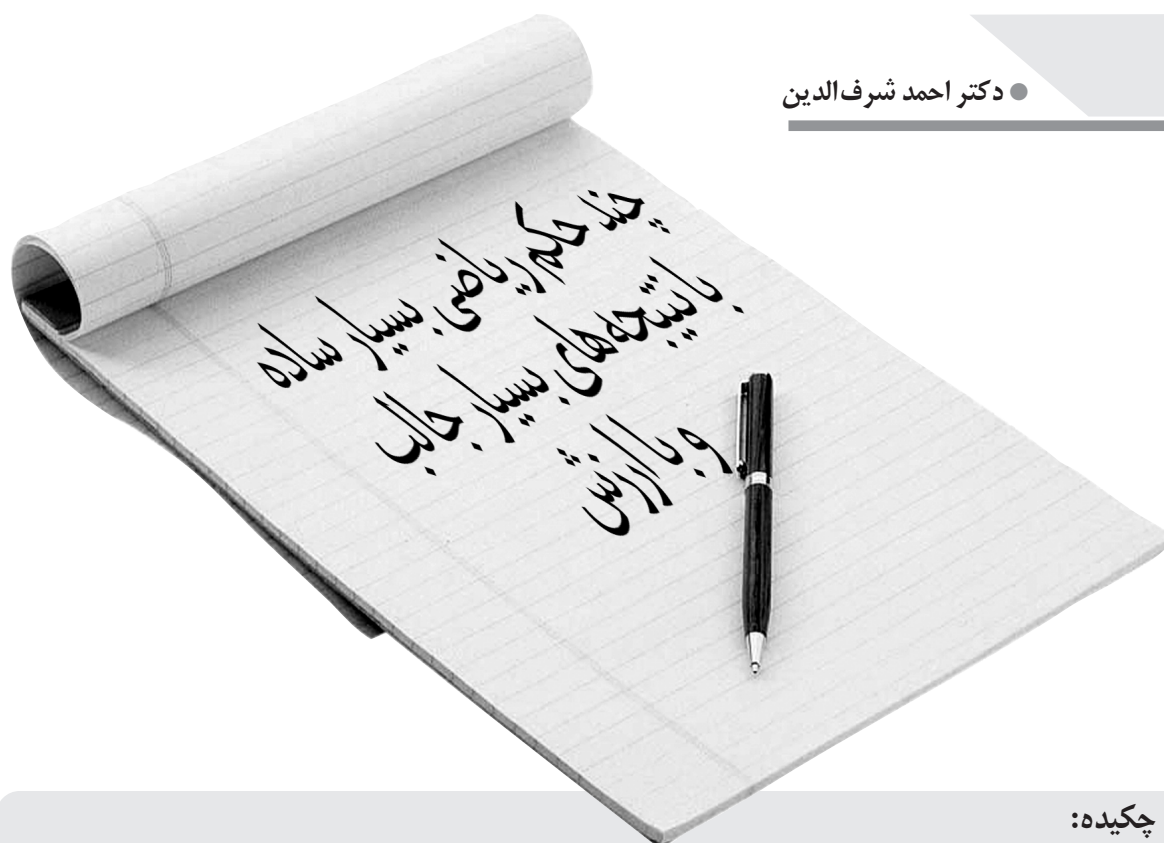




چکیده:

در مقاله‌ی حاضر به کمک مثال‌هایی، چند حکم ریاضی را شرح می‌دهیم که بسیار آسان‌اند، ولی نتیجه‌های مهمی از آن‌ها حاصل شده است:

۱. در چند دهه‌ی اخیر، در بعضی رسانه‌های ایران چنین اظهار شده است: تنها ساختمانی از کره‌ی زمین که از کره‌ی ماه قابل مشاهده است، دیوار چین است. این نظر نادرست است. در این باره توضیح می‌دهیم.
۲. آیا شکلی هامنی (مسطح) وجود دارد که محیط آن بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحت آن بی‌نهایت کوچک؟ به این سؤال جواب مثبت می‌دهیم.
۳. آیا شکلی هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی، ولی سطح آن نامتناهی باشد؟ به این سؤال نیز جواب مثبت می‌دهیم.
۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس، به 180° درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده، بسیار بزرگ است.
۵. از یک تابع از جبر «بول» یاد می‌کنیم که بسیار ساده است، ولی در دستگاه‌های رایانه‌ای، کاربرد بسیار مهمی دارد.
۶. یک حکم بسیار ساده از هندسه یاد می‌کنیم که با به کارگیری آن ثابت شده است، هم‌زمان نسبی است و این نتیجه فوق‌العاده ارزشمند است.

