست که واحدهای اندازه‌گیری و میزان خطا اهمیت خواهند یافت. در تعریف کتاب درسی، برای خطای اندازه‌گیری می‌خوانیم:

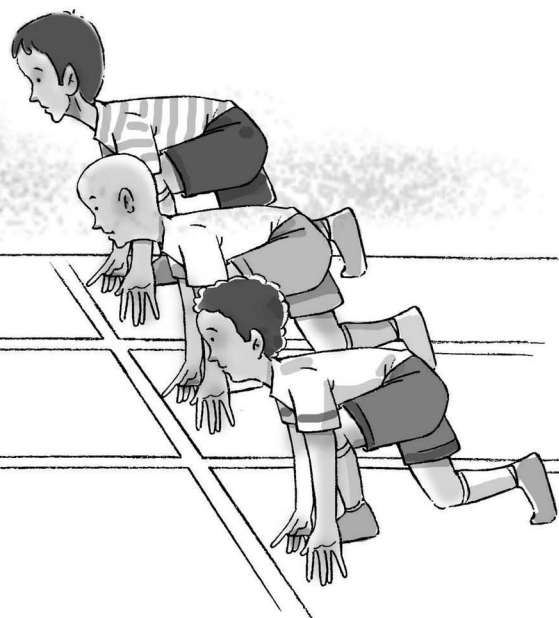
این «خطا لزوماً از واحد اندازه‌گیری کمتر است».

در این مقاله می‌کشیم، با ذکر چند مثال به اهمیت انتخاب واحد مناسب برای خطای اندازه‌گیری بپردازیم.

مدل‌سازی و خطای اندازه‌گیری

مثال ۱. فرض کنید مدت زمانی که یک دوندۀ، فاصله‌ی ۱۰۰ متر را دویده است، برابر ۹ ثانیه اندازه‌گیری شده باشد. می‌دانیم، مدت زمان مذکور ممکن است دقیقاً ۹ ثانیه نباشد، به خصوص اگر وسیله‌ی اندازه‌گیری دقت کافی نداشته باشد. پس مرتکب خطایی شده‌ایم که

قابل استفاده‌ی
دانش‌آموزان سال‌های
دوم و سوم
متوسطه



اندازه‌ی آن از یک ثانیه کمتر است؛ ولی واقعاً چه قدر کمتر؟
نمی‌دانیم!

مدل روبه‌رو پیشنهاد می‌شود: $T = 9 + E$

توجه کنید، مدت زمانی را که دونه بر حسب ثانیه دویده است با T نمایش داده‌ایم. قدر مطلق E خطای اندازه‌گیری از یک ثانیه کمتر است. E ممکن است مثبت یا منفی باشد.

مثال ۲. قد فردی حدود ۱۷۲ سانتی‌متر گزارش شده است. چه مدلی می‌توان برای اندازه‌گیری آن به کار گرفت؟
فرض کنیم P قد این فرد باشد، در این صورت:

$$P = 172 + E$$

پس در این جا واحد اندازه‌گیری را سانتی‌متر در نظر گرفته‌ایم و قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است.

تغییر واحد اندازه‌گیری و تغییر مدل

گاهی ممکن است در اثنای تهیه‌ی گزارش بخواهیم واحد اندازه‌گیری را دقیق‌تر کنیم. می‌خواهیم ببینیم در این فرایند، مدل دستخوش چه تغییری می‌شود. اگر در مدل اولیه خطا را با E نشان داده باشیم، آیا در مدل جدید که با تغییر واحد اندازه‌گیری همراه است، E تغییر می‌کند؟

مثال ۳. طولی را بر حسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم و مدل آن را به صورت $L = 3 + E$ نوشته‌ایم که در آن، قدر مطلق E از یک سانتی‌متر

کمتر است. اگر طول را بر حسب میلی‌متر بخواهیم گزارش کنیم، آیا مدل $L = 30 + E$ برای آن مناسب است؟
مسلماً خیر، چرا که در این جا E خطای اندازه‌گیری، از واحد اندازه‌گیری (میلی‌متر) کمتر نیست! یک مدل مناسب آن است که بنویسیم: $L = 30 + \frac{E}{100}$ که چون قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر فرض شده است، قدر مطلق $\frac{E}{100}$ به طور قطع از یک میلی‌متر کمتر است! می‌توان $\frac{E}{100}$ را برابر E_1 فرض کرد و نوشت $L = 30 + E_1$

محاسبه‌ی روی مدل

و چگونگی خطا در پدیده‌ی نهایی

با مثالی، این عنوان را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم

بخواهیم مدلی مناسب برای سطح یک دایره بنویسیم. در محاسبه‌ی سطح دایره، از شعاع دایره استفاده می‌شود. خطای مربوط به سطح، از خطای مربوط به محاسبه‌ی شعاع ناشی می‌شود. مدل اولیه برای شعاع دایره تنظیم می‌شود، اما در نهایت به مدلی برای سطح دایره می‌رسیم. مسلماً در این میان، محاسبات روی اندازه‌های گرفته شده از قبیل جمع، ضرب و توان، روی خطای اندازه‌گیری نیز صورت می‌گیرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴. فرض کنید شعاع دایره‌ای به صورت $R = 3 + E$ مدل سازی شده است. می‌خواهیم مدلی برای مساحت این دایره بنویسیم. اگر S مساحت دایره باشد، داریم:

$$S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi(3 + E)^2 \Rightarrow S = \pi(9 + 6E + E^2)$$

چون قدر مطلق E از واحد اندازه‌گیری کمتر است، هرچه به توان بزرگ‌تری برسد، میزان آن کمتر خواهد شد؛ به طوری که می‌توان از آن صرف نظر کرد. پس داریم: $S \approx 9\pi + 6\pi E$
اگر $6\pi E$ را برابر E_1 فرض کنیم، مدل مساحت دایره عبارت خواهد بود از: $S = 9\pi + E_1$.