۱. دیوار بزرگ چین

در «دایرةالمعارف فارسی» درباره‌ی دیوار چین چنین آمده است: «دیوار بزرگ چین، دیوار دفاعی مستحکم معروفی به ارتفاع ۶ متر تا ۱۵ متر است و به ضخامت $4/5$ تا $7/5$ متر که به طول در حدود ۲۰۰۰ کیلومتر، بین مغولستان و چین به معنی اخص ممتد است و در فواصل معین برج‌ها دارد. در [نیمه‌ی دوم] قرن سوم پیش از میلاد، در عهد امپراطوری شی هوانگ‌تی از سلسله‌ی چین، توسط ۳۰۰,۰۰۰ تن (اغلب از مجرمان) ساخته شد و در سال ۲۰۴ پیش از میلاد به اتمام

رسید. طول آن با تمام انشعابات و پیچ‌وخم‌ها، ۳,۲۰۰ کیلومتر است...»

در دایرةالمعارف بین‌المللی وبستر (WEBSTER)، چاپ پنجم سال ۱۹۹۹، میانگین ارتفاع دیوار $7/6$ متر و پهنای آن حدود $3/6$ متر یاد شده است.

هرم بزرگ مصر

هرم بزرگ مصر قاعده‌ای مربع شکل دارد که طول ضلع آن ۲۲۷ متر است. ارتفاع هرم ۱۳۸ متر و طول

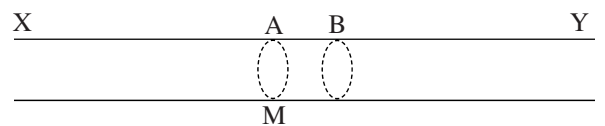
هر یالش ۲۱۷ متر است.

ساختمانی مرتفع در نیویورک

در سال های ۳۱-۱۹۳۰ در نیویورک، ساختمانی بزرگ به نام امپایر استیت (EMPIRE STATE) و به ارتفاع ۳۸۱ متر ساخته شد که هنوز پابرجاست.

مشاهده‌ی طناب از فاصله‌ی دور

طناب XY را که کاملاً کشیده شده است، از فاصله‌ی دور نگاه می‌کنیم (شکل ۱). قطعه‌ی AB از این طناب را که طول آن برابر قطر مقطع است، در نظر می‌گیریم.



شکل ۱

$\overline{AM} = \overline{AB}$. این طناب را به تدریج به فاصله‌ی دور می‌بریم. تا موقعی که قطعه‌ی AB از طناب دیده می‌شود، کل طناب هم دیده می‌شود. در فاصله‌ای که قطعه‌ی AB دیگر دیده نشود، طناب هم دیده نمی‌شود. یعنی امکان دیده شدن طناب، به طول آن بستگی ندارد، بلکه به قطعه‌ای از طناب بستگی دارد که طول آن برابر ارتفاع مقطع باشد.

اکنون با بهره‌گیری از آنچه گفتیم، توضیح می‌دهیم نظر کسانی که می‌گویند «تنها ساختمانی از زمین که از کره‌ی ماه قابل رؤیت است، دیوار چین است»، کاملاً نادرست است.

قطعه‌ای از دیوار چین را در نظر می‌گیریم که بزرگ‌ترین ارتفاع آن ۱۵ متر و طول آن نیز همین اندازه باشد. (در دایرةالمعارف فارسی بزرگ‌ترین ارتفاع دیوار چین ۱۵ متر نوشته شده است). ابعاد چنین قطعه‌ای از دیوار چین، از ابعاد هرم بزرگ مصر کوچک‌تر است بنابراین اگر این قطعه از دیوار چین از ماه دیده شود، به طریق اولی، هرم بزرگ مصر هم از کره ماه دیده خواهد شد. یعنی این نظر نادرست است که دیوار چین تنها ساختمانی از زمین است که از کره ماه دیده می‌شود.

تبصره: می‌توان استدلال‌های دقیق دیگری برای رد نظر دیده شدن دیوار چین از کره‌ی ماه ارائه کرد. یا حتی می‌توان به عکس‌هایی که در کره‌ی ماه از زمین گرفته شده‌اند، استناد کرد. ولی به نظر نگارنده‌ی این مقاله، استدلال فوق مبتنی بر ساده‌ترین اطلاعات هندسی است.

۲. آیا یک شکل هامنی (مسطح) وجود دارد که محیطش بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحتش مقداری محدود؟

آری. به دو مثال زیر توجه فرمایید:

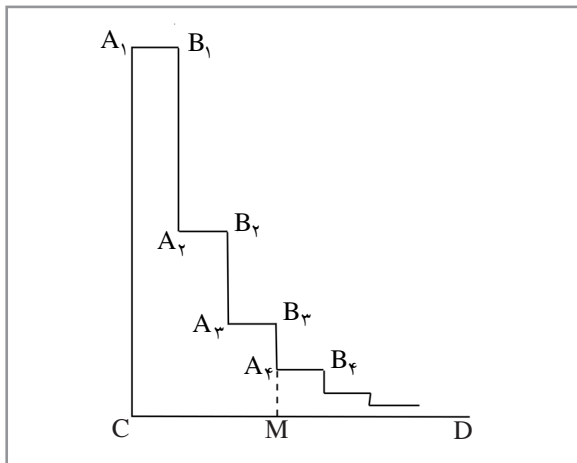
الف) مستطیلی را در نظر می‌گیریم با طول و عرض a و b. اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر $2(a+b)$ است و اندازه‌ی سطح آن ab. اگر b را مساوی $\frac{1}{a}$ اختیار کنیم، مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱ می‌شود (عدد ۱، واحد طول است و نیز واحد اندازه‌ی سطح). اگر a را به سوی صفر میل دهیم، مقدار $\frac{1}{a}$ به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. در این صورت محیط مستطیل مورد نظر به سوی بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن همواره مساوی با ۱ خواهد بود.

می‌توان طول و عرض مستطیل را طوری در نظر گرفت که محیط مستطیل به سوی بی‌نهایت میل کند و مساحت آن به سوی صفر. در مستطیلی به طول و عرض a و 1، چنین اختیار می‌کنیم:

$$b = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، محیط آن به سوی بی‌نهایت و مساحت آن به سوی صفر میل می‌کند.

ب) شکل هامنی $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ را در نظر می‌گیریم. در این شکل پلکانی، خط B_3M موازی A_1C است.



شکل ۲

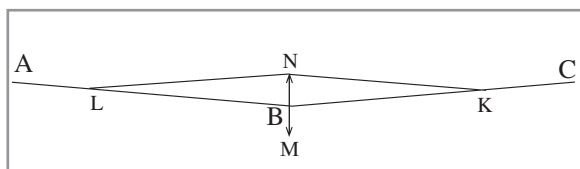
فرض می‌کنیم:

$$(۱) \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \dots = \overline{A_mB_m} = \dots$$

$$(۲) \begin{cases} \overline{A_1C} = a, \quad \overline{B_1A_2} = \frac{1}{p}a, \quad \overline{A_2B_3} = \frac{1}{q}a, \\ \overline{B_3A_4} = \frac{1}{r}a, \quad \dots \end{cases}$$

۴. در مثلث متساوی الساقین، اگر زاویه ی رأس به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه ی مربوط به قاعده ها بسیار بزرگ است.

این حکم هندسی فوق العاده ساده است، به طوری که در کتاب های هندسه آن را یاد نمی کنند. این حکم هندسی با وجود سادگی، کاربردهای بسیار مهم دارد. به مثال زیر توجه کنید: در سیستم حمل و نقل به وسیله ی تله کابین، کابل تله کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر کابل خیلی کشیده باشد، هنگامی که تله کابین به وسط دو پایه می رسد، کابل گسیخته می شود. کابلی را در نظر می گیریم که دو انتهای آن در دو نقطه ی A و C ثابت شده اند (شکل ۳).