صبر کنید! کار تمام نشده است! مطمئنید در انتخاب E و

E_1 خطایی مرتکب نشده‌ایم؟ سعی می‌کنیم این قسمت را کمی بیشتر تجزیه و تحلیل کنیم. حوصله‌اش را دارید؟!

فرض کردیم $R = 3 + E$ که در آن قدر مطلق E از سانتی‌متر کمتر است. برای سادگی فرض کنید $\pi = 3$ و $E = \frac{1}{3}$ cm باشد. آن‌گاه:

$\frac{1}{3} \times 3 \times 6\pi E = 6\pi E = E_1$ ، یعنی: $E_1 = 6$ ، $s \approx 27 + E_1$. متوجه اشتباه شدید؟ E_1 از واحد اندازه‌گیری بزرگ‌تر شده است! چه باید کرد؟

پیشنهاد می‌کنم برای جلوگیری از این اتفاق، دقت اندازه‌گیری طول شعاع را بیشتر کنیم و با اندازه‌گیری دقیق‌تر، E را چنان کوچک کنیم که با انجام عملیات و محاسبات ریاضی بعدی، خطای E_1 هم چنان از واحد اندازه‌گیری سطح کوچک‌تر بماند!

آیا انتخاب مدل $R = 3 + \frac{E}{100}$ برای شعاع مناسب‌تر نیست؟ متأسفانه در مثال‌های کتاب درسی، به این موضوع توجه کافی صورت نگرفته است و مؤلفان محترم کتاب درسی، تنها به اشاره‌ای کلی و مختصر بسنده کرده‌اند. برای نمونه، به مثالی

انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم

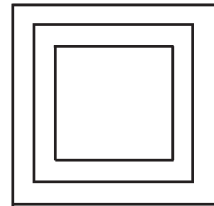
در صفحه‌ی ۱۲ کتابی درسی آمار و مدل سازی (چاپ هفتم، ۱۳۸۵)، اشاره می‌کنیم.

مثال ۵. ضلع مربعی به صورت $V + E$ مدل سازی شده است. S مساحت مربع است:

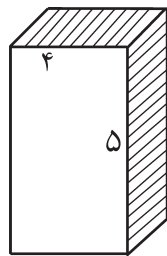
$$S = (V + E)^2 = 49 + 14E + E^2$$

$$S \approx 49 + 14E = 49 + E_1$$

با صرف نظر از جمله‌ی E^2 داریم:



امکان کاهش دهیم. به مثال دیگری از انتشار خطا در محاسبه‌ی حجم توجه کنید:



$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} &= 5 + E_1 = L_1 \\ \text{طول} &= 4 + E_2 = L_2 \\ \text{عرض} &= 2 + E_3 = L_3 \end{aligned}$$

اگر حجم مکعب برابر V باشد، در این صورت مدل حجم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V &= L_1 L_2 L_3 = (5 + E_1)(4 + E_2)(2 + E_3) \\ V &= 40 + 8E_1 + 10E_2 + 20E_3 \end{aligned}$$

در این مدل، E_1 ها از واحد کوچک‌ترند. پس حاصل ضرب آن‌ها خیلی کوچک خواهد بود و قابل چشم‌پوشی است. این‌جا نیز پدیده‌ی انتشار خطا اجتناب‌ناپذیر است! حتی اگر E_1 و E_2 و E_3 برابر $\frac{1}{10}$ سانتی‌متر باشند (طول‌ها بر حسب سانتی‌متر باشند)، $8E_1 + 10E_2 + 20E_3$ برابر $38 \times \frac{1}{10}$ ، یعنی 3.8 سانتی‌متر خواهد شد.

کتاب درسی اشاره نکرده است که امکان دارد E_1 از واحد سطح بزرگ‌تر شود. چون خطای سطح، 14 برابر $(E_1 = 14E)$ از خطای ضلع بزرگ‌تر است!

این پدیده را «انتشار خطا» می‌گوییم. انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد

۱. به این دو کسر نگاه کنید:

$$\frac{16}{64} \text{ و } \frac{26}{65}$$

اگر ۶ها را از صورت و مخرج کسرها حذف کنیم (که عملی است غیرمجاز)، دو کسر به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{4} \text{ و } \frac{2}{5}$$

به ظاهر، این دو کسر نباید با دو کسر بالا مساوی باشند، ولی اگر آن دو کسر را ساده کنید، خواهید دید:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5} \text{ و } \frac{16}{64} = \frac{1}{4} (!!)$$

۲. به این کسر نگاه کنید:

$$\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$$

اگر قوای ۲ را از صورت و مخرج حذف کنیم (عمل غیرمجاز)،

کسر به $\frac{1+x}{1-x}$ تبدیل می‌شود که برابر کسر اول است.

آیا شما هم می‌توانید چنین کسرهایی بنویسید؟

عمل غلط،
اما جواب صحیح