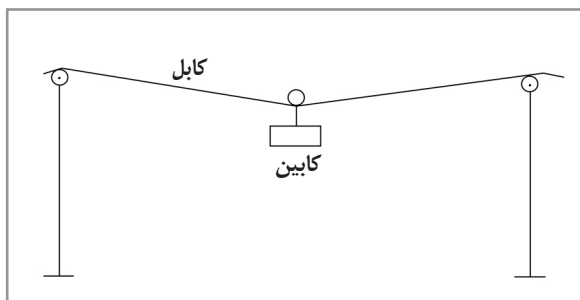
شکل ۳

وزنه ای در نقطه ی B که وسط کابل است، به آن آویزان می کنیم. این وزنه، کابل را به صورت خط شکسته ABC در می آورد. اگر کابل از ابتدا خیلی کشیده باشد، زاویه ی ABC خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک می شود.

نیروی را که وزنه، در نقطه ی B به کابل وارد می کند، با بردار $\vec{BM}$ نشان می دهیم. بردار $\vec{BN}$ را مساوی $\vec{BM}$ - در نظر می گیریم و متوازی الاضلاع BLNK را می سازیم. نیروی BN به دو نیروی BA و BC تجزیه می شود:

$$\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

چون زاویه ی $\angle ABC$ خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است، اندازه ی هریک از دو نیروی BA و BC خیلی بیشتر از اندازه ی نیروی BN است. همین موضوع سبب گسیخته شدن کابل می شود. در شکل ۴ شمای یک تله کابین رسم شده است. اگر امتداد



شکل ۴ شمای یک تله کابین

یعنی ارتفاع هر پله نصف ارتفاع پله ی پیشین است. به عبارت دیگر، ارتفاع های پله ها یک تصاعد هندسی تشکیل می دهند که جمله ی اول آن طول $\overline{A_1C}$ و قدر مطلق آن $\frac{1}{2}$ است. مساحت شکل $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ چنین است:

$$S = a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$$

مساحت این شکل پلکانی وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، چنین است:

$$a \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})$$

حد عبارت داخل کمانک ها، وقتی n به سوی بی نهایت میل کند برابر ۲a است. پس مساحت شکل پلکانی مورد نظر، وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، برابر ۲a می شود. پس اندازه ی محیط شکل پلکانی مورد نظر وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، به بی نهایت میل می کند و مساحت آن به سوی عدد ۲، یعنی محیط شکل، بی نهایت بزرگ است و مساحت آن محدود.

۳. آیا شکل هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی ولی سطح کل آن نامتناهی باشد؟ آری. به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) مکعب مستطیلی با ابعاد a، $\frac{1}{a}$ و ۱ در نظر می گیریم. حجم این مکعب مستطیل برابر ۱ است. وجهی از این مکعب مستطیل با ابعاد $\frac{1}{a}$ و ۱ را در نظر می گیریم. مساحت این وجه، برابر $\frac{1}{a}$ است. اگر a به سوی صفر میل کند، آن گاه مساحت وجه یاد شده به سوی بی نهایت میل می کند. پس اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، حجم مکعب مستطیل مقدار متناهی باقی می ماند، ولی سطح کل آن به سوی بی نهایت میل می کند.

ب) منشوری قائم در نظر می گیریم که قاعده ی آن شکل پلکانی یاد شده در مسئله ی پیشین باشد و طول ارتفاع آن برابر یک. حد حجم این منشور هنگامی که تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، برابر ۲ است، ولی سطح کل این منشور به سوی بی نهایت میل می کند.

چنین داریم: $x=y=z$.

خروجی دو رایانه‌ی A و B که x و y اند، به دریچه‌ی M وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی M حاصل ضرب xy را به دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی B و C که y و z اند، به دریچه‌ی N وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی N، حاصل ضرب yz را به دست می‌دهد.

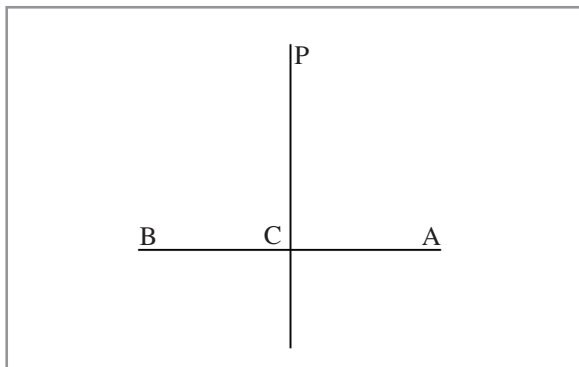
خروجی دو رایانه‌ی A و C که x و z اند، به دریچه‌ی P وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی P، حاصل ضرب zx را به دست می‌دهد.

ولتاژهای xy، yz و zx به دریچه‌ی Q وارد می‌شوند و خروجی Q، ولتاژ $xy + yz + zx$ را به دست می‌دهد. ولتاژ اخیر، جواب اکثریت سه رایانه است. پس اگر فقط یک رایانه از این سه رایانه، جواب درست به دست ندهد، جوابی که در خروجی مدار اکثریت به دست می‌آید، جواب درست است. با به کارگیری دستگاه اکثریت، اطمینان بیشتری از درستی جواب داریم.

۶. نسبی بودن هم‌زمانی

دو نقطه‌ی A و B و صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. این صفحه را با P نشان می‌دهیم. قضیه: هر نقطه‌ی واقع بر صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس، هر نقطه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی A می‌شود، بخش ۱ و بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی B می‌شود، بخش ۲ می‌نامیم.



شکل ۶

کابل در دو طرف غلتک نزدیک به 180° درجه باشد، کشش کابل در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و به بریده شدن کابل می‌انجامد.

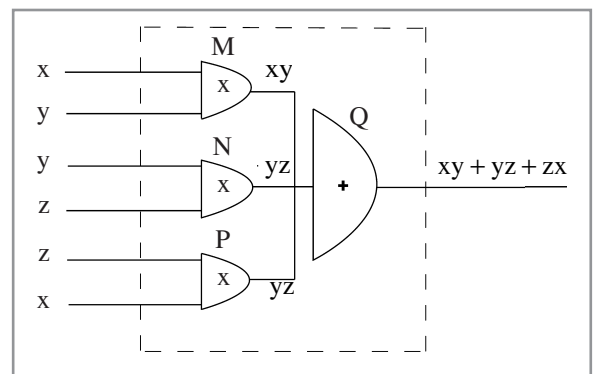
۵. تابع اکثریت و مدار آن

در جبر بول، تابع سه متغیری $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ را تابع اکثریت می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر اکثریت متغیرها، یعنی دو متغیر یا سه متغیر از این تابع، مقداری بگیرند، تابع همان مقدار را می‌گیرد. بیان ریاضی این خاصیت چنین است:

$$f(x, a, a) = f(a, y, a) = f(a, a, z) = f(a, a, a) = a$$

تابع اکثریت با وجود آن که بسیار ساده و آسان است، در دستگاه‌های رایانه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

مدار الکتریکی مربوط به تابع اکثریت، «مدار اکثریت» نامیده می‌شود. شکل ۵ مدار اکثریت را نشان می‌دهد. در این شکل، دریچه‌های M، N و P، دریچه‌های «و» هستند که به طور موازی قرار گرفته‌اند. خروجی‌های این سه دریچه، به دریچه‌ی Q که دریچه‌ی «یا» محسوب می‌شود، متصل‌اند. مدار حاصل از دریچه‌های «و» و دریچه‌ی «یا» را مدار اکثریت می‌نامند.



شکل ۵ مدار اکثریت

فرض کنیم بخواهیم مسئله‌ای را با رایانه حل کنیم و از درستی جواب کاملاً مطمئن باشیم. به این منظور سه رایانه یک مدار اکثریت را به کار می‌گیریم. برنامه را به طور هم‌زمان به سه رایانه‌ی A، B و C می‌دهیم. (این سه رایانه ممکن است حتی در سه شهر بسیار دور از یکدیگر باشند. در این محور با استفاده از آنتن‌ها، ولتاژهای لازم را انتقال می‌دهیم.

ولتاژهای خروجی سه رایانه‌ی یاد شده را به ترتیب x، y و z می‌نامیم (این ولتاژها جواب مسئله‌ی موردنظراند). اگر هر سه رایانه مسئله را درست حل کنند، آن‌گاه

برای هر نقطه‌ی M ، از بخش ۱ داریم: $\overline{MA} < \overline{MB}$ و برای هر نقطه‌ی N از بخش ۲ داریم: $\overline{NA} < \overline{NB}$.

برای آن که واقعه‌ای دیده شود، لازم است که از آن نقطه، نور به چشم برسد. چنین به نظر می‌آید که اگر برای ناظری، دو امر هم‌زمان باشند، این دو امر برای همه‌ی ناظرانی که آن‌ها را ملاحظه می‌کنند، هم‌زمان هستند. در سطرهای آینده نشان می‌دهیم که این تصور صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که هم‌زمانی نسبی است.

هم چنین به نظر می‌آید که اگر ناظری امر A را مقدم بر امر B مشاهده کند، همه‌ی ناظرانی که این دو امر ملاحظه می‌کنند، امر A را مقدم بر امر B مشاهده می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که این تصور هم صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که تقدم و تأخر نسبی است.

در دو نقطه‌ی A و B ، دو منبع نور الکتریکی در نظر می‌گیریم. کلید مدار الکتریکی را در نقطه‌ی C قرار می‌دهیم. با این کلید می‌توان دو لامپ الکتریکی A و B را روشن و خاموش کرد. اگر کلید را وصل کنیم، برای ناظری که روی صفحه‌ی P است، دو چراغ در یک لحظه روشن می‌شوند؛ زیرا مدت رسیدن الکتریسیته از A و B به C برابر است. اگر نقطه‌ای از صفحه‌ی P باشی، مدتی که نور دو مسافت AD و BD را می‌پیماید، برابر است. اگر کلید را قطع کنیم، برای

ناظری که روی عمود منصف است، دو چراغ A و B در یک لحظه خاموش می‌شوند.

در همین آزمایش، اگر ناظری در نقطه‌ی M از بخش (۱) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ A را مقدم بر روشن شدن چراغ B می‌بیند. زیرا نور، مسافت AM را در مدتی کوتاه‌تر از مسافت BM می‌پیماید. اگر ناظری در نقطه‌ی N از بخش (۲) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ B را مقدم بر روشن شدن چراغ A می‌بیند؛ زیرا: $\overline{NB} < \overline{NA}$.

نتیجه‌گیری نسبیت هم‌زمانی و نسبیت تقدم و تأخر، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی عمود منصف و از شاهکارهای بسیار مهم تفکر علمی است.

سرعت نور $300\,000\,000$ کیلومتر بر ثانیه است. لذا آن چه یاد شد در ابعاد کیهانی به کار می‌آید، نه در ابعاد کوچک. برای توضیح، دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی 100 کیلومتر از هم در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط پاره خط AB را M می‌نامیم. فرض کنیم دو پدیده‌ی A و B طوری باشند که برای ناظری که در نقطه‌ی M است، به طور هم‌زمان دیده شوند. اگر نقطه‌ی P از نقطه‌ی A و B به ترتیب به فاصله‌ی 130 و 140 کیلومتر باشد، آن گاه ناظری که در نقطه‌ی P قرار دارد، دو پدیده‌ی A و B را هم‌زمان می‌بیند؛ به دلیل اختلاف زمانی فوق‌العاده اندک دو پدیده‌ی A و B برای ناظر.

با قرار دادن علائم و عملیات مناسب ریاضی بین عددها، کاری کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشند.

۱	۱	$1=6$
۲	۲	$2=6$
۳	۳	$3=6$
۴	۴	$4=6$
۵	۵	$5=6$
۶	۶	$6=6$
۷	۷	$7=6$
۸	۸	$8=6$
۹	۹	$9=6$

برای نمونه: $\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$

● هادی رنجبران

تفریح اندیشه

